Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 705–708
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Théorie des nombres

Torsion des modules de Drinfeld de rang 2 et formes modulaires de Drinfeld

Cécile Armana

Fachrichtung 6.1 Mathematik, Universität des Saarlandes, Postfach 15 11 50, 66041 Saarbrücken, Allemagne

Reçu le 5 mars 2009 ; accepté après révision le 20 avril 2009

Disponible sur Internet le 23 mai 2009

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

Sous deux hypothèses, nous donnons une borne uniforme pour la torsion des modules de Drinfeld de rang 2 sur les extensions de $\mathbf{F}_q(T)$ de degré au plus q. L'une de ces hypothèses porte sur l'action de l'algèbre de Hecke sur les formes modulaires de Drinfeld. Nous énonçons aussi des résultats non conditionnels sur la torsion première de degré 3 et 4. ***Pour citer cet article : C. Armana, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

Torsion of rank-2 Drinfeld modules and Drinfeld modular forms. Under two assumptions, we give a uniform bound on the torsion of rank-2 Drinfeld modules over field extensions of $\mathbf{F}_q(T)$ of degree at most q. One of these assumptions concerns the action of the Hecke algebra on Drinfeld modular forms. We also state unconditional results on the prime torsion of degree 3 and 4. ***To cite this article: C. Armana, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

1. Introduction

Soient q une puissance d'un nombre premier p, A l'anneau $\mathbf{F}_q[T]$ et K le corps $\mathbf{F}_q(T)$. Si ϕ est un A-module de Drinfeld sur une extension finie L de K, son A-module de torsion $({}^{\phi}L)_{\mathrm{tors}}$ est un sous-ensemble fini de L. D'après Poonen, on s'attend à une borne uniforme sur son cardinal, similaire à une borne bien connue de Merel pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres [5].

Conjecture 1.1. *(Voir [7], Conj. 2.) Soit r un entier $\geqslant 1$. Pour tout entier $d \geqslant 1$, il existe une constante $C_{r,d} > 0$ telle que, pour toute extension L de K avec $[L:K] \leqslant d$ et pour tout module de Drinfeld ϕ sur L de rang r, on ait $\#({}^{\phi}L)_{\mathrm{tors}} \leqslant C_{r,d}$.*

Adresse e-mail : armana@math.jussieu.fr.

doi:10.1016/j.crma.2009.04.024

Cette conjecture a été prouvée pour $r = 1$ par Poonen ([7], Th. 1) et récemment par Pál dans le cas particulier des modules de Drinfeld de rang 2 sur $\mathbf{F}_2(T)$ [6], après des travaux préliminaires de Poonen et Schweizer [7,9]. Pour $r \geqslant 3$, elle semble actuellement hors de portée.

Nous présentons un résultat en direction de la Conjecture 1.1 pour les modules de Drinfeld de rang 2, qui repose sur deux hypothèses. Par la suite, $\mathfrak{p}$ désignera un idéal premier non nul de A. La première hypothèse $H_1(\mathfrak{p})$ s'apparente à une dualité entre formes modulaires de Drinfeld et algèbre de Hecke ; la deuxième $H_2(\mathfrak{p})$ est de nature technique. Elles seront définies dans les Sections 2 et 3. On appelle *degré* de $\mathfrak{p}$ l'entier $\log_q \# A/\mathfrak{p}$.

Théorème 1.2. *Supposons $H_1(\mathfrak{p})$ et $H_2(\mathfrak{p})$ satisfaites pour tout $\mathfrak{p}$ de degré $\geqslant \max(q+1, 5)$. Alors la Conjecture 1.1 est vraie pour les modules de Drinfeld de rang 2 sur toute extension L de K, avec $[L:K] \leqslant q$.*

Nous montrons que $H_1(\mathfrak{p})$ et $H_2(\mathfrak{p})$ sont satisfaites pour tout $\mathfrak{p}$ de degré 3.

L'*ordre* de $x \in ({}^{\phi}L)_{\mathrm{tors}} - \{0\}$ est l'idéal annulateur de x dans A. D'après Schweizer, on s'attend à des estimations plus précises concernant la torsion première.

Conjecture 1.3. *(Cas particulier de la Conj. 1 de [9].) Il n'existe pas de module de Drinfeld ϕ de rang 2 sur K ayant un élément dans $({}^{\phi}K)_{\mathrm{tors}}$ d'ordre $\mathfrak{p}$, avec $\mathfrak{p}$ de degré $\geqslant 3$.*

Nous établissons la Conjecture 1.3 en supposant $H_1(\mathfrak{p})$ et $H_2(\mathfrak{p})$ satisfaites pour tout $\mathfrak{p}$ de degré $\geqslant 3$. Notre approche conduit aussi à des résultats non conditionnels pour la torsion de petit degré.

Théorème 1.4. *Soit $\mathfrak{p}$ de degré 3 (resp. 4 si $q \geqslant 7$). Il n'existe pas de module de Drinfeld ϕ de rang 2 sur une extension L de K de degré $\leqslant 2$ (resp. $\leqslant 3$) ayant un élément dans $({}^{\phi}L)_{\mathrm{tors}}$ d'ordre $\mathfrak{p}$.*

Pour $\mathfrak{p}$ de degré 4, l'énoncé reste valable sur les extensions de K de degré 1 si $q = 2$ ou 3 (resp. de degré 2 si $q = 4$ ou 5). Le Théorème 1.4 confirme partiellement la Conjecture 1.3.

Nous esquissons les preuves des Théorèmes 1.2 et 1.4 dans la Section 4 : il s'agit d'une adaptation à la situation présente de la méthode de Mazur pour la torsion des courbes elliptiques [4,3].

2. Quotient d'enroulement

Soit $\mathscr{X}_0(\mathfrak{p})$ le schéma de modules grossier compactifié pour les couples (ϕ, C) où ϕ est un module de Drinfeld de rang 2 et C un sous-module cyclique d'ordre $\mathfrak{p}$. C'est un schéma propre et lisse sur $A[1/\mathfrak{p}]$. La courbe algébrique $X_0(\mathfrak{p}) = \mathscr{X}_0(\mathfrak{p}) \times_{A[1/\mathfrak{p}]} K$ est appelée *courbe modulaire de Drinfeld*. Sa variété jacobienne $J_0(\mathfrak{p})$ est munie d'endomorphismes $T_{\mathfrak{m}}$ (pour $\mathfrak{m}$ idéal de A), appelés *opérateurs de Hecke*, qui engendrent une sous $\mathbf{Z}$-algèbre commutative $\mathbf{T}$ de $\mathrm{End}_K(J_0(\mathfrak{p}))$. Cette *algèbre de Hecke* agit de façon compatible sur les formes automorphes associées à $J_0(\mathfrak{p})$ et les symboles modulaires pour K de Teitelbaum [10].

Soit $\mathbf{e}$ le symbole modulaire de Teitelbaum défini dans la Section 2.6 de [1]. Notons $I_{\mathbf{e}}$ l'idéal annulateur de $\mathbf{e}$ dans $\mathbf{T}$. Le *quotient d'enroulement* est la variété abélienne $J_0(\mathfrak{p})/I_{\mathbf{e}}J_0(\mathfrak{p})$. La théorie d'Eichler–Shimura–Drinfeld assure que c'est la plus grande variété abélienne quotient de $J_0(\mathfrak{p})$ définie sur K dont la fonction L ne s'annule pas au centre de symétrie ([1], Th. 3.6). Donc le groupe abélien $J_{\mathbf{e}}(\mathfrak{p})(K)$ est fini, d'après une inégalité connue sur la conjecture de Birch et Swinnerton–Dyer pour les variétés abéliennes sur K (Schneider [8]). Une autre construction de $J_{\mathbf{e}}(\mathfrak{p})$ figure dans [6].

Un résultat d'indépendance linéaire dans le $\mathbf{T}$-module $\mathbf{Te}$ fournit une minoration de sa dimension : si $\mathfrak{p}$ est de degré $d \geqslant 3$ (c'est-à-dire le genre de $X_0(\mathfrak{p})$ est > 0), on a $\dim J_{\mathbf{e}}(\mathfrak{p}) \geqslant q^{\lfloor \frac{d-3}{2} \rfloor}$, et en particulier $J_{\mathbf{e}}(\mathfrak{p})$ est non nulle ([1], Th. 3.16).

Soient $\widetilde{\mathbf{e}}$ la classe modulo p de $d_{\mathbf{e}}\mathbf{e}$, où $d_{\mathbf{e}}$ est le dénominateur de $\mathbf{e}$, premier à p ([1], Prop. 2.52) et $\widetilde{I_{\mathbf{e}}}$ l'annulateur de $\widetilde{\mathbf{e}}$ dans $\mathbf{T}$. Il sera fait usage d'une indépendance linéaire modulo p dans la Section 4.

Proposition 2.1. *(Voir [1], Th. 2.60.) Si $\mathfrak{p}$ est de degré $\geqslant 5$, les opérateurs de Hecke $T_{\mathfrak{m}}$, pour $\mathfrak{m}$ de degré 1, sont $\mathbf{F}_p$-linéairement indépendants dans $\mathbf{T}/\widetilde{I_{\mathbf{e}}}$.*

Lorsque $\mathfrak{p}$ est de petit degré, on peut décrire plus précisément le quotient d'enroulement à l'aide d'estimations élémentaires sur l'ordre d'annulation des fonctions L de formes automorphes associées à $J_0(\mathfrak{p})$. On a $\deg \mathfrak{p} = 3$ si et seulement si $J_{\mathbf{e}}(\mathfrak{p}) = J_0(\mathfrak{p})$. Si $\deg \mathfrak{p} = 4$, on a $J_{\mathbf{e}}(\mathfrak{p}) = J_0(\mathfrak{p})/(1+w)J_0(\mathfrak{p})$ où w est l'involution $-T_{\mathfrak{p}}$ (Th. 3.19 et Prop. 3.24 de [1]).

Afin de contourner une difficulté liée aux suites exactes de variétés abéliennes en caractéristique p, nous sommes amenés à faire une supposition technique sur $J_{\mathbf{e}}(\mathfrak{p})$. Soit $\mathcal{J}_0(\mathfrak{p})$ (resp. $\mathcal{J}$) le modèle de Néron de $J_0(\mathfrak{p})$ (resp. $J_{\mathbf{e}}(\mathfrak{p})$) sur $A[1/\mathfrak{p}]$. L'hypothèse $H_2(\mathfrak{p})$ affirme que le complexe des $A[1/\mathfrak{p}]$-modules d'espaces cotangents en 0 : $0 \to \mathrm{Cot}_0 \mathcal{J} \to \mathrm{Cot}_0 \mathcal{J}_0(\mathfrak{p}) \to \mathrm{Cot}_0 I_{\mathbf{e}}\mathcal{J}_0(\mathfrak{p}) \to 0$ est exact. Cette hypothèse est satisfaite lorsque $\mathfrak{p}$ est de degré 3, ou 4 si $p \neq 2$ (Prop. 3.29 et Section 5.5.2 de [1]).

3. Formes modulaires de Drinfeld

Soit F une extension de K ou le corps fini $\mathbf{F}_{\mathfrak{l}} = A/\mathfrak{l}$, pour $\mathfrak{l}$ un idéal maximal de A distinct de $\mathfrak{p}$. Les sections globales du faisceau des différentielles relatives de degré 1 du F-schéma $\mathscr{X}_0(\mathfrak{p}) \times_{A[1/\mathfrak{p}]} F$ sont appelées *formes modulaires de Drinfeld sur F* et forment un F-espace vectoriel $\mathbf{S}(F)$. La courbe $X_0(\mathfrak{p})$ est munie de deux pointes K-rationnelles 0 et ∞, échangées par l'involution w, et qui se prolongent en des sections de $\mathscr{X}_0(\mathfrak{p})$ sur $A[1/\mathfrak{p}]$. Pour $f \in \mathbf{S}(F)$, le « module de Tate–Drinfeld » fournit un *t-développement* en la pointe ∞ de $\mathscr{X}_0(\mathfrak{p}) \times_{A[1/\mathfrak{p}]} F$ de la forme $\sum_{i\geqslant 1} b_i(f)t^{1+i(q-1)} \in F[[t]]$ ([1], Ch. 4). Soit $\mathbf{C}_\infty$ le complété d'une clôture algébrique de $\mathbf{F}_q((\frac{1}{T}))$. L'espace $\mathbf{S}(\mathbf{C}_\infty)$ coïncide alors avec celui des formes modulaires de Drinfeld de poids 2, type 1 et doublement paraboliques pour $\Gamma_0(\mathfrak{p})$ au sens de Goss et Gekeler.

L'algèbre de Hecke $\mathbf{T}$ opère sur $\mathbf{S}(F)$ *via* son quotient $\mathbf{T}/p\mathbf{T}$. L'action des opérateurs de Hecke sur le t-développement est mal connue. En étudiant l'action de $T_{\mathfrak{m}}$, pour $\mathfrak{m}$ de degré 1 et de générateur unitaire noté P, on obtient le résultat qui suit ([1], Th. 4.34).

Proposition 3.1. *Les éléments de $\mathbf{T} \otimes_{\mathbf{Z}} F$ définis par $s_j = -\binom{q-1}{j-1}^{-1} \sum_{\deg \mathfrak{m}=1} P^{j-1} T_{\mathfrak{m}}$ $(1 \leqslant j \leqslant q-1)$ et $s_q = \sum_{\deg \mathfrak{m}=1} (1 - P^{q-1}) T_{\mathfrak{m}}$ vérifient : $b_j(f) = b_1(s_j(f))$ pour tout $f \in \mathbf{S}(F)$ et $1 \leqslant j \leqslant q$.*

Notons $H_1(\mathfrak{p})$ l'hypothèse suivante : il existe un idéal $\mathfrak{l}$ de degré 1 de A tel que l'application linéaire

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_{\mathfrak{l}} &\longrightarrow \mathrm{Hom}\big(\mathbf{S}(\mathbf{F}_{\mathfrak{l}}), \mathbf{F}_{\mathfrak{l}}\big) \\ s &\longmapsto \big(f \mapsto b_1(sf)\big) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de $\mathbf{F}_{\mathfrak{l}}$-espaces vectoriels. Cette hypothèse entraîne un énoncé de multiplicité un dans $\mathbf{S}(\mathbf{F}_{\mathfrak{l}})$, déjà évoqué dans [2] notamment. Le problème est généralement ouvert mais nous pouvons statuer dessus dans un cas particulier. La proposition suivante découle de la Proposition 3.1 et d'une propriété de point de Weierstrass sur $\mathscr{X}_0(\mathfrak{p}) \times_{A[1/\mathfrak{p}]} \mathbf{F}_{\mathfrak{l}}$ ([1], Th. 4.51 et 4.56).

Proposition 3.2. *Supposons $\mathfrak{p}$ de degré* 3. *Alors l'hypothèse $H_1(\mathfrak{p})$ est satisfaite pour tout $\mathfrak{l}$ de degré* 1. *En particulier, toute forme modulaire de $\mathbf{S}(\mathbf{F}_{\mathfrak{l}})$, propre pour $\mathbf{T}$ et non nulle, est déterminée, à une constante multiplicative près, par son système de valeurs propres.*

4. Points rationnels de courbes modulaires de Drinfeld

Soit $d \geqslant 1$. D'après Schweizer, si ϕ est un module de Drinfeld de rang 2 sur une extension L de K de degré d, on dispose d'une borne sur le cardinal de la composante $\mathfrak{p}$-primaire de $({}^{\phi}L)_{\mathrm{tors}}$, qui ne dépend que de d et $\mathfrak{p}$ ([9], Th. 2.4). Pour borner uniformément $\#({}^{\phi}L)_{\mathrm{tors}}$, il suffit alors de borner uniformément le nombre d'idéaux premiers $\mathfrak{p}$ intervenant dans la décomposition primaire.

Soit $X_0(\mathfrak{p})^{(d)}$ la puissance symétrique d-ème de $X_0(\mathfrak{p})$. Soit $u^{(d)} : X_0(\mathfrak{p})^{(d)} \to J_{\mathbf{e}}(\mathfrak{p})$ le morphisme qui à un diviseur D associe l'image de la classe du diviseur $D - d(\infty)$. Il se prolonge de façon unique en un morphisme de schémas $u^{(d)} : \mathscr{X}_0(\mathfrak{p})^{(d)} \to \mathcal{J}$. Notons $\infty^{(d)}$ l'image de la section ∞ dans $\mathscr{X}_0(\mathfrak{p})^{(d)}$ et $\infty_{\mathfrak{l}}^{(d)}$ sa restriction à la fibre spéciale en $\mathfrak{l}$ ($\mathfrak{l}$ idéal maximal de A, $\mathfrak{l} \neq \mathfrak{p}$). La courbe modulaire de Drinfeld $Y_1(\mathfrak{p})$ est une courbe algébrique affine sur K, et un schéma de modules grossier pour les couples (ϕ, x) où ϕ est un module de Drinfeld de rang 2 et x un élément de torsion d'ordre $\mathfrak{p}$.

Proposition 4.1. *Soient $\mathfrak{l}$ un idéal maximal et $\mathfrak{p}$ de degré $> d \deg \mathfrak{l}$. Si $u^{(d)}$ est une immersion formelle en $\infty_{\mathfrak{l}}^{(d)}$, alors pour toute extension L de K de degré d, la courbe $Y_1(\mathfrak{p})$ n'a pas de point L-rationnel.*

La preuve est une mise en œuvre de la méthode de Mazur dans ce contexte, et repose notamment sur des arguments locaux pour la torsion et un lemme de spécialisation dans $J_0(\mathfrak{p})(K)$ ([1], Th. 5.9). On donne ensuite un critère pour l'immersion formelle.

Proposition 4.2. *Soit $\mathfrak{l}$ un premier de degré* 1. *Si* $\deg \mathfrak{p} \geqslant 3$ (*resp.* $\geqslant 5$) *et si $H_1(\mathfrak{p})$ et $H_2(\mathfrak{p})$ sont satisfaites, alors $u^{(d)}$ est une immersion formelle en $\infty_{\mathfrak{l}}^{(d)}$ pour $d = 1$* (*resp.* $d \leqslant q$).

Esquissons sa preuve pour $\deg \mathfrak{p} \geqslant 5$. En utilisant $H_2(\mathfrak{p})$, la dualité fournie par $H_1(\mathfrak{p})$ et les relations de la Proposition 3.1, on voit que la propriété d'immersion formelle revient à montrer que $s_1, \ldots, s_q$ sont $\mathbf{F}_p$-linéairement indépendants dans $\mathbf{T}/\widetilde{I_{\mathbf{e}}}$. Cette dernière affirmation résulte de la Proposition 2.1 (voir [1], Prop. 5.28).

En combinant les Propositions 4.1 et 4.2, on obtient le Théorème 1.2. De la même façon, on démontre la Conjecture 1.3 sur la torsion première en supposant $H_1(\mathfrak{p})$ et $H_2(\mathfrak{p})$ satisfaites pour tout $\mathfrak{p}$ de degré $\geqslant 3$. Enfin, le Théorème 1.4 s'obtient à partir d'une variante de la Proposition 4.1 : on remplace l'immersion formelle par un argument de point de Weierstrass lorsque $\deg \mathfrak{p} = 3$ et de gonalité lorsque $\deg \mathfrak{p} = 4$, et on utilise la description précise de $J_{\mathbf{e}}(\mathfrak{p})$ dans ces cas ([1], Th. 5.11 et 5.15).

Remerciements

Cette Note a été rédigée lors d'un séjour à l'Université de la Sarre, avec l'aide d'une bourse Lavoisier. Je remercie E.-U. Gekeler pour son hospitalité et L. Merel pour ses conseils et sa relecture.

Références

[1] C. Armana, Torsion rationnelle des modules de Drinfeld, Thèse de doctorat, Université Paris Diderot-Paris 7, 2008.
[2] E.-U. Gekeler, On the coefficients of Drinfeld modular forms, Invent. Math. 93 (1988) 667–700.
[3] S. Kamienny, Torsion points on elliptic curves over fields of higher degree, Internat. Math. Res. Notices 6 (1992) 129–133.
[4] B. Mazur, Rational isogenies of prime degree (avec un appendice de D. Goldfeld), Invent. Math. 44 (2) (1978) 129–162.
[5] L. Merel, Bornes pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres, Invent. Math. 124 (1–3) (1996) 437–449.
[6] A. Pál, On the torsion of Drinfeld modules of rank two, 2007, Prépublication, arXiv:0708.4243v4.
[7] B. Poonen, Torsion in rank 1 Drinfeld modules and the uniform boundedness conjecture, Math. Ann. 308 (4) (1997) 571–586.
[8] P. Schneider, Zur Vermutung von Birch und Swinnerton–Dyer über globalen Funktionenkörpern, Math. Ann. 260 (4) (1982) 495–510.
[9] A. Schweizer, On the uniform boundedness conjecture for Drinfeld modules, Math. Z. 244 (3) (2003) 601–614.
[10] J. Teitelbaum, Modular symbols for $\mathbf{F}_q(T)$, Duke Math. J. 68 (2) (1992) 271–295.