Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

ELSEVIER

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 785–790

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Analyse fonctionnelle

# Interpolation avec contraintes sur des ensembles finis du disque

Rachid Zarouf

*Equipe d'analyse et géométrie, Institut de mathématiques de Bordeaux, Université Bordeaux, 351, cours de la Libération, 33405 Talence, France*

Reçu le 4 avril 2009 ; accepté le 9 avril 2009

Disponible sur Internet le 17 mai 2009

Présenté par Gilles Pisier

**Résumé**

Étant donné un ensemble fini $\sigma$ du disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ et une fonction $f$ holomorphe dans $\mathbb{D}$ appartenant à une certaine classe $X$, on cherche $g$ dans une autre classe $Y$ (plus petite que $X$) qui minimise la norme de $g$ dans $Y$ parmi toutes les fonctions $g$ satisfaisant la condition $g_{|\sigma} = f_{|\sigma}$. On montre que dans le cas $Y = H^\infty$, la constante d'interpolation correspondante $c(\sigma, X, H^\infty)$ est majorée par $a\varphi_X(1 - \frac{1-r}{n})$ où $n = \#\sigma$, $r = \max_{\lambda\in\sigma} |\lambda|$ et $\varphi_X(t)$ est la norme de la fonctionnelle d'évaluation $f \mapsto f(\lambda)$, sur l'espace $X$. La majoration est exacte sur l'ensemble des $\sigma$ avec $n$ et $r$ donné. ***Pour citer cet article : R. Zarouf, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***



**Abstract**

**Interpolation with constraints on the finite sets of the disc.** Given a finite set $\sigma$ of the unit disc $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ and a holomorphic function $f$ in $\mathbb{D}$ which belongs to a class $X$, we are looking for a function $g$ in another class $Y$ (smaller than $X$) which minimizes the norm $\|g\|_Y$ among all functions $g$ such that $g_{|\sigma} = f_{|\sigma}$. For $Y = H^\infty$, and for the corresponding interpolation constant $c(\sigma, X, H^\infty)$, we show that $c(\sigma, X, H^\infty) \leqslant a\varphi_X(1 - \frac{1-r}{n})$ where $n = \#\sigma$, $r = \max_{\lambda\in\sigma} |\lambda|$ and where $\varphi_X(t)$ stands for the norm of the evaluation functional $f \mapsto f(\lambda)$ on the space $X$. The upper bound is sharp over sets $\sigma$ with given $n$ and $r$. ***To cite this article: R. Zarouf, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***



## Abridged English version

The problem considered is the following: given $X$ and $Y$ two Banach spaces of holomorphic functions on the unit disc $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$, $X \supset Y$, and a finite set $\sigma \subset \mathbb{D}$, to find the least norm interpolation by functions of the space $Y$ for the traces $f_{|\sigma}$ of functions of the space $X$, in the worst case of $f$.

The classical interpolation problems – those of Nevanlinna–Pick and Carathéodory–Schur (on the one hand) and Carleson's free interpolation (on the other hand) – are of this nature. Two first are "individual", in the sens that one

*Adresse e-mail :* rzarouf@math.u-bordeaux1.fr.

1631-073X/$ – see front matter 
doi:10.1016/j.crma.2009.04.014

looks simply to compute the norms $\|f\|_{H^\infty_{|\sigma}}$ or $\|f\|_{H^\infty/z^nH^\infty}$ for a given $f$, whereas the third one is to compare the norms $\|a\|_{l^\infty(\sigma)} = \max_{\lambda\in\sigma}|a_\lambda|$ and $\inf(\|g\|_\infty\colon\ g(\lambda) = a_\lambda,\ \lambda\in\sigma)$.

Here and everywhere below, $H^\infty$ stands for the space (algebra) of bounded holomorphic functions in the unit disc $\mathbb{D}$ endowed with the norm $\|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}}|f(z)|$. Looking at this comparison problem, say, in the form of computing/estimating the interpolation constant $c(\sigma, X, Y) = \sup_{f\in X,\|f\|_X\leqslant 1}\inf\{\|g\|_Y\colon\ g_{|\sigma} = f_{|\sigma}\}$, which is nothing but the norm of the embedding operator $(X_{|\sigma}, \|\,.\,\|_{X_{|\sigma}}) \to (Y_{|\sigma}, \|\,.\,\|_{Y_{|\sigma}})$, one can think, of course, on passing (after) to the limit – in the case of an infinite sequence $\{\lambda_j\}$ and its finite sections $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ – in order to obtain a Carleson type interpolation theorem $X_{|\sigma} = Y_{|\sigma}$. But not necessarily. In particular, even the classical Pick–Nevanlinna theorem (giving a necessary and sufficient condition on a function $a$ for the existence of $f\in H^\infty$ such that $\|f\|_\infty\leqslant 1$ and $f(\lambda) = a_\lambda$, $\lambda\in\sigma$), does not lead immediately to Carleson's criterion for $H^\infty_{|\sigma} = l^\infty(\sigma)$. (Finally, a direct deduction of Carleson's theorem from Pick's result was done by P. Koosis [10] in 1999 only.) Similarly, the problem stated for $c(\sigma, X, Y)$ is of interest in its own. For this paper, the following question was especially stimulating (which is a part of a more complicated question arising in an applied situation in [2] and [3]): given a set $\sigma\subset\mathbb{D}$, how to estimate $c(\sigma, H^2, H^\infty)$ in terms of $n = \mathrm{card}(\sigma)$ and $\max_{\lambda\in\sigma}|\lambda| = r$ only? ($H^2$ being the standard Hardy space of the disc.)

Here, we consider the case of $H^\infty$ interpolation ($Y = H^\infty$) and the following scales of Banach spaces $X$:

(a) $X = H^p = H^p(\mathbb{D})$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, the standard Hardy spaces on the disc $\mathbb{D}$,

(b) $X = l^2_a(\frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}})$, $\alpha\geqslant 1$, the weighted spaces of all $f(z) = \sum_{k\geqslant 0}\hat{f}(k)z^k$ satisfying $\sum_{k\geqslant 0}|\hat{f}(k)|^2\times\frac{1}{(k+1)^{2(\alpha-1)}} < \infty$.

An equivalent description of this scale of spaces is:

$X = L^2_a((1-|z|^2)^\beta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$, $\beta = 2\alpha - 3 > -1$, the Bergman weighted spaces of holomorphic functions such that $\int_{\mathbb{D}}|f(z)|^2(1-|z|^2)^\beta\,\mathrm{d}A < \infty$.

For the case $\beta = 0$, we shorten the notation to $X = L^2_a$. For these two series of spaces we show $c_1\varphi_X(1-\frac{1-r}{n})\leqslant\sup\{c(\sigma, X, H^\infty)\colon\ \#\sigma\leqslant n, |\lambda|\leqslant r, \lambda\in\sigma\}\leqslant c_2\varphi_X(1-\frac{1-r}{n})$, where $\varphi_X(t)$, $0\leqslant t<1$ stands for the norm of the evaluation functional $f\mapsto f(t)$ on the space $X$.

In order to prove the right hand side inequality, we first use a linear interpolation: $f\mapsto\sum_{k=1}^n\langle f, e_k\rangle e_k$, where $\langle .,.\rangle$ means the Cauchy sesquilinear form $\langle h, g\rangle = \sum_{k\geqslant 0}\hat{h}(k)\overline{\hat{g}(k)}$, and $(e_k)_{k=1}^n$ is the explicitly known Malmquist basis of the space $K_B = H^2\Theta BH^2$, $B = \prod_{i=1}^n b_{\lambda_i}$ being the corresponding Blaschke product, $b_\lambda = \frac{\lambda - z}{1-\bar{\lambda}z}$ (see N. Nikolski [11], p. 117). Next, we use the complex interpolation between Banach spaces (see H. Triebel [14], Theorem 1.9.3, p. 59). Among the technical tools used in order to find an upper bound for $\|\sum_{k=1}^n\langle f, e_k\rangle e_k\|_\infty$ (in terms of $\|f\|_X$), the most important is a Bernstein-type inequality $\|f'\|_p\leqslant c_p\|B'\|_\infty\|f\|_p$ for a (rational) function $f$ in the star-invariant subspace $H^p\cap B\overline{H}^p_0$ generated by a (finite) Blaschke product $B$ (K. Dyakonov [7]). For $p=2$, we give an alternative proof of the Bernstein-type estimate we need.

The lower bound problem is treated by using the "worst" interpolation $n$-tuple $\sigma = \sigma_{\lambda,n} = \{\lambda,\dots,\lambda\}$, a one-point set of multiplicity $n$ (the Carathéodory–Schur type interpolation). The "worst" interpolation data comes from the Dirichlet kernels $\sum_{k=0}^{n-1}z^k$ transplanted from the origin to $\lambda$. We notice that spaces $X$ of (a) and (b) satisfy the condition $X\circ b_\lambda\subset X$ but this is not the case for spaces $X$ described in (c) below for $p\neq 2$, which makes the problem of upper/lower bound more difficult.

Other spaces considered are the following:

$$\text{(c) } X = l^p_a\left(\frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}\right),\quad \alpha\geqslant 1,\ 1\leqslant p\leqslant\infty;\qquad \text{(d) } X = L^p_a\big((1-|z|^2)^\beta\,\mathrm{d}A\big),\quad \beta>-1,\ 1\leqslant p\leqslant 2.$$

For these spaces we also found upper and lower bounds for $c(\sigma, X, H^\infty)$ (sometimes for special sets $\sigma$) but with some gaps between these bounds.

## 1. Introduction

Le problème extremal d'interpolation est le suivant : étant donnés $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ dans $\mathbb{D} = \{z\in\mathbb{C}\colon\ |z|<1\}$, $B = \prod_{i=1}^n b_{\lambda_i}$ où $b_\lambda = \frac{\lambda - z}{1-\bar{\lambda}z}$, et $f\in\mathcal{H}ol(\mathbb{D})$, on cherche à calculer ou estimer $\|f\|_{H^\infty/BH^\infty} = \inf\{\|g\|_\infty\colon\ f-g\in B\mathcal{H}ol(\mathbb{D})\}$. Les problèmes classiques de Nevanlinna–Pick (1916) et de Carathéodory–Schur (1908) (voir [8] et [12] pour ces deux problèmes classiques et pour des références originales), en sont des cas particuliers correspondant respectivement à celui où les $\lambda_j$ sont $n$ points distincts et au cas où $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

### 1.1. Le sujet de cette Note est une version de ce dernier problème

Trouver ou majorer/minorer la norme de la meilleure interpolante $\|f\|_{H^\infty/BH^\infty}$ en fonction de la taille de $f$ mesurée dans un espace de Banach $X$ de fonctions holomorphes dans $\mathbb{D}$, c'est à dire $\|f\|_X$. De façon plus précise, il s'agit de calculer ou majorer/minorer les constantes

$$c(\sigma, X, Y) = \sup_{f\in X,\, \|f\|_X\leqslant 1} \inf\bigl\{\|g\|_Y\colon\ g_{|\sigma} = f_{|\sigma}\bigr\}, \quad \text{et}$$
$$C_{n,r}(X, Y) = \sup\bigl\{c(\sigma, X, Y)\colon\ \#\sigma \leqslant n,\ \forall j = 1\dots n,\ |\lambda_j| \leqslant r\bigr\},$$

lorsque $Y = H^\infty$, $r \in [0, 1[$ et $n \geqslant 1$. Nous pouvons néanmoins faire quelques commentaires sur la constante $c(\sigma, X, Y)$ lorsque $Y$ est, comme $X$, un espace de Banach de fonctions holomorphes (inclus dans $X$).

### 1.2. Motivations pour ce problème

(a) Le point de départ est une partie d'une question posée par Laurent Baratchart (communication orale) et provenant d'un problème d'approximation appliquée (voir [2] et [3]) : trouver une estimation de $c(\sigma, H^2, H^\infty)$ en fonction de $\mathrm{card}(\sigma) = \deg(B)$ et de $\max_{\lambda\in\sigma}|\lambda| = r$.

Parmi d'autres résultats, voici ci-dessous la réponse obtenue :

$$\left(\frac{\frac{1}{32}n}{1-r}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_{n,r}\bigl(H^2, H^\infty\bigr) \leqslant \left(\frac{2n}{1-r}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(b) D'autre part, le problème de calculer/estimer $c(\sigma, X, Y)$ peut être vu comme une *interpolation intermédiaire* entre celle dite de Carleson et l'interpolation individuelle de Nevanlinna–Pick.

(c) On trouve une autre motivation pour l'estimation de la constante $c(\sigma, X, Y)$ dans le calcul matriciel où on s'interesse à la norme du calcul fonctionnel : trouver $C > 0$ optimale telle que si $A$ est une matrice $n \times n$ vérifiant $\sigma(A) \subset \sigma \subset \mathbb{D}$, telle que $\|A\|_{E\to E} \leqslant 1$ par rapport à une certaine norme sur $\mathbb{C}^n$, $E = (\mathbb{C}^n, |\,.\,|)$, $\|f(A)\| \leqslant C\|f\|_\infty$, pour tout polynôme analytique $f$. Il est facile de voir que $C = c(\sigma, H^\infty, W_a)$, où $W_a$ est l'algèbre de Wiener des séries de Taylor absolument convergentes. Notons l'apparition d'un cas intéressant pour $f \in H^\infty$ telle que $f_{|\sigma} = \frac{1}{z}{}_{|\sigma}$ (estimation du conditionnement et des normes d'inverses des matrices $n \times n$) ou telle que $f_{|\sigma} = \frac{1}{\lambda - z}{}_{|\sigma}$ (pour l' estimation de la norme de la résolvante d'une matrice $n \times n$).

Un résultat de N. Nikolski (voir [13]) nous garanti que $c(\sigma, X, W_a)$ est majoré par $9n.c(\sigma, X, H^\infty)$ pour tout espace de Banach $X$ de fonctions holomorphes dans $\mathbb{D}$ et que cette majoration est exacte (sur $X$ et $\sigma$, $\#\sigma \leqslant n$) à une constante numérique près.

### 1.3. Les espaces considérés

(a) $X = H^p = H^p(\mathbb{D})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, les espaces de Hardy du disque $\mathbb{D}$,

(b) $X = l^2_a(\alpha) := l^2_a(\frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}})$, $\alpha \geqslant 1$, l'espace à poids des fonctions $f(z) = \sum_{k\geqslant 0} \hat{f}(k)z^k$ vérifiant

$$\sum_{k\geqslant 0} \bigl|\hat{f}(k)\bigr|^2 \frac{1}{(k+1)^{2(\alpha-1)}} < \infty\ ;$$

une description équivalente de cette même série d'espaces est :

$X = L^2_a(\beta) := L^2_a((1 - |z|^2)^\beta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$, $\beta = 2\alpha - 3 > -1$, l'espace de Bergman à poids des fonctions holomorphes $f$ telles que

$$\int_{\mathbb{D}} \bigl|f(z)\bigr|^2 \bigl(1 - |z|^2\bigr)^\beta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \infty.$$

Pour $\beta = 0$, on raccourcit la notation, $X = L^2_a$.

(c) On va un peu plus loin en considérant :

$$X = l_a^p(\alpha) := l_a^p\left(\frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}\right),\ \alpha \geqslant 1,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty,$$
$$\text{puis } X = L_a^p(\beta) := L_a^p\big(\big(1-|z|^2\big)^{\beta}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\big),\ \beta > -1,\ 1 \leqslant p \leqslant 2.$$

## 2. Ce qui est montré

Nous commençons par étudier le cas d'espaces de Banach généraux $X$ et $Y$ verifiant les propriétés naturelles suivantes :

$$\text{pour tout } \epsilon > 0, \mathcal{H}ol\big((1+\epsilon)\mathbb{D}\big)\text{est continument inclus dans } Y, \tag{$P_1$}$$

$$Pol_+ \subset X \text{ et } Pol_+ \text{ est dense dans } X, \tag{$P_2$}$$

où $Pol_+$ désigne l'espace des polynômes analytiques à coefficients complexes $p$, $p(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k$,

$$[f \in X] \Rightarrow \big[z^n f \in X, \forall n \geqslant 0 \text{ and } \overline{\lim}\|z^n f\|^{\frac{1}{n}} \leqslant 1\big], \tag{$P_3$}$$

$$\big[f \in X, \lambda \in \mathbb{D}, \text{and } f(\lambda) = 0\big] \Rightarrow \left[\frac{f}{z-\lambda} \in X\right]. \tag{$P_4$}$$

**Lemme 0.** *Soient $X, Y$ deux espaces de Banach vérifiant les propriétés $(P_i)$, $i = 1, \ldots, 4$. Pour tout $n \geqslant 1$, $r \in [0, 1)$, on a $C_{n,r}(X, Y) < \infty$.*

Puis, en étudiant le cas particulier où $Y = H^\infty$ et où $X$ parcourt les espaces décrits en A.(3)-(a) et A.(3)-(b), nous obtenons des majorations/minorations du type

$$c_1\varphi_X\left(1-\frac{1-r}{n}\right) \leqslant C_{n,r}\big(X, H^\infty\big) \leqslant c_2\varphi_X\left(1-\frac{1-r}{n}\right),$$

où $\varphi_X(t)$, $0 \leqslant t < 1$ est la norme de la fonctionnelle d'évaluation $f \mapsto f(t)$ sur l'espace $X$.

Plus précisément, en ce qui concerne les espaces de Hardy $H^p$ du A.(3)-(a), on obtient le théorème suivant.

**Théorème 1.** *Soit $p \in 2\mathbb{Z}_+$. Il existe une constante $A_p$ dépendant de $p$ uniquement telle que pour tout $n \geqslant 1$, $r \in [0, 1)$,*

$$\frac{1}{32^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{n}{1-r}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C_{n,r}\big(H^p, H^\infty\big) \leqslant A_p\left(\frac{n}{1-r}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

*De plus, la majoration est vraie pour tout réel $p$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$.*

Quant au cas des espaces à poids (où de façon équivalente celui des espaces de Bergman à poids radial) du A.(3)-(b), $X = l_a^2(\alpha) = L_a^2(2\alpha - 3)$, on obtient l'encadrement suivant.

**Théorème 2.** *Soit $\alpha \geqslant 1$ tel que $2\alpha - 1$ soit entier. Il existe des constantes $a$ et $A$ telles que pour tout $n \geqslant 1$, $r \in [0, 1)$,*

$$a\left(\frac{n}{1-r}\right)^{\frac{2\alpha-1}{2}} \leqslant C_{n,r}\big(l_a^2(\alpha), H^\infty\big) \leqslant A\left(\frac{n}{1-r}\right)^{\frac{2\alpha-1}{2}},$$

*où les constantes $a$ et $A$ sont telles que $a \asymp \frac{1}{2^{3N}(2N)!}$ et $A \asymp N^{2N}$, $N$ étant la partie entière de $\alpha$. De plus, la majoration est vraie pour tout réel $\alpha \geqslant 1$. (La notation $x \asymp y$ signifie qu'il existe des constantes numériques $c_1, c_2 > 0$ telles que $c_1 y \leqslant x \leqslant c_2 y$.)*

Enfin, en ce qui concerne le cas des espaces $X$ du A.(3)-(c), les résultats obtenus sont plus faibles et ne répondent pas, comme c'était le cas précédemment, à la conjecture faisant intervenir $\varphi_X$ définie ci-dessus. Nous donnons néanmoins des majorations/minorations pour la quantité $c(\sigma, X, H^\infty)$, parfois pour des $\sigma$ spécifiques et avec des écarts entre les bornes intervenant dans ces encadrements.

**Théorème 3.** (1) *Soit $\alpha \geqslant 1$ et $X = l_a^p(\alpha)$. Pour $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, il existe une minoration de $C_{n,r}(X, H^\infty)$ de l'ordre de $1/(1-r)^{\alpha-1/p}$. Pour $1 \leqslant p \leqslant 2$ (resp. $2 \leqslant p \leqslant +\infty$), il existe une majoration de $C_{n,r}(X, H^\infty)$ de l'ordre de $(\frac{n}{1-r})^{\alpha-1/2}$ (resp. de l'ordre de $(\frac{n}{1-r})^{\alpha+1/2-2/p}$).*

(2) *Soient $\lambda \in \mathbb{D}$, $\beta > -1$, $1 \leqslant p \leqslant 2$ et $X = L_a^p(\beta)$. Alors il existe une majoration de $c(\sigma_{\lambda,n}, X, H^\infty)$ de l'ordre de $(\frac{n}{1-|\lambda|})^{(\beta+2)/p}$.*

## 3. Les moyens pour montrer cela

### *3.1. Majorations*

(i) Nous avons choisi d'utiliser une interpolation linéaire $T : f \mapsto \sum_{k=1}^n \langle f, e_k \rangle e_k$, où $\langle .,. \rangle$ est la forme sesquilinéaire de Cauchy $\langle h, g \rangle = \sum_{k \geqslant 0} \hat{h}(k) \overline{\hat{g}(k)}$, et $(e_k)_{k=1}^n$ est la base de l'espace $K_B = H^2 \Theta B H^2$, dite de Malmquist, connue de façon explicite (voir N. Nikolski [12], p. 117). Ce choix est justifié par le fait que si $X = H^2$, l'opérateur $T$ coïncide avec la projection orthogonale de $H^2$ sur $H^2 \Theta B H^2$. Nous conserverons ce choix même dans le cas plus général où $X = H$ est un espace de Hilbert différent de $H^2$, car pour ce type d'espace la projection orthogonale de $H$ sur $H \Theta B H$ demeure implicite. D'autre part, si $X$ n'est pas un espace de Hilbert, trouver la "meilleure" interpolante de $f$ est encore moins clair, il y aura donc un prix à payer relativement à notre choix. A ce propos, en général la vraie interpolation optimale est non-linéaire, voir S.A. Vinogradov [15] pour les détails.

(ii) Pour le cas A.(3)-(a) (Théorème 1) avec $p = 2$, on profite du fait que $e_k \in \mathcal{H}ol(|z| < \frac{1}{r})$ où $r = \max_{\lambda \in \sigma} |\lambda|$ pour majorer $\|g\|_\infty$. Pour généraliser au cas $p \geqslant 1$ quelconque on utilise un résultat d'interpolation de P. Jones notamment que $[H^1, H^\infty]_\theta = H^p$, voir [9].

Pour le cas A.(3)-(b) (Théorème 2), on utilise les points ci-après.

(iii) Pour $X = l_a^2(N+1)$, on fait apparaître la quantité $\|g^{(N)}\|_{H^2}$ (qui est comparable à $\|g\|_{X^\star}$) que l'on majore en fonction de $\|f\|_{H^2}$ à l'aide d'une inégalité type Bernstein sur les fonctions rationelles à pôles dans ${}^c\overline{\mathbb{D}}$, que l'on montrera. Plus précisément, on démontrera le lemme suivant, qui est un analogue pour le disque d'un résultat de K. Dyakonov démontré dans le demi-plan, voir [7].

**Lemme 1.** *Soit $g \in K_B =: H^2 \Theta B H^2$. Alors*

$$\|g'\|_{H^2} \leqslant \frac{5}{2} \frac{n}{1-r} \|g\|_{H^2},$$

*où comme toujours, $r = \max_{\lambda \in \sigma} |\lambda|$. Par récurrence,*

$$\|g^{(k)}\|_{H^2} \leqslant k! \left(\frac{5}{2}\right)^k \left(\frac{n}{1-r}\right)^k \|g\|_{H^2},$$

*pour tout $k = 0, 1, \ldots$.*

Notre preuve est différente de celle de M. Dyakonov et elle donne en particulier une constante $(5/2)$ plus petite. En général, on notera que les inégalités type Bernstein ont déjà fait l'objet de nombreuses publications. Entre autres, le chapitre 7 du livre de P. Borwein et T. Erdélyi, voir [5], y est consacré. C'est aussi le cas de la thèse de A. Baranov, voir [1], et de l'ouvrage de R.A. DeVore and G.G. Lorentz, voir [6].

(iv) Enfin, comme en (ii), on interpole entre $l_a^2(N)$ et $l_a^2(N+1)$ (interpolation classique complexe entre espaces de Banach, voir [14] ou [4]).

(v) Pour traiter le cas A.(3)-(c), on fait de même qu'en (iv) mais entre $l_a^{p_1}(\alpha)$ et $l_a^{p_2}(\alpha)$, puis entre $L_a^{p_1}(\beta)$ et $L_a^{p_2}(\beta)$.

### *3.2. Minorations*

On se rend compte, grâce l'interpolation de Carleson, que la séquence la "pire" est probablement $\sigma = \sigma_{\lambda,n} = \{\lambda, \ldots, \lambda\}$ ($n$ fois). En effet, dans ce cas la constante de Carleson explose et, au travers de la majoration (qui est vraie pour toute séquence $\sigma$ de $\mathbb{D}$),

$$c(\sigma, X, H^\infty) \leqslant C_I(\sigma) \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \|\varphi_{\lambda_i}\|,$$

où $\varphi_\lambda(f) = f(\lambda)$ et

$$C_I(\sigma) = \sup_{\|a\|_{l^\infty} \leqslant 1} \inf\bigl(\| g \|_\infty \colon\ g \in H^\infty,\, g_{|\sigma} = a\bigr),$$

est la constante de Carleson relative à $\sigma$, on comprend que pour $\sigma$ ayant une constante d'interpolation $C_I(\sigma)$ "raisonnable", la quantité $c(\sigma, X, H^\infty)$ se comporte comme $\max_i \|\varphi_{\lambda_i}\|$. En revanche, pour des sequences $\sigma$ "serrées", la constante $C_I(\sigma)$ peut être si grande que la dernière majoration peut en devenir très grossière.

(i) On remarque d'abord que

$$c\bigl(\sigma_{0,n}, H^2, H^\infty\bigr) \geqslant \frac{1}{\|p_n\|_{H^2}} \|p_n \star K_n\|_\infty \geqslant \frac{1}{\sqrt{n-1}} (p_n \star K_n)(1) \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{n},$$

où $K_n$ désigne le noyau de Fejer d'ordre $n$, et $p_n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$.

(ii) Le cas $c(\sigma_{0,n}, X, H^\infty)$ pour $X$ espace de Hilbert du A.(3)-(b) se traite de la même façon, en remplaçant $p_n$ par une puissance de $p_n$.

(iii) La minoration de $c(\sigma_{\lambda,n}, H^2, H^\infty)$ se "déduit" de (ii) en considérant, au lieu de la fonction $p_n = \sum_{k=0}^{n-1} z^k$, une fonction construite à partir de $p_n \circ b_\lambda$, ou plus simplement $p_n \circ b_r$, $0 \leqslant r < 1$ puisque les normes considérées sont invariantes par rotation. On prouve ainsi la minoration du Théorème 1 pour $p = 2$.

(iv) Encore une fois, le cas $c(\sigma_{\lambda,n}, X, H^\infty)$ pour $X$ espace de Hilbert du A.(3)-(b) se traite comme en (iii), en remplaçant $p_n$ par une puissance de $p_n$. L'observation principale réside dans le fait que $X = l_a^2(\alpha) = \varphi(H^2) = H(\varphi \circ K)$ dans le sens d'Aronszajn–de Branges (voir [12], p. 320, point $(k)$ de l'Exercice 6.5.2), avec $\varphi(z) = z^{2\alpha-1}$ et $K(\lambda, z) = k_\lambda(z) = \frac{1}{1-\bar{\lambda}z}$. En particulier, on utilise l'inégalité suivante, vraie pour tout $f \in H^2$ : $\|\varphi \circ f\|_X^2 \leqslant \varphi(\|f\|_2^2)$.

Il est bon de noter que l'opérateur de composition par $b_\lambda$ stabilise les espaces du A.(3)-(a) et du A.(3)-(b) mais qu'en revanche ce n'est pas le cas pour les espaces $l_a^p(\alpha)$ pour $p \neq 2$ ce qui rend le problème de minoration mais aussi de majoration plus difficile.

(v) Enfin, pour montrer la minoration du Théorème 3, on utilise simplement que $C_{n,r}(X, H^\infty) \geqslant \|\psi_r\|_X$, où $\psi_r(f) = f(r)$. (Mais la minoration ainsi obtenue n'est pas optimale.)

## Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement le Professeur Nikolai Nikolski pour son aide inestimable.

## Références

[1] A. Baranov, Inégalités de Bernstein dans les espaces modèles et applications, Thèse soutenue à l'université de Bordeaux 1, 2005.
[2] L. Baratchart, Rational and meromorphic approximation in Lp of the circle: system – theoretic motivations, critical points and error rates, Computational Methods and Function Theory, vol. 11, World Scientific Publish. Co, 1999, pp. 45–78.
[3] L. Baratchart, F. Wielonsky, Rational approximation problem in the real Hardy space $H_2$ and Stieltjes integrals: a uniqueness theorem, Constr. Approx. 9 (1993) 1–21.
[4] J. Bergh, J. Löfström, Interpolation Spaces. An Introduction, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1976.
[5] P. Borwein, T. Erdélyi, Polynomials and Polynomial Inequalities, Springer, New York, 1995.
[6] R.A. DeVore, G.G. Lorentz, Constructive Approximation, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
[7] K. Dyakonov, Differentiation in Star-Invariant Subspaces I. Boundedness and Compactness, J. Funct. Anal. 192 (2002) 364–386.
[8] J. Garnett, Bounded Analytic Functions, Academic Press, New York, 1981.
[9] P.W. Jones, $L^\infty$ estimates for the $\bar{\partial}$ problem in the half plane, Acta Math. 150 (1983) 137–152.
[10] P. Koosis, Carleson's interpolation theorem deduced from a result of Pick, in: V. Havin, N. Nikolski (Eds.), Complex Analysis, Operators, and Related Topics, in: Oper. Theory Adv. Appl., vol. 113, Birkhäuser, Basel, 2000, pp. 151–162.
[11] N. Nikolski, Treatise on the Shift Operator, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
[12] N. Nikolski, Operators, Function, and Systems: An Easy Reading, vol. 1, AMS, Providence, 2002.
[13] N. Nikolski, Condition numbers of large matrices and analytic capacities, St. Petersburg Math. J. 17 (2006) 641–682.
[14] H. Triebel, Interpolation Theory, Functions Spaces, Differential Operators, North-Holland Pub. Comp., Amsterdam, New York, Oxford, 1978.
[15] S.A. Vinogradov, Some remarks on free interpolation by bounded and slowly growing analytic functions, Zapiski Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov (LOMI) 126 (1983) 35–46 (in Russian); Engl. translation: Math. Sci. 27 (1) (1984) 2450–2458.