Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 603–608
COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE

Analyse mathématique

Transformée en échelle de signaux stationnaires

Daniel Alpay [a,1], Mamadou Mboup [b,c]

[a] *Department of Mathematics, Ben Gurion University of the Negev, Israel*
[b] *UFR Mathématiques et Informatique, CRIP5, Université Paris Descartes, 45, rue des Saints-Pères, 75270 Paris cedex 06, France*
[c] *EPI ALIEN, INRIA*

Reçu le 12 mars 2009 ; accepté le 31 mars 2009

Disponible sur Internet le 28 avril 2009

Présenté par Jean-Pierre Kahane

Résumé

Utilisant la notion de transformée en échelle d'un signal à temps discret, nous définissons une nouvelle famille de systèmes linéaires. Nous considérons un cas particulier, lié à la théorie des fonctions dans le bidisque. ***Pour citer cet article : D. Alpay, M. Mboup, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

Scale transform of discrete stationary signals. Using the scale transform of a discrete time signal we define a new family of linear systems. We focus on a particular case related to function theory in the bidisk. ***To cite this article: D. Alpay, M. Mboup, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abridged English version

A wide class of causal discrete time-invariant linear systems can be given in terms of convolution in the form

$$y_n = \sum_{m=0}^{n} h_{n-m} u_m, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

where (h_n) is the impulse response and where the input sequence (u_m) and output sequence (y_m) are requested to belong to some pre-assigned sequences spaces. The $\mathcal{Z}$ transform of the sequence (h_n), that is $\hat{h}(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n h_n$, is called the *transfer function* of the system, and there are deep relationships between properties of $\hat{h}$ and of the system; see [1] for a survey. Analogs of systems of the form (1) when both h_n and u_n are Gaussian random variables, which belong to the white noise space, or more generally to the Kondratiev space (see [7] for the latter), have been studied recently in [3]. The pointwise product $h_{n-m}u_m$ in (1) is then replaced by the Wick product (this allows in particular to have a Gaussian output). In view of Eqs. (4) and (5) below, it is well to recall that the Wick product is a convolution

Adresses e-mail : dany@math.bgu.ac.il (D. Alpay), Mamadou.Mboup@mi.parisdescartes.fr (M. Mboup).
[1] Earl Katz Chair in Algebraic System Theory.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.03.030

when expressed in terms of the Hermite functions. See [7, Definition 2.4.1 p. 39] and [3]. Using the Hermite transform, one can define a generalized transfer function, which is a function analytic in ζ and in a countable number of other variables (these variables take into account the randomness). In the present note we look at an extension of (1) in a different direction, and develop a new approach to discrete-time systems with a (multi) scale-invariant property. We use the results presented in [10]. Let $f \in \mathbf{L}_1(\mathbb{R}_+)$ (that is, a continuous time signal), with Laplace transform $F(s)$, $\Re(s) \geqslant 0$. For every $\alpha = 1/\beta > 0$, the Laplace transform of $f(\beta t)$ is $\sqrt{\alpha}F(\alpha s)$. Therefore, time scaling has the same form in the frequency domain. This remark is the starting point to define the scaling operator for discrete signals. Begin with $G_\theta(s) = \frac{e^{i\theta}-s}{e^{-i\theta}+s}$, $|\theta| < \frac{\pi}{2}$, which maps conformally the open right half-plane $\mathbb{C}_+$ onto the open unit disk $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z| < 1\}$. Then, the scale shift $S_\alpha(s) = \alpha s, \alpha > 0$ expresses in the unit disc as the hyperbolic transformation $\gamma_{\{\alpha\}} = G_\theta \circ S_\alpha \circ G_\theta^{-1}$. Conversely, for each hyperbolic transformation $\gamma(z) = \frac{\gamma_1 z+\gamma_2}{\bar{\gamma}_2 z+\bar{\gamma}_1}$, we may find $\alpha_\gamma > 0$, θ_γ and ξ_γ such that $e^{i\xi_\gamma}\gamma(z) = (G_{\theta_\gamma} \circ S_{\alpha_\gamma} \circ G_{\theta_\gamma}^{-1})(e^{i\xi_\gamma}z)$. Therefore, we define below the discrete-time frequency domain scale shift by the action of the (hyperbolic) group of automorphisms of $\mathbb{D}$. We denote this group by Γ_0. Let $X(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n\zeta^n$, which we assume convergent in a neighborhood of the origin. The scale $\alpha = \alpha_\gamma$ shift of the sequence $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ is the sequence $\{x_n(\gamma)\}_{n\geqslant 0}$ defined by the equation

$$X_\gamma(\zeta) = \frac{1}{\bar{\gamma}_2 z + \bar{\gamma}_1} X\bigl(\gamma(\zeta)\bigr) = \sum_{n\geqslant 0} x_n(\gamma)\zeta^n. \tag{2}$$

It is useful to note that the operator $\{x_n\}_{n\geqslant 0} \mapsto \{x_n(\gamma)\}_{n\geqslant 0},\ \gamma \in \Gamma_0$ is an isometry in ℓ_2 and it also makes sense for vector-valued signals. In particular, $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ may be a second order stochastic process. In this paper we focus on the case when one considers a cyclic subgroup of infinite order of Γ_0. Another case of interest is when one considers a Fuchsian group of Widom type. This case is related to self-similar systems, and will be discussed in a separate publication.

1. Signaux et systèmes temps-échelle

Étant donné un signal discret $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$, ses transformées en échelles $\gamma \in \Gamma_0$ définissent un signal bidimensionnel $\{x_n(\gamma)\}_{n\geqslant 0,\ \gamma\in\Gamma}$. Dans la suite, nous considérons le sous groupe cyclique Γ de Γ_0, engendré par γ_0. Soit $\widehat{\Gamma}$ le groupe dual de Γ i.e. le groupe des caractères unimodulaires de Γ et $\mathrm{d}\mu$ sa mesure de Haar. On rappelle qu'un caractère de Γ est une application $\sigma : \Gamma \to \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$ satisfaisant :

$$\sigma(\gamma \circ \varphi) = \sigma(\gamma)\sigma(\varphi), \quad \forall \gamma, \varphi \in \Gamma.$$

Pour un n fixé, notons $\{x(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$ le signal correspondant, défini sur Γ. Si $\{x(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma} \in \ell_1$, alors sa transformée de Fourier est donnée par

$$\hat{x}(\sigma) = \sum_{\gamma\in\Gamma} x(\gamma)\sigma(\gamma)^*, \quad \sigma \in \widehat{\Gamma},$$

dont l'inverse est (voir par exemple [6])

$$x(\gamma) = \int_{\widehat{\Gamma}} \hat{x}(\sigma)\sigma(\gamma)\,\mathrm{d}\mu(\sigma).$$

On interprète cette transformée de Fourier en termes de spectre du signal $\{x(\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$. Comme pour le filtrage temporel, on définit le filtrage sur Γ, dans le domaine fréquentiel par la mutiplication par une transformée de Fourier $\hat{h}(\sigma)$: $\hat{y}(\sigma) = \hat{h}(\sigma)\hat{x}(\sigma)$. Ceci correspond dans le domaine des échelles, Γ, au produit de convolution :

$$y(\gamma) = \sum_{\varphi\in\Gamma} h(\varphi)x\bigl(\gamma \circ \varphi^{-1}\bigr) = (h \star x)(\gamma). \tag{3}$$

Les systèmes que nous considérons sont définis par une double convolution :

$$y_n = \sum_{m=0}^{n} h_{n-m} \star x_m, \tag{4}$$

c'est-à-dire,

$$y_n(\gamma) = \sum_{m=0}^{n} \left(\sum_{\varphi \in \Gamma} h_{n-m}\big(\gamma \circ \varphi^{-1}\big) x_m(\varphi) \right). \tag{5}$$

La première convolution prend en compte l'invariance dans le temps, tandis que la seconde prend en compte l'échelle. Un phénomème analogue apparaît dans [3].

En prenant la transformée en $\mathcal{Z}$ par rapport au temps et la transformée de Fourier par rapport aux échelles, nous obtenons

$$Y(\zeta, \sigma) = H(\zeta, \sigma) X(\zeta, \sigma) \tag{6}$$

où $H(\zeta, \sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \widehat{h_n}(\sigma)$.

2. Lien avec le problème des moments trigonométriques

Dans cette section nous associons à la fonction $H(\zeta, \sigma)$ ci-dessus une fonction analytique dans le bidisque. Puisque Γ est cyclique, chaque élément est de la forme

$$\gamma = \gamma_0^m, \quad m \in \mathbb{Z}, \text{ avec } \gamma_0^m \stackrel{\triangle}{=} \underbrace{\tilde{\gamma}_0 \circ \cdots \circ \tilde{\gamma}_0}_{m \text{ fois}} \text{ où } \tilde{\gamma}_0 = \gamma_0 \text{ si } m \geqslant 0 \text{ et } \tilde{\gamma}_0 = \gamma_0^{-1} \text{ si } m < 0.$$

Théorème 2.1. *Il existe une mesure positive finie* $\mathrm{d}\nu(\theta)$ *sur* $[0, 2\pi)$ *telle que*

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \sigma\big(\gamma_0^m\big) \, \mathrm{d}\mu(\sigma) = \int_0^{2\pi} e^{im\theta} \, \mathrm{d}\nu(\theta), \quad m \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Preuve. Soit $t_m = \int_{\widehat{\Gamma}} \sigma(\gamma_0^m)^* \, \mathrm{d}\mu(\sigma)$, $m \in \mathbb{Z}$. Puisque $|\sigma(\gamma_0)| = 1$ pour tout $\sigma \in \widehat{\Gamma}$ nous avons

$$t_{\ell - m} = \int_{\widehat{\Gamma}} \sigma\big(\gamma_0^\ell\big)^* \big(\sigma\big(\gamma_0^m\big)\big) \, \mathrm{d}\mu(\sigma) = \big\langle \sigma\big(\gamma_0^m\big), \sigma\big(\gamma_0^\ell\big) \big\rangle_{\mathbf{L}_2(\mathrm{d}\mu)}.$$

Les matrices de Toeplitz

$$T_N = (t_{\ell - m})_{\ell, m = 0, \ldots, N}, \quad N = 0, 1, \ldots$$

sont toutes non négatives. Le théorème des moments trigonométriques (voir par exemple [8, Theorem 2.7 p. 66]) implique qu'il existe une mesure positive unique $\mathrm{d}\nu$ telle que

$$t_m = \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} \, \mathrm{d}\nu(\theta), \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

et nous obtenons (7). □

Par analogie avec le cas de l'espace du bruit blanc (voir [4,7,9]), nous appellerons *tranformation de Hermite* l'application linéaire

$$\mathbf{I}\big(\sigma\big(\gamma_0^m\big)\big) = z^m, \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{9}$$

de $\mathbf{L}_2(\mathrm{d}\mu)$ dans $\mathbf{L}_2(\mathrm{d}\nu)$. Cette application est une isométrie en vertu de (7), et elle vérifie

$$\mathbf{I}(\hat{x}\hat{y}) = \mathbf{I}(\hat{x})\mathbf{I}(\hat{y})$$

pour $\hat{x}$ et $\hat{y}$ dans $\mathbf{L}_1(\mathrm{d}\mu)$. Grâce à cette application, nous introduisons la définition :

Définition 2.1. La fonction

$$\mathcal{H}(\zeta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \mathbf{I}(\widehat{h_n})(z) \tag{10}$$

est appelée fonction de transfert du système (4).

Des théorèmes de stabilité pour le système peuvent être donnés en termes de cette fonction : voir la section 3. Un cas important est lorsque $\mathcal{H}$ est rationnelle par rapport à la variable ζ.

3. Théorèmes de stabilité

Soit $\mathbf{H}_2(\mathrm{d}\mu)$ la fermeture dans $\mathbf{L}_2(\mathrm{d}\mu)$ des fonctions $\sigma(\gamma_0^n)$, $n = 0, 1, \ldots$. Un signal causal est par définition une suite $(u_n(\gamma))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que,

$$\widehat{u_n} \in \mathbf{H}_2(\mathrm{d}\mu), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Le fait de se restreindre à $n \geqslant 0$ correspond au *zooming*. Le phénomène de dilatation serait traduit par les $n < 0$.

Le système (4) est BIBO (*bounded input bounded output*) si il existe un nombre $M > 0$ tel que,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\widehat{y_n}\|_{\mathbf{L}_2(\mathrm{d}\mu)} \leqslant M \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\widehat{u_n}\|_{\mathbf{H}_2(\mathrm{d}\mu)}$$

pour tous les signaux (u_n) tels que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\widehat{u_n}\|_{\mathbf{H}_2(\mathrm{d}\mu)} < \infty$. Il est *dissipatif* si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\widehat{y_n}\|^2_{\mathbf{H}_2(\mathrm{d}\mu)} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|\widehat{u_n}\|^2_{\mathbf{H}_2(\mathrm{d}\mu)}$$

pour tous les signaux causaux (x_n) tels que le membre de droite de cette inégalité est fini. Le système sera appelé ℓ_1–ℓ_2 borné si il existe $M > 0$ tel que

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \|\widehat{y_n}\|^2_{\mathbf{H}_2(\mathrm{d}\mu)}\right)^{1/2} \leqslant M \sum_{n=0}^{\infty} \|\widehat{u_n}\|_{\mathbf{H}_2(\mathrm{d}\mu)}.$$

Ces définitions se réduisent aux définitions classiques (voir [5]) lorsque Γ est trivial. Nous présentons maintenant la caractérisation de ces systèmes.

Soit $h \in \mathbf{H}_2(\mathrm{d}\mu)$. Nous définissons l'opérateur de multiplication

$$T_h : x \mapsto h \star x.$$

Supposons T_h continu. Utilisant la transformation de Hermite, nous voyons que T_h est unitairement équivalent à l'opérateur de multiplication par $\mathbf{I}(h)$ dans l'espace $\mathbf{L}_2(\mathrm{d}\nu)$.

Théorème 3.1. *Il existe $M < \infty$ tel que*

$$\sup_{n} \|\widehat{y_n}\|_{\mathbf{L}_2(\mathrm{d}\mu)} \leqslant M \sup_{n} \|\widehat{u_n}\|_{\mathbf{L}_2(\mathrm{d}\mu)} \tag{11}$$

si et seulement si les opérateurs T_{h_n} sont continus et la condition suivante est remplie : *pour tout $v \in \mathbf{H}_2(\mathrm{d}\mu)$ tel que $\|v\|_{\mathbf{H}_2(\mathrm{d}\mu)} \leqslant 1$,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| T^*_{h_n} v \right\|_{\mathbf{H}_2(\mathrm{d}\mu)} \leqslant M. \tag{12}$$

Nous remarquons que la condition

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|T_{h_n}\| \leqslant M$$

implique (12).

Supposons que $\mathbf{H}_2(\mathrm{d}\nu) \subsetneq \mathbf{L}_2(\mathrm{d}\nu)$. L'espace $\mathbf{H}_2(\mathrm{d}\nu)$ est alors un espace à noyau reproduisant, dont le noyau peut être calculé utilisant les méthodes de [2]. Nous désignons ce noyau reproduisant par $K_\nu(z,w)$.

Théorème 3.2. *Le système* (4) *est dissipatif si et seulement si la fonction* $\mathcal{H}(\zeta,z)$ *est telle que le noyau*

$$\frac{1-\mathcal{H}(\zeta,z)\mathcal{H}(\eta,w)^*}{1-\zeta\eta^*}K_\nu(z,w)$$

est positif dans le bidisque.

Théorème 3.3. *Le système* (4) *est* ℓ_1*–*ℓ_2 *borné si et seulement si la fonction* $\mathcal{H}(\zeta,z)$ *est telle que le noyau*

$$\frac{K_\nu(z,w)}{1-\zeta\eta^*}-\mathcal{H}(\zeta,z)\mathcal{H}(\eta,w)^*$$

est positif dans le bidisque.

Ces théorèmes sont démontrés de manière analogue aux théorèmes dans [3]. Nous terminons cette section par deux remarques. Nous notons que l'espace à noyau reproduisant de noyau $\frac{K_\nu(z,w)}{1-\zeta\eta^*}$ est le produit tensoriel $\mathbf{H}_2(\mathrm{d}\nu)\otimes\mathbf{H}_2(\mathbb{D})$ (où $\mathbf{H}_2(\mathbb{D})$ dénote l'espace de Hardy du disque d'ordre 2). Définissons

$$\varphi(z)=\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,\mathrm{d}\nu(\theta),\qquad z\in\mathbb{D}.$$

Rappelons que le noyau

$$\frac{\varphi(z)+\varphi(w)^*}{1-zw^*}$$

est positif dans le disque unité ; soit $\mathcal{L}_+(\varphi)$ l'espace à noyau reproduisant associé. L'application qui à $f\in\mathbf{H}_2(\mathrm{d}\nu)$ associe la fonction

$$F(z)=\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{i\theta})\,\mathrm{d}\nu(\theta)}{e^{i\theta}-z}$$

est unitaire de l'espace $\mathbf{H}_2(\mathrm{d}\nu)$ sur $\mathcal{L}_+(\varphi)$. Ce dernier espace a été introduit par de Branges. Voir [1] et [2] pour plus de détails.

4. Le cas du polydisque

Dans cette section nous considérons le cas plus général où Γ possède un nombre fini de générateurs, que nous dénoterons par $\gamma_0,\dots,\gamma_p$. Il existe une mesure $\mathrm{d}\nu$ positive sur $\mathbb{T}^{p+1}$ telle que

$$\int_{\widehat{\Gamma}}\sigma(\gamma_0)^{n_0}\cdots\sigma(\gamma_p)^{n_p}\,\mathrm{d}\mu(\sigma)=\int_{\mathbb{T}^{p+1}}e^{i\theta_0n_0}\cdots e^{i\theta_pn_p}\,\mathrm{d}\nu(\theta_0,\dots,\theta_p),\quad n_0,\dots,n_p\in\mathbb{N}.\tag{13}$$

La preuve de ce résultat nous a été communiquée par M. Putinar, et est comme suit : utilisant les notations (avec $m=(m_0,\dots,m_p)$ et $n=(n_0,\dots,n_p)$ dans $\mathbb{N}^{p+1}$),

$$z^m=z_0^{m_0}\cdots z_p^{m_p}\quad\text{et}\quad z^{*n}=\left(z_0^*\right)^{n_0}\cdots\left(z_p^*\right)^{n_p},$$

on définit une forme linéaire L par

$$L\left(z^mz^{*n}\right)=\int_{\widehat{\Gamma}}\sigma(\gamma_0)^{m_0-n_0}\cdots\sigma(\gamma_p)^{m_p-n_p}\,\mathrm{d}\mu(\sigma),$$

et on montre que pour tout polynôme $p(z,z^*)$,

$$L\left(\left|p(z,z^*)\right|^2\right) \geqslant 0, \quad \text{et} \quad L\left(\left(1-|z_j|^2\right)p(z,z^*)\right)=0, \quad j=0,\ldots,p.$$

Voir [11]. La transformée de Hermite est maintenant une fonction de $p+1$ variables complexes $z_0,\ldots,z_p$, et on peut énoncer des théorèmes de stabilité analogues à ceux de la section 3.

Remerciements

Nous remercions Mihai Putinar pour la preuve de l'existence de la mesure dν dans (13).

Références

[1] D. Alpay, Algorithme de Schur, espaces à noyau reproduisant et théorie des systèmes, Panoramas et Synthèses, vol. 6, Société Mathématique de France, Paris, 1998.
[2] D. Alpay, H. Dym, Hilbert spaces of analytic functions, inverse scattering and operator models, I, Integral Equations Operator Theory 7 (1984) 589–641.
[3] D. Alpay, D. Levanony, Linear stochastic systems: a white noise approach, Acta Appl. Math. (2009), doi:10.1007/s10440-009-9461-1. Published online: 12 February 2009.
[4] F. Biagini, B. Øksendal, A. Sulem, N. Wallner, An introduction to white-noise theory and Malliavin calculus for fractional Brownian motion, stochastic analysis with applications to mathematical finance, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 460 (2041) (2004) 347–372.
[5] J. Doyle, B. Francis, A. Tannenbaum, Feedback Control Theory, Macmillan Publishing Company, New York, 1992.
[6] E. Hewitt, K.A. Ross, Abstract Harmonic Analysis, vol. I/II, Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1963/1970.
[7] H. Holden, B. Øksendal, J. Ubøe, T. Zhang, Stochastic Partial Differential Equations, Probability and its Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1996.
[8] M.G. Kreĭn, A.A. Nudelman, The Markov Moment Problem and Extremal Problems, Translations of Mathematical Monographs, vol. 50, American Mathematical Society, Providence, RI, 1977.
[9] H.-H. Kuo, White Noise Distribution Theory, Probability and Stochastics Series, CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.
[10] M. Mboup, A character-automorphic Hardy spaces approach to discrete-time scale-invariant systems, in: Proceedings of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Kyoto, Japan, July 24–28, 2006, pp. 183–188.
[11] M. Putinar, Positive polynomials on compact semi-algebraic sets, Indiana Univ. Math. J. 42 (1993) 969–984.