Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 599–602

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Algèbre homologique/Topologie

Résolution de certains modules instables et fonction de partition de Minc

Nguyen Dang Ho Hai [a], Lionel Schwartz [a], Tran Ngoc Nam [b]

[a] *Université Paris 13, LAGA, UMR 7539 du CNRS, 93430 Villetaneuse, France*
[b] *Université nationale du Vietnam, collège des sciences, Hanoi, Vietnam*

Reçu le 8 janvier 2009 ; accepté après révision le 2 avril 2009

Disponible sur Internet le 28 avril 2009

Présenté par Christophe Soulé

Résumé

On construit une résolution injective minimale, dans la catégorie $\mathcal{U}$ des modules instables sur l'algèbre de Steenrod, de certains modules instables qui sont cohomologie modulo 2 de certains spectres de Thom. Les termes de la résolution sont des produits tensoriels de modules de Brown–Gitler $J(k)$ et de modules de Steinberg L_n introduits par S. Mitchell et S. Priddy. Un résultat combinatoire de G. Andrews calculant la fonction de partition de Minc montre que la somme alternée des séries de Poincaré des modules considérées est nulle. On donne des conséquences homotopiques de ce résultat. ***Pour citer cet article : D.H.H. Nguyen et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

Resolutions of certain unstable modules and Minc's partition function. One constructs minimal injective resolutions for certain unstable modules that appear to be the mod 2 cohomology of Thom spectra. The terms of the resolution are tensor products of Brown–Gitler modules and Steinberg modules introduced by S. Mitchell and S. Priddy. A combinatorial result of Andrews shows that the alternating sum of the Poincaré series of the considered modules is zero. One gives homotopical applications of this result. ***To cite this article: D.H.H. Nguyen et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

1. Introduction

La fonction de partition de Minc $\nu(n)$ est définie comme le nombre de représentations de l'entier n en somme d'entiers $c_i : n = c_1 + \cdots + c_m$ avec $c_1 = 1$, $c_{i+1} \leqslant 2c_i$, $0 \leqslant i \leqslant m-1$. On note $\nu(m,n)$ le nombre des solutions pour lesquelles $c_m \neq 0$. On pose $\mu_m(q) = \sum_n \ \nu(m,n)q^n$. Dans [1] G. Andrews montre que :

$$q^{2^m-1}\ell_m(q) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \ell_{m-i}(q)\mu_i(q)$$

Adresses e-mail : nguyen@math.univ-paris13.fr (D.H.H. Nguyen), schwartz@math.univ-paris13.fr (L. Schwartz), tran@math.univ-paris13.fr (N.N. Tran).

1631-073X/$ – see front matter © 2009 Publié par Elsevier Masson SAS pour l'Académie des sciences.
doi:10.1016/j.crma.2009.04.009

avec

$$\ell_m(q) = \frac{q^{(2-1)+(2^2-1)+\cdots+(2^m-1)}}{(1-q^{2-1})(1-q^{2^2-1})\dots(1-q^{2^m-1})}.$$

Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre de Steenrod modulo 2 et soit $\mathcal{U}$ la catégorie des modules instables sur $\mathcal{A}$. Les séries formelles qui apparaissent ci-dessus sont séries de Poincaré de modules instables : à droite celles de produit tensoriel de modules de Steinberg L_{m-i} et de Brown–Gitler $J(2^i-1)$ qui sont des modules instables injectifs. Le terme de gauche est la série de Poincaré d'un sous-module L'_n de L_n. Ceci suggère la construction d'une résolution injective pour L'_n. En fait on a

Théorème 1.1. *Pour tout $n \geqslant 1$, il existe une résolution injective minimale de L'_n dans $\mathcal{U}$ de la forme*

$$\{0\} \to L'_n \to L_n \to L_{n-1} \otimes J(1) \to \cdots \to L_{n-i} \otimes J(2^i-1) \to \cdots \to J(2^n-1) \to \{0\}.$$

On se sert de cette résolution et des techniques de [6] pour calculer les groupes d'extension $\operatorname{Ext}_{\mathcal{A}}^{s,t}(\mathbb{Z}/2, L'_n)$ pour $n \geqslant 2$. Le cas $n=1$ est particulier, un résultat analogue a lieu.

Proposition 1.2. *Supposons $n \geqslant 2$. Si l'on a $(s,t) \notin \{(n, 1-2^n), (n+1, 1-2^{n-1})\}$, alors les groupes $\operatorname{Ext}_{\mathcal{A}}^{s,t}(\mathbb{Z}/2, L'_n)$ sont nuls si $t-s \leqslant -2^{n-1}-n$ ou si $t \leqslant 1-2^{n-1}$. Si $(s,t) \in \{(n, 1-2^n), (n+1, 1-2^{n-1})\}$, alors on a $\operatorname{Ext}_{\mathcal{A}}^{s,t}(\mathbb{Z}/2, L'_n) = \mathbb{Z}/2$.*

Le module de Brown–Gitler $J(k)$ [9] est caractérisé par l'équivalence naturelle des foncteurs $M \mapsto \operatorname{Hom}_{\mathcal{U}}(M, J(k))$ dans $M \mapsto (M^k)^*$; $J(k)$ est injectif dans $\mathcal{U}$.

Lemme 1.3. *(Voir [9].) La série de Poincaré de $J(2^i-1)$ est égale à μ_i.*

Soit $\mathrm{GL}_n := \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_2)$ le groupe linéaire sur $\mathbb{F}_2$. L'algèbre polynomiale graduée $\mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_n]$, $|x_i| = 1$, est isomorphe à la cohomologie $H^*(B(\mathbb{Z}/2)^n; \mathbb{F}_2)$ qui est un module instable sur l'algèbre de Steenrod $\mathcal{A}$ et un module sur l'algèbre de groupe $\mathbb{F}_2[\mathrm{GL}_n]$. De plus, les deux actions commutent l'une à l'autre.

L'idempotent de Steinberg [10] ϵ_n de $\mathbb{F}_2[\mathrm{GL}_n]$ est défini par la formule $\epsilon_n = \bar{B}_n \bar{\Sigma}_n$. Ici $\bar{B}_n$ (resp. $\bar{\Sigma}_n$) désigne la somme de tous les éléments du sous-groupe B_n des matrices triangulaires supérieures de GL_n (resp. du sous-groupe Σ_n des matrices de permutations). Le module de Steinberg [8] est alors défini dans $\mathcal{U}$ par $M_n := \epsilon_n \mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_n]$. Par construction, M_n est facteur direct de $\mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_n]$. D'après le théorème de Carlsson–Miller [7] c'est donc un objet injectif dans $\mathcal{U}$. Cette version de M_n n'est pas invariante par le groupe symétrique Σ_n mais par le groupe de Borel B_n (voir la Prop. 2.6 dans [8]).

L'algèbre de Dickson $D(n)$ est la sous-algèbre des invariants sous l'action de GL_n sur $\mathbb{F}_2[x_1, \dots, x_n]$, il est clair que M_n est un module sur $D(n)$. On note ω_n l'invariant de Dickson de plus haut degré (le produit de toutes les formes linéaires non nulles en les x_i, $|\omega_n| = 2^n-1$) et on pose $L_n = \omega_n M_n$; L_n est un sous-module instable de M_n.

Proposition 1.4. *(Voir [8,3].) Il y a un isomorphisme uniquement déterminé dans $\mathcal{U}$: $M_n \cong L_n \oplus L_{n-1}$. De plus la série de Poincaré de L_n est égale à $\ell_n(q)$.*

La série formelle $\ell_h(q)\mu_k(q)$ est donc la série de Poincaré de $L_h \otimes J(2^k-1)$ qui est un objet injectif indécomposable de $\mathcal{U}$ [5,4]. Soit maintenant $L'_n = \omega_n^2 M_n$, c'est un sous-module instable de M_n. Dans [8] M_n est introduit comme cohomologie du facteur stable de $B(\mathbb{Z}/2)^n$ déterminé par l'idempotent de Steinberg ϵ_n. Soit $\widetilde{reg}_n$ le fibré vectoriel réel de base $B(\mathbb{Z}/2)^n$ associé à la représentation régulière réduite de $(\mathbb{Z}/2)^n$, ω_n est la classe d'Euler de ce fibré. Le module instable L_n (resp. L'_n) s'interprète alors comme cohomologie du facteur stable, noté $\boldsymbol{L}(n)$ (resp. $\boldsymbol{L}'(n)$), déterminé par ϵ_n, de l'espace de Thom du fibré $\widetilde{reg}_n$ (resp. $2\,\widetilde{reg}_n$) [11]. On a alors le résultat suivant de type « conjecture de Segal » :

Théorème 1.5. *Supposons $n \geqslant 2$. Si l'on a $n + 2^{n-1} < k < n + 2^n - 1$ ou $k > n + 2^n - 1$, alors les groupes de cohomotopie stable $\pi_S^k(\boldsymbol{L}'(n))$ sont nuls. Si l'on a $k = n + 2^{n-1}$ ou $k = n + 2^n - 1$, alors on a $\pi_S^k(\boldsymbol{L}'(n)) = \mathbb{Z}/2$.*

Remarque 1.6. La question de la réalisation topologique de la résolution du Théorème 1.1 sera étudiée ailleurs.

2. Construction de la résolution

On note $\bar{H}$ la cohomologie réduite $\bar{H}^*(B\mathbb{Z}/2;\mathbb{F}_2)$ et π_i, $i \geqslant 1$, l'unique morphisme $\bar{H} \to J(2^i)$. On définit d'abord des morphismes $d^{s,n}: L_{n-s+1} \otimes J(2^{s-1}-1) \to L_{n-s} \otimes J(2^s-1)$. Pour $1 \leqslant s \leqslant n$, on note $\tilde{d}^{s,n}$ la flèche pointillée dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\bar{H}^{\otimes n-s+1} \otimes J(2^{s-1}-1) \arrow[r, "\epsilon_{n-s}\otimes \mathrm{Id}"] \arrow[d, dotted, "\tilde{d}^{s,n}"'] & \bar{H}^{\otimes n-s} \otimes \bar{H} \otimes J(2^{s-1}-1) \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\pi_{s-1}\otimes\mathrm{Id}"] \\
\bar{H}^{\otimes n-s} \otimes J(2^s-1) & \bar{H}^{\otimes n-s} \otimes J(2^{s-1}) \otimes J(2^{s-1}-1). \arrow[l, "\mathrm{Id}\otimes\mu"']
\end{tikzcd}$$

Ici $\mu : J(a) \otimes J(b) \to J(a+b)$ désigne la multiplication des modules de Brown–Giler. On vérifie facilement que $\tilde{d}^{s,n}$ envoie $L_{n-s+1} \otimes J(2^{s-1}-1)$ dans $L_{n-s} \otimes J(2^s-1)$, définissant $d^{s,n}$.

Proposition 2.1. $d^{s+1,n} \circ d^{s,n} = 0$ *pour* $1 \leqslant s \leqslant n-1$.

La démonstration de cette proposition repose sur l'analyse du cas de L_2. La base comme $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel gradué du facteur L_2 donnée dans [8] est constituée par les éléments :

$$r_{a,b} = \bar{B}_2 \mathrm{Sq}^{a+1}\mathrm{Sq}^{b+1}\bigl(x_1^{-1}x_2^{-1}\bigr)$$

avec $a > 2b > 0$. On obtient $r_{a,b} = x_1^a x_2^a (x_1+x_2)^a((x_1+x_2)^{a-2b} + x_2^{a-2b})$. Il est alors aisé de vérifier :

Lemme 2.2. *Si $a > 2b > 0$ et $a+b = 2^i + 2^{i-1}$, l'expression de $r_{a,b}$ comme somme de monômes distincts ne contient pas $x_1^{2^i}x_2^{2^{i-1}}$. Par conséquent, la composée $L_2 \hookrightarrow \bar{H} \otimes \bar{H} \xrightarrow{\pi_i\otimes\pi_{i-1}} J(2^i) \otimes J(2^{i-1}) \xrightarrow{\mu} J(2^i + 2^{i-1})$ est nulle pour tout $i \geqslant 1$.*

La Proposition 2.1 résulte alors de ce que $d^{s+1,n} \circ d^{s,n}$ se factorise comme suit :

$$\begin{tikzcd}
L_{n-s+1} \otimes J(2^{s-1}-1) \arrow[r, "\epsilon_2'\otimes \mathrm{Id}"] \arrow[dd, "d^{s+1,n}\circ d^{s,n}"] & \bar{H}^{\otimes n-s-1} \otimes L_2 \otimes J(2^{s-1}-1) \arrow[d, hook] \\
 & \bar{H}^{\otimes n-s-1} \otimes \bar{H} \otimes \bar{H} \otimes J(2^{s-1}-1) \arrow[d, "\epsilon_{n-s}\otimes\pi_s\otimes\pi_{s-1}\otimes\mathrm{Id}"] \\
L_{n-s-1} \otimes J(2^{s+1}-1) & L_{n-s-1} \otimes J(2^s) \otimes J(2^{s-1}) \otimes J(2^{s-1}-1). \arrow[l, "\mathrm{Id}\otimes\mu"']
\end{tikzcd}$$

Ci-dessus l'idempotent ϵ_2 agit sur les deux dernières variables, définissant le morphisme ϵ_2'.

Le pas essentiel pour démontrer l'exactitude du complexe dans le Théorème 1.1 est donné dans la section suivante.

3. Une présentation de $J(2^k-1)$

Dans cette section on donne une description de $J(2^k-1)$ comme quotient de l'idéal $\bar{H}^{\otimes k} = (x_1 \cdots x_k)$ dans $\mathbb{F}_2[x_1,\dots,x_k]$. On désignera par $MP(i)$ le sous-module $\bar{H}^{\otimes i-1} \otimes L_2 \otimes \bar{H}^{\otimes k-i-1}$, $1 \leqslant i \leqslant k-1$, et par $MP(k)$ le sous-module $\bar{H}^{\otimes k-1} \otimes L_1'$. On considère la flèche composée suivante :

$$g_k : \bar{H}^{\otimes k} \xrightarrow{\pi_{k-1}\otimes\cdots\otimes\pi_0} J(2^{k-1}) \otimes \cdots \otimes J(1) \xrightarrow{\mu} J(2^k-1)$$

où μ est l'unique application non-triviale. Par 2.2 et le fait que $\pi_0(L_1')$ est trivial, le noyau de g_k contient la somme $MP(1) + \cdots + MP(k)$. Alors

Théorème 3.1. *L'application g_k est surjective et induit un isomorphisme de modules instables*

$$\frac{\bar{H}^{\otimes k}}{MP(1)+\cdots+MP(k)} \cong J\bigl(2^k-1\bigr).$$

La difficulté essentielle est la surjectivité de g_k. Comme il est facile de montrer que la dimension du module de gauche, en tout degré, est inférieure ou égale à celle du module de droite, on peut conclure.

La démonstration de la surjectivité procède en deux étapes. On démontre d'abord qu'il existe un morphisme surjectif de $H^{\otimes k}$ vers $J(2^k-1)$. Pour ce faire on utilise la description de Miller [7] de la somme directe J_*^* des $J(\ell)$ comme l'algèbre polynomiale $\mathbb{F}_2[\hat{t}_i, i \geqslant 0]$: $\mathrm{Sq}^1(\hat{t}_i) = \hat{t}_{i-1}^2$ avec $\hat{t}_{-1} = 0$ et la formule de Cartan. Ici $\hat{t}_i \in J(2^i)^1$ est de bidegré $(1, 2^i)$. Le module de Brown–Gitler $J(\ell)$ est alors le sous-espace engendré par les monômes de second degré ℓ. On utilise aussi un théorème de Campbell et Selick [2] identifiant $H^{\otimes k}$ comme *module instable* avec l'algèbre polynomiale $\mathbb{F}_2[t_0, \dots, t_{k-1}]$, munie d'une $\mathcal{A}$-action tordue donnée par : $\mathrm{Sq}^1(t_i) = t_{i-1}^2$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $\mathrm{Sq}^1(t_0) = t_{k-1}^2$ et la formule de Cartan. A nouveau t_i est de bidegré $(1, 2^i)$. Campbell et Selick montrent également que $H^{\otimes k}$ admet comme facteur direct un sous-module que l'on note $H(2^k-1)$, qui est engendré par les monômes dont le second degré est divisible par 2^k-1. On considère alors la surjection évidente qui envoie $H(2^k-1)$ sur $J(2^k-1)$. On obtient donc un épimorphisme de $H^{\otimes k}$ sur $J(2^k-1)$.

Dans la seconde étape on considère V_k un espace vectoriel de dimension k. On montre que

Lemme 3.2. *Le* $\mathbb{F}_2[\mathrm{End}(V_k)]$*-module* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{U}}(H^*(V_k), J(2^k-1)) \cong H_{2^k-1}(V_k)$ *est engendré par* g_k.

Ce lemme est dû au troisième auteur. La surjectivité de g_k est alors évidente.

L'ensemble de ces résultats s'étendent au cas $p > 2$, et seront étudiés ailleurs par le premier auteur.

Remerciements

Les auteurs remercient le PICS Formath Vietnam du CNRS qui leur a permis de se rencontrer tant à Hanoi qu'à Paris.

Références

[1] G. Andrews, The Rogers–Ramanujan reciprocal and Minc's partition function, Pacific J. Math. 95 (1981) 251–256.

[2] H.E.A. Campbell, P.S. Selick, Polynomial algebras over the Steenrod algebra, Comment. Math. Helv. 65 (1990) 171–180.

[3] N.J. Kuhn, The rigidity of $L(n)$, in: Algebraic Topology, Seattle, Wash., 1985, in: Lecture Notes in Math., vol. 1286, Springer, Berlin, 1987, pp. 286–292.

[4] J. Lannes, L. Schwartz, Sur la structure des $\mathcal{A}$-modules instables injectifs, Topology 28 (1989) 153–169.

[5] J. Lannes, S. Zarati, Sur les $\mathcal{U}$-injectifs, Ann. Sci. École Norm. Sup. 19 (1986) 1–31.

[6] J. Lannes, S. Zarati, Sur les foncteurs dérivés de la déstabilisation, Math. Z. 194 (1986) 25–59.

[7] H.R. Miller, The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces, Ann. of Math. 120 (1984) 39–87.

[8] S.A. Mitchell, S.B. Priddy, Stable splittings derived from the Steinberg module, Topology 22 (1983) 253–298.

[9] L. Schwartz, Unstable Modules Over the Steenrod Algebra and Sullivan's Fixed Point Set Conjecture, in: Chicago Lectures in Math., 1994.

[10] R. Steinberg, Prime power representations of finite linear groups II, Canad. J. Math. 18 (1956) 580–591.

[11] S. Takayasu, On stable summands of Thom spectra of $B(\mathbb{Z}/2)^n$ associated to Steinberg modules, J. Math. Kyoto Univ. 39 (2) (1999) 377–398.