Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 729–733
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Analyse mathématique

Un algorithme de Schur pour les fonctions de transfert des systèmes surdéterminés invariants dans une direction

Daniel Alpay [1], Andrey Melnikov, Victor Vinnikov

Department of Mathematics, Ben Gurion University of the Negev, Ben-Gurion Bvd, 84105 BeerSheva, Israel

Reçu le 1er avril 2009 ; accepté le 28 avril 2009

Disponible sur Internet le 23 mai 2009

Présenté par Jean-Pierre Kahane

Résumé

Nous définissons un analogue de l'algorithme de Schur pour les fonctions de transfert de systèmes à deux indices sans pertes et invariants par rapport à l'une des variables. ***Pour citer cet article : D. Alpay et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***
© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

A Schur algorithm for transfer function of over-determined conservative systems, invariant in one direction. We define an analogue of the Schur algorithm for transfer functions of lossless $2D$ systems which are invariant with respect to one of the variables. ***To cite this article: D. Alpay et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***
© 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

In a celebrated 1917 paper [10] I. Schur associated to a function s analytic and contractive in the open unit disk $\mathbb{D}$ a (possibly finite) sequence $\rho_0, \rho_1, \ldots$ of numbers in $\mathbb{D}$ by the formulas $s_0(z) = s(z)$, $\rho_0 = s(0)$ and

$$s_{n+1}(z) = \frac{s_n(z) - s_n(0)}{z(1 - s_n(z)s_n(0)^*)}, \quad \rho_n = s_n(0), \quad n = 0, 1, \ldots.$$

The above recursion is called the Schur algorithm, and stops at step m if $s_m(0)$ is of modulus 1. Unwrapping it we obtain representations of s as $s = (a\sigma + b)/(c\sigma + d)$, where σ is also a Schur function and where $\Theta = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ has polynomial entries and is J_0-inner with $J_0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, that is:

$$\Theta(\lambda) J_0 \Theta(\lambda) \leqslant J_0, \quad |\lambda| < 1, \quad \text{and} \quad \Theta(\lambda) J_0 \Theta(\lambda) = J_0, \quad |\lambda| = 1.$$

Adresses e-mail : dany@math.bgu.ac.il (D. Alpay), andreym@math.bgu.ac.il (A. Melnikov), vinnikov@math.bgu.ac.il (V. Vinnikov).
[1] Earl Katz Chair in Algebraic System Theory.

1631-073X/$ – see front matter © 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2009.04.029

Schur functions are transfer functions of linear discrete-time dissipative systems which are moreover time-invariant. The systems we consider in this note are continuous-time and conservative (with respect to a possibly non-positive metric). Their transfer functions are $\mathbb{C}^{p\times p}$-valued functions S meromorphic in the right half plane $\mathbb{C}_r$ and such that

$$S(\lambda)\sigma_1 S(\lambda)^* \geqslant \sigma_1, \quad \lambda \in \Omega(S) \quad \text{and} \quad S(\lambda)\sigma_1 S(\lambda)^* = \sigma_1, \quad \text{for a.e. } \lambda \text{ such that } \operatorname{Re}\lambda = 0, \tag{1}$$

where $\Omega(S)$ denotes the domain of analyticity of S in $\mathbb{C}_r$, where $\sigma_1 \in \mathbb{C}^{p\times p}$ is invertible and self-adjoint, and non-tangential values are considered when $\operatorname{Re}\lambda = 0$. In their study of over-determined $2D$-systems invariant in one of the variables, the second and third authors were lead to consider functions S satisfying (1), but with both S and σ_1 depending on an extra real variable t_2 which varies in some open interval of $\mathbb{R}$. The functions $S(\lambda, t_2)$ are required to have supplementary properties, and, with these properties in force, are called *conservative intertwining functions*. Using an approach to the Schur algorithm developed by the first author together with Harry Dym, we define a Schur algorithm for these functions.

1. La famille $\mathcal{CI}$

Le point de départ pour définir la famille $\mathcal{CI}$ est la donnée de quatre fonctions $\sigma_1, \sigma_2, \gamma$ et γ_* continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^{p\times p}$, les deux premières étant à valeurs hermitiennes. Nous supposons de plus que $\det\sigma_1(t_2) \neq 0$, et que

$$\gamma(t_2) + \gamma(t_2)^* = \gamma_*(t_2) + \gamma_*(t_2)^* = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_2}\sigma_1(t_2), \quad t_2 \in I,$$

où I dénote l'intervalle ouvert parcouru par t_2. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, et A_1 et A_2 deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbf{L}(\mathcal{H})$. Soient aussi $\widetilde{B}$ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbf{L}(\mathbb{C}^p, \mathcal{H})$, considérons le système $2D$ défini par les équations

$$\Sigma : \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t_1} x(t_1, t_2) = A_1(t_2)x(t_1, t_2) + \widetilde{B}(t_2)\sigma_1(t_2)u(t_1, t_2), \\ \dfrac{\partial}{\partial t_2} x(t_1, t_2) = A_2(t_2)x(t_1, t_2) + \widetilde{B}(t_2)\sigma_2(t_2)u(t_1, t_2), \\ y(t_1, t_2) = -\widetilde{B}^*(t_2)x(t_1, t_2) + u(t_1, t_2), \quad t_1 \in \mathbb{R},\ t_2 \in I. \end{cases} \tag{2}$$

Ce système est invariant dans la direction t_1 et est surdéterminé. Nous supposons que les fonctions u et y sont absolument continues, et satisfont pour presque tout (t_1, t_2) aux conditions de compatibilité

$$\sigma_2(t_2)\frac{\partial}{\partial t_1}u(t_1, t_2) - \sigma_1(t_2)\frac{\partial}{\partial t_2}u(t_1, t_2) + \gamma(t_2)u(t_1, t_2) = 0,$$
$$\sigma_2(t_2)\frac{\partial}{\partial t_1}y(t_1, t_2) - \sigma_1(t_2)\frac{\partial}{\partial t_2}y(t_1, t_2) + \gamma_*(t_2)y(t_1, t_2) = 0.$$

La famille des fonctions de transfert de ces systèmes est dénotée par $\mathcal{CI}$. Les éléments de $\mathcal{CI}$ ont été caractérisés dans [9], d'où est prise la proposition suivante :

Proposition 1. *La fonction de transfert du système* (2) *est*

$$S(\lambda, t_2) = I - \widetilde{B}(t_2)^*\big(\lambda I_{\mathcal{H}} - A_1(t_2)\big)^{-1}\widetilde{B}(t_2)\sigma_1(t_2). \tag{3}$$

Elle a les propriétés suivantes :

(i) *La fonction $\lambda \mapsto S(\lambda, t_2)$ est analytique dans un voisinage de l'infini pour presque tout $t_2 \in I$, et on a de plus $S(\infty, t_2) = I_{p\times p}$.*
(ii) *La fonction $t_2 \mapsto S(\lambda, t_2)$ est absolument continue pour tout les $\lambda \in \mathbb{C}_r$.*
(iii) *Nous avons*

$$S(\lambda, t_2)^*\sigma_1(t_2)S(\lambda, t_2) = \sigma_1(t_2), \quad \Re\lambda = 0,$$
$$S(\lambda, t_2)^*\sigma_1(t_2)S(\lambda, t_2) \geqslant \sigma_1(t_2), \quad \Re\lambda > 0$$

avec λ dans le domaine d'analyticité de $S(\lambda, t_2)$ pour l'inégalité, et au sens des limites non tangentielles pour l'égalité.

(iv) *La multiplication par $S(\lambda, t_2)$ envoie les solutions de l'équation différentielle*

$$\lambda\sigma_2(t_2)u(\lambda, t_2) - \sigma_1(t_2)\frac{\partial}{\partial t_2}u(\lambda, t_2) + \gamma(t_2)u(\lambda, t_2) = 0 \tag{4}$$

dans les solutions de l'équation différentielle

$$\lambda\sigma_2(t_2)y(\lambda, t_2) - \sigma_1(t_2)\frac{\partial}{\partial t_2}y(\lambda, t_2) + \gamma_*(t_2)y(\lambda, t_2) = 0 \tag{5}$$

pour tous les $\lambda \in \mathbb{C}_r$.

Réciproquement, toute fonction $S(\lambda, t_2)$ qui satisfait aux conditions (i)–(iv) *est la fonction de transfert d'un système* (2). *La fonction A_1 dans* (3) *peut être choisie constante, en changeant le produit scalaire de $\mathcal{H}$.*

Une propriété importante de $S(\lambda, t_2)$ est que cette fonction est une solution de l'équation différentielle

$$\frac{\partial}{\partial t_2}S(\lambda, t_2) = \sigma_1^{-1}(t_2)\big(\sigma_2(t_2)\lambda + \gamma_*(t_2)\big)S(\lambda, t_2) - S(\lambda, t_2)\sigma_1^{-1}(t_2)\big(\sigma_2(t_2)\lambda + \gamma(t_2)\big), \quad t_2 \in I. \tag{6}$$

2. L'algorithme de Schur vectoriel

Les fonctions $S(\lambda, t_2) \in \boldsymbol{CI}$ sont telles que, pour chaque $t_2 \in I$, le noyau

$$\frac{S(\lambda, t_2)\sigma_1(t_2)S(\mu, t_2)^* - \sigma_1(t_2)}{\lambda + \mu^*} \geqslant 0 \tag{7}$$

pour $\lambda, \mu \in \Omega(S)$. Lorsque l'on fixe t_2, le noyau (7) est un cas particulier d'une famille de noyaux positifs (et plus généralement pouvant avoir un nombre de carrés négatifs) pour lequel l'algorithme de Schur a une extension. Cet algorithme, développé dans [2], utilise la théorie des espaces à noyau reproduisant de de Branges et Rovnyak (voir [3,7]). Nous en rappelons maintenant les principaux aspects. Nous prenons un ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$ ouvert et connexe, et deux fonctions a et b analytiques dans Ω et telles que l'ensemble Ω_+ des points de Ω tels que $|a(\lambda)| > |b(\lambda)|$ est non vide et différent de Ω. Soit maintenant une fonction X méromorphe dans Ω_+ et à valeurs dans $\mathbb{C}^{p\times m}$, et soit $J \in \mathbb{C}^{m\times m}$ une matrice hermitienne non singulière, tels que le noyau

$$\frac{X(\lambda)JX(\mu)^*}{a(\lambda)a(\mu)^* - b(\lambda)b(\mu)^*}$$

est positif dans l'ensemble $\Omega(X)$ des points d'analyticité de X dans Ω_+. Nous notons $\rho_\mu(\lambda) = a(\lambda)a(\mu)^* - b(\lambda)b(\mu)^*$. Le résultat suivant est démontré dans [2] quand J est de plus unitaire, mais la démonstration est la même pour le cas où J est hermitienne et invertible.

Théorème 2.1. *Soient $\xi_1, \ldots, \xi_m \in \mathbb{C}^p$ et $w_1, \ldots, w_p \in \Omega(X)$, et supposons que la matrice de composante ℓj égale à $\frac{\xi_\ell^* X(w_\ell)JX(w_j)^*\xi_j^*}{\rho_{w_\ell}(w_j)}$ est strictement positive. Il existe alors une matrice rationnelle Θ à valeurs dans $\mathbb{C}^{m\times m}$ telle que l'espace $\mathcal{M}$ égal aux combinaisons linéaires des fonctions $f_\ell(\lambda) = X(w_\ell)^*\xi_\ell/\rho_{w_ell}(\lambda)$ muni du produit scalaire*

$$[f_j, f_\ell] = \frac{\xi_\ell^* X(w_\ell)JX(w_j)^*\xi_j}{\rho_{w_j}(w_\ell)} \tag{8}$$

est l'espace à noyau reproduisant de noyau

$$\frac{J - \Theta(\lambda)J\Theta(\mu)^*}{\rho_\mu(\lambda)}$$

et de plus le noyau

$$\frac{X(\lambda)\Theta(\lambda)J\Theta(\mu)^*X(\mu)^*}{\rho_\mu(\lambda)} \tag{9}$$

est positif dans Ω_+.

Nous dénoterons par $P_{\mathcal{M}}$ la matrice de composante (ℓ, j) égale à $\mathcal{M} = \mathcal{H}(\Theta)$. Il existe une formule explicite pour Θ. Le cas de l'algorithme de Schur classique correspond à

$$X(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -s(\lambda) \end{pmatrix}, \quad J = J_0, \quad \text{et} \quad \rho_\mu(\lambda) = 1 - \lambda\mu^*.$$

Dans le cas qui nous intéresse ici, nous avons

$$a(\lambda) = \frac{1+\lambda}{\sqrt{2}}, \quad b(\lambda) = \frac{1-\lambda}{\sqrt{2}}, \quad \Omega_+ = \mathbb{C}_r, \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 \end{pmatrix},$$

et

$$X(\lambda) = \begin{pmatrix} S(\lambda) & -I_p \end{pmatrix},$$

et la positivité du noyau (9) implique que l'on peut écrire

$$S = (C + DS_1)(A + BS_1)^{-1}, \quad \text{avec} \quad \Theta = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

la fonction S_1 étant encore la fonction de transfert d'un système sans pertes. De plus on peut supposer $\Theta(\infty) = I_{2p}$ et alors on voit que $S(\infty) = I_p$ si et seulement $S_1(\infty) = I_p$. Prenons $N = p$, $w_1 = \cdots = w_p$. Si les ξ_j forment une base de $\mathbb{C}^p$, et si la matrice correspondante $P_{\mathcal{M}}$ est définie positive, on retrouve les résultats de P. Delsarte and Y. Genin and Y. Kamp (voir [6]). D'autres choix d'espaces $\mathcal{M}$ sont aussi possible. Voir [1].

3. L'algorithme de Schur dans les classes $\mathcal{C}\boldsymbol{I}$

On pourrait penser appliquer directement les résultats de la section précédente avec t_2 comme paramètre. Dans ce cas, la fonction $S_1(\lambda, t_2)$ n'appartient pas en général à une classe $\mathcal{C}\boldsymbol{I}$, et l'on arrive à une impasse. Pour rester dans la même classe, il faut une autre approche, que nous expliquons maintenant. Nous partons d'une fonction $S(\lambda, t_2) \in \mathcal{C}\boldsymbol{I}$ et fixons $t_2^0 \in I$. La fonction $\lambda \mapsto S(\lambda, t_2^0)$ est la fonction de transfert d'un système classique sans pertes. On applique l'algorithme de Schur décrit dans la section précédente avec

$$X(\lambda) = \begin{pmatrix} S(\lambda, t_2^0) & -I_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} \sigma(t_2^0) & 0 \\ 0 & -\sigma(t_2^0) \end{pmatrix}.$$

Prenons $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} = \mathcal{H}(\Theta)$. Nous obtenons une fonction $S_1(\lambda, t_2^0)$ définie par la transformation

$$S(\lambda, t_2^0) = T_{\Theta(\lambda)}\big(S_1(\lambda, t_2^0)\big).$$

La fonction $\lambda \mapsto S_1(\lambda, t_2^0)$ est aussi la fonction de transfert d'un système sans pertes classique. Utilisant les résultats de Brodskii et Livsic (voir [5,4]), on obtient une réalisation (en général de dimension infinie, d'espace d'état un espace de Hilbert $\mathcal{H}$)

$$S_1(\lambda, t_2^0) = I_{\mathcal{H}} - (B_1)^*(\lambda I - A_1)^{-1} B_1 \sigma_1(t_2^0)$$

de la fonction $S_1(\lambda, t_2^0)$, avec

$$A_1 + A_1^* + B_1 \sigma(t_2^0)(B_1)^* = 0.$$

Nous définissons $B_1(t_2)$ par l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_2}\big[B_1(t_2)\sigma_1(t_2)\big] + A_1 B_1(t_2)\sigma_2(t_2) + B_1(t_2)\gamma(t_2) = 0,$$

avec la condition initiale $B_1(t_2^0) = B_1$. Nous considérons la solution $X_1(t_2)$ de l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t_2} X_1(t_2) = B_1(t_2)\sigma_2(t_2)(B_1)^*(t_2), \quad X_1(t_2^0) = I, \tag{10}$$

dans un voisinage de t_2^0 où elle est invertible. Finalement, on définit :

$$\gamma_{1*} = \gamma + \sigma_2(B_1)^*(X_1)^{-1} B_1 \sigma_1 - \sigma_1(B_1)^*(X_1)^{-1} B_1 \sigma_2,$$

où toutes les fonctions dépendent de t_2.

Théorème 3.1. *La fonction*

$$S_1(\lambda, t_2) = I - (B_1)^*(t_2)(X_1)^{-1}(\lambda I_{\mathcal{H}} - A_1)^{-1}B_1(t_2)\sigma_1$$

appartient à $\mathcal{CI}(\sigma_1(t_2), \sigma_2(t_2), \gamma(t_2), \gamma_{1*}(t_2))$.

Donc on a la même fonction inchangée $\gamma(t_2)$ à l'entrée, mais la fonction γ_* change. Les calculs qui permettent de prouver le théorème précédent se trouvent dans [8] et [9].

Le passage de $S \in \mathcal{CI}(\sigma_1, \sigma_2, \gamma, \gamma_*)$ à $S_1 \in \mathcal{CI}(\sigma_1, \sigma_2, \gamma, \gamma_{1*})$ est l'algorithme de Schur. Le fait que l'on reste dans une classe $\mathcal{CI}$ est le point principal de l'algorithme.

4. Conclusions

Dans le cas classique, l'algorithme de Schur permet de résoudre des problèmes d'interpolation de type Nevanlinna–Pick ; voir [2]. Des problèmes analogues peuvent être définis dans le cas des classes $\mathcal{CI}$. De plus, les choix particuliers de σ_1 et σ_2 permettent d'étudier le problème de Sturm–Liouville et plus généralement des équations différentielles d'ordre plus élevé. Ces nouvelles relations entre la théorie de Schur et les équations différentielles seront présentées dans une autre publication.

Remerciements

La recherche des trois auteurs a été financée en partie par le fond de recherche 1023/07 de l'Israel Science Foundation.

Références

[1] D. Alpay, Algorithme de Schur, espaces à noyau reproduisant et théorie des systèmes, Panoramas et Synthèses, vol. 6, Société Mathématique de France, Paris, 1998.
[2] D. Alpay, H. Dym, On reproducing kernel spaces the Schur algorithm, and interpolation in a general class of domains, in: Operator Theory and Complex Analysis (Sapporo, 1991), in: Oper. Theory Adv. Appl., vol. 59, Birkhäuser, Basel, 1992, pp. 30–77.
[3] L. de Branges, J. Rovnyak, Canonical models in quantum scattering theory, in: C. Wilcox (Ed.), Perturbation Theory and Its Applications in Quantum Mechanics, Wiley, New York, 1966, pp. 295–392.
[4] M.S. Brodskii, Unitary operator colligations their characteristic functions, Russian Math. Surveys 33 (1978) 159–191.
[5] M.S. Brodskiĭ, M.S. Livšic, Spectral analysis of non-self-adjoint operators and intermediate systems, Uspekhi Mat. Nauk (N.S.) 13 (1(79)) (1958) 3–85.
[6] P. Delsarte, Y. Genin, Y. Kamp, Schur parametrization of positive definite block-Toeplitz systems, SIAM J. Appl. Math. 36 (1979) 34–46.
[7] H. Dym, J-contractive matrix functions, reproducing kernel Hilbert spaces and interpolation, published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1989.
[8] A.P. Melnikov, Overdetermined $2D$ systems invariant in one direction and their transfer functions, PhD thesis, Ben-Gurion University, Beer-Sheva, Israel, submitted November 2008.
[9] A.P. Melnikov, V. Vinnikov, Overdetermined conservative $2D$ systems, invariant in one direction and a generalization of Potapov's theorem, preprint, http://arxiv.org/abs/0812.3970.
[10] I. Schur, Über die Potenzreihen die im Innern des Einheitkreises beschränkten sind, I, J. Reine Angew. Math. 147 (1917) 205–232, English translation in: I. Schur methods in operator theory and signal processing (Operator Theory: Advances and Applications OT 18 (1986), Birkhäuser Verlag, Basel).