Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 701–704
Comptes Rendus Mathematique

Théorie des jeux

Une preuve alternative de l'existence d'un équilibre de Nash dans les jeux discontinus

Jean-Marc Bonnisseau [a], Pascal Gourdel [a], Hakim Hammami [b,a]

[a] *École d'économie de Paris, Université de Paris 1 Panthéon-Sorbonne, CNRS, centre d'économie de la Sorbonne, 106, boulevard de l'hôpital, 75647 Paris cedex 13, France*

[b] *École polytechnique de Tunisie, B.P. 743, 2078 La Marsa, Tunis, Tunisie*

Reçu le 28 octobre 2007 ; accepté après révision le 24 mars 2009

Disponible sur Internet le 23 avril 2009

Présenté par Pierre-Louis Lions

Résumé

Nous présentons un théorème d'existence d'équilibre de Nash pour un jeu discontinu et dans un espace vectoriel topologique. On utilise une hypothèse de meilleure réponse sécurisée plus forte que celle de Reny. Si la fonction de paiement est semi-continue supérieurement, les deux hypothèses de meilleure réponse sécurisée coïncident. Notre preuve est simple, indépendante et basée sur une version du théorème de Fan–Browder d'existence d'élément maximal dû à Deguire et Lassonde, dont nous démontrons une extension au cas des espaces non séparés. ***Pour citer cet article : J.-M. Bonnisseau et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

Existence of the Nash equilibrium in discontinuous games. This Note presents a theorem of the existence of the Nash equilibrium for discontinuous games in a topological vector space. We will use an assumption of better reply secure which is stronger then that of Reny. If the payoff function is upper semi-continuous, the two assumptions coincide. Our proof is simple, independent and based on a version of Fan–Browder theorem of existence of maximal element due to Deguire and Lassonde, which is extended to the non-Hausdorf case. ***To cite this article: J.-M. Bonnisseau et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Soit E un espace vectoriel topologique et $I=\{1,\dots,N\}$. On considère un jeu G à N joueurs, chaque joueur $i\in I$ possède un ensemble de stratégie X_i, sous ensemble non vide compact[1] de E, et une fonction de paiement bornée u_i de X dans $\mathbb{R}$ où $X=\prod_{i=1}^{N}X_i$. Sous ces conditions G est appelé un jeu compact. On note $u:X\to\mathbb{R}^N$ le vecteur des fonctions de paiement défini par $u(x)=(u_1(x),\dots,u_N(x))$,

Adresses e-mail : Jean-Marc.Bonnisseau@univ-paris1.fr (J.-M. Bonnisseau), pascal.gourdel@univ-paris1.fr (P. Gourdel), hakimunivparis1@yahoo.fr (H. Hammami).

[1] Avec l'utilisation du terme compact pour les ensembles K vérifiant la propriété : de tout recouvrement ouvert de K, on peut extraire un sous recouvrement fini de K.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.03.024

$$X_{-i} = \prod_{j\neq i, j=1}^{N} X_j \quad \text{et} \quad x_{-i} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N) \in X_{-i}.$$

Si les X_i sont convexes pour tout i et $u_i(., x_{-i})$ est quasiconcave sur X_i pour tout $x_{-i} \in X_{-i}$, on dit que le jeu $G = (X_i, u_i)_{i=1}^N$ est quasiconcave.

Définition 1. Un joueur i peut sécuriser le paiement α en $x_{-i} \in X_{-i}$ (ou par abus de langage en $x \in X$) s'il existe $\overline{x}_i \in X_i$ et un voisinage U de x_{-i} telle que $u_i(\overline{x}_i, x'_{-i}) \geqslant \alpha$, pour tout $x'_{-i} \in U$.

Définition 2. Un jeu $G = (X, u)$ est "à meilleure réponse sécurisée" si pour tout x^* de X tel que x^* n'est pas un équilibre de Nash, il existe un joueur i qui peut sécuriser en x^*_{-i} un paiement strictement supérieur à $u_i^{**}(x^*) = \limsup_{z\to x^*} u_i(z)$.

Remarque 1. Dans [6], la notion utilisée "à meilleure réponse sécurisée" est basée sur le couple (x^*, u^*) dans Γ qui est la fermeture du graphe de u. Mais $(x^*, (\limsup_{x\to x^*} u_i(x))_{i\in I})$ n'appartient pas nécessairement à Γ donc la définition de [6] est moins exigeante que la Définition 2.

Dans le cas où les fonctions de paiement sont continues, semi-continues supérieurement ou pseudocontinuous au sens de Morgan–Scalzo [4], les deux définitions coïncident. On peut maintenant énoncer le résultat fondamental d'existence.

Théorème 1. *Pour tout jeu $G = (X, u)$ compact, quasiconcave et à meilleure réponse sécurisée, il existe un équilibre de Nash.*

La preuve de Reny [6] repose sur une technique de discrétisation de l'ensemble des stratégies X et sur un lemme d'approximation de la régularisation des fonctions de paiement par une suite de fonctions continues. Reny montre l'existence d'un équilibre de Nash à l'aide d'un passage à la limite sur une suite d'équilibres de Nash des jeux continus approchant le jeu initial. Bich [2] a donné récemment une démonstration plus directe mais nécessitant néanmoins une étape de discrétisation puis de passage à la limite. Notre théorème est plus faible que celui de Reny mais la preuve est significativement plus simple. On peut remarquer que dans le deuxième exemple de Reny [6], consacré à l'existence d'équilibre de Walras dans une économie d'échange, la fonction de paiement est semi-continue supérieurement, donc cet exemple rentre dans le champ d'application de notre théorème.

Démonstration du Théorème 1.

Pour démontrer le Théorème 1, on considère les fonctions $\underline{u}_i$ et u^{**} et on démontre certaines de leurs propriétés. Soit $x \in X$, on note $\mathcal{V}(x_{-i})$ l'ensemble des voisinages de x_{-i} et on pose

$$\underline{u}_i(x_i, x_{-i}) = \sup_{U\in\mathcal{V}(x_{-i})} \inf_{x'_{-i}\in U} u_i(x_i, x'_{-i}) = \liminf_{x'_{-i}\to x_{-i}} u_i(x_i, x'_{-i}), \tag{1}$$

$$u_i^{**}(x^*) = \limsup_{z\to x^*} u_i(z). \tag{2}$$

Lemme 1. a) *Pour tout $x_i \in X_i$, la fonction $\underline{u}_i(x_i, .) : X_{-i} \to \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement.*
b) *Pour tout $x_{-i} \in X_{-i}$, la fonction $\underline{u}_i(., x_{-i}) : X_i \to \mathbb{R}$ est quasiconcave.*
c) *La fonction u^{**} est s.c.s. sur X.*

Démonstration. a) D'après (1), la fonction $\underline{u}_i(x_i, .) : X_{-i} \to \mathbb{R}$ est la régularisée s.c.i. de la fonction $u_i(x_i, .)$. C'est la plus grande fonction s.c.i. qui minore $u_i(x_i, .)$ (voir par exemple [1], paragraphe 4.2, page 18).

b) Soit $x^*_{-i} \in X_{-i}$ et $c \in \mathbb{R}$, montrons que $\{y_i \in X_i \mid \underline{u}_i(y_i, x^*_{-i}) > c\}$ est un ensemble convexe.
Soit $\xi_i \in \{y_i \in X_i \mid \underline{u}_i(y_i, x^*_{-i}) > c\}$, $\zeta_i \in \{y_i \in X_i \mid \underline{u}_i(y_i, x^*_{-i}) > c\}$ et $\lambda \in [0, 1]$. Montrons que : $\underline{u}_i(\lambda\xi_i + (1 - \lambda)\zeta_i, x^*_{-i}) > c$. Par définition de la s.c.i., il existe U (respectivement V) voisinage de x^*_{-i} tels que $\inf_{x'_{-i}\in U} u_i(\xi_i, x'_{-i}) > c$, (respectivement $\inf_{x'_{-i}\in V} u_i(\zeta_i, x'_{-i}) > c$).

On considère le voisinage $W = U \cap V$ de x^*_{-i}. Pour tout $x'_{-i} \in W$,

$$u_i\big(\lambda\xi_i + (1-\lambda)\zeta_i, x'_{-i}\big) \geqslant \min\big\{u_i(\xi_i, x'_{-i}), u_i(\zeta_i, x'_{-i})\big\}$$

donc, en passant à la borne inférieure

$$\inf_{x'_{-i}\in W} u_i\big(\lambda\xi_i + (1-\lambda)\zeta_i, x'_{-i}\big) \geqslant \min\Big\{\inf_{x'_{-i}\in W} u_i(\xi_i, x'_{-i}), \inf_{x'_{-i}\in W} u_i(\zeta_i, x'_{-i})\Big\} > c.$$

c) Pour tout $i \in I$, la fonction u_i^{**} est la régularisée s.c.s. de la fonction u_i. C'est la plus petite fonction s.c.s. qui majore u_i. □

Lemme 2. *Un joueur i peut sécuriser un paiement strictement supérieur à $\alpha \in \mathbb{R}$ en $x^*_{-i} \in X_{-i}$ si et seulement si* $\sup_{x_i\in X_i} \underline{u}_i(x_i, x^*_{-i}) > \alpha$.

Démonstration. D'après la Définition 1, un joueur i peut sécuriser un paiement strictement supérieur à $\alpha \in \mathbb{R}$ en $x^*_{-i} \in X$ si (et seulement si) il existe $\beta > \alpha$, $\bar{x}_i \in X_i$ et $U \in \mathcal{V}(x^*_{-i})$ tel que $u_i(\bar{x}_i, x'_{-i}) \geqslant \beta$ pour tout $x'_{-i} \in U$. Ceci est équivalent au fait qu'il existe $\beta > \alpha$ et $\bar{x}_i \in X_i$ tel que $\sup_{U\in\mathcal{V}(x^*_{-i})} \inf_{x'_{-i}\in U} u_i(\bar{x}_i, x'_{-i}) \geqslant \beta$. Autrement dit, il existe $\beta > \alpha$ tel que $\sup_{x_i\in X_i} \underline{u}_i(x_i, x^*{}_{-i}) \geqslant \beta > \alpha$. □

Lemme 3. *Soit G un jeu à meilleure réponse sécurisée. S'il existe $x^* \in X$ tel que pour tout $i \in I$, on a* $\sup_{x_i\in X_i} \underline{u}_i(x_i, x^*_{-i}) \leqslant u_i{}^{**}(x^*)$ *alors x^* est un équilibre de Nash.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que x^* n'est pas un équilibre de Nash. D'après la Définition 2, il existe un joueur i qui peut sécuriser un paiement strictement supérieur à $u_i{}^{**}(x^*)$ en x^*_{-i}. D'après le Lemme 2 $\sup_{x_i\in X_i} \underline{u}_i(x_i, x^*_{-i}) > u_i{}^{**}(x^*)$, d'où la contradiction. □

Soit pour tout $i \in I$, la correspondance F_i sur X par $F_i(x) = \{\xi_i \in X_i \mid \underline{u}_i(\xi_i, x_{-i}) > u_i{}^{**}(x)\}$.

Lemme 4. *Pour tout $i \in I$, la correspondance F_i est à valeur convexe et à image inverse ouverte.*

Démonstration. a) F_i est à valeur convexe car d'après le Lemme 1 (b), pour tout $x_i \in X_i$, la fonction $\xi_i \to \underline{u}_i(\xi_i, x_{-i})$ est quasiconcave.

b) Montrons que la correspondance F_i est à image inverse ouverte, c'est à dire que pour tout $\xi_i \in X_i$, l'ensemble $\{x \in X \mid \xi_i \in F_i(x)\}$ est un ouvert. On remarque tout d'abord que

$$\big\{x \in X \mid \xi_i \in F_i(x)\big\} = \big\{x \in X \mid u_i{}^{**}(x) < \underline{u}_i(\xi_i, x_{-i})\big\} = \big\{x \in X \mid 0 < \underline{u}_i(\xi_i, x_{-i}) - u_i{}^{**}(x)\big\}.$$

Pour tout $i \in I$ et pour un ξ_i fixé, on pose $h_i(x) = \underline{u}_i(\xi_i, x_{-i})$. D'après le Lemme 1, la fonction h_i (respectivement $u_i{}^{**}$) est s.c.i. (respectivement s.c.s.) donc la fonction $g_i(x) = h_i(x) - u_i{}^{**}(x)$ est s.c.i. Par suite $\{x \in X \mid \xi_i \in F_i(x)\} = \{x \in X \mid 0 < g_i(x)\}$ est un ensemble ouvert. □

Nous allons maintenant appliquer le théorème ci-dessous à la famille de correspondances $(F_i)_{i\in I}$.

Théorème 2 *(Fan–Browder compétitif). Soit E un espace vectoriel topologique et J un ensemble quelconque d'indices, on suppose que pour tout $i \in J$:*

(1) *X_i est un sous ensemble convexe compact non vide de E.*
(2) *$F_i : X = \prod_{i\in J} X_i \to X_i$ est une correspondance à valeurs convexes et à image inverse ouverte.*

Alors l'une des alternatives suivantes est vérifiée :

(A) *Il existe $i \in J$ et $x^* \in X$ tel que $x_i^* \in F_i(x^*)$.*
(B) *Il existe $x^* \in X$ tel que pour tout $i \in J$, $F_i(x^*) = \emptyset$.*

Remarque 2. Lorsque E est séparé, le résultat est une application directe du théorème 3a de [3]. Nous donnons ci-dessous la démonstration de l'extension au cas où E n'est pas séparé en nous ramenant par quotient à un espace vectoriel topologique séparé.

La famille de correspondance F_i vérifie donc les hypothèses du Théorème 2 mais de plus, on peut remarquer que pour tout $i \in I$ et pour tout $x \in X$, on a $u_i{}^{**}(x) \geqslant u_i(x)$. Par conséquent, chacune des correspondances F_i est irréflexive : pour tout $x \in X$, $x_i \notin F_i(x)$, ce qui exclut l'alternative (A) du Théorème 2. En appliquant le théorème de Fan–Browder compétitif, il existe $\bar{x} \in X$ tel que pour tout $i \in I$, $F_i(\bar{x}) = \emptyset$, donc pour tout $i \in I$ et $\xi_i \in X_i$, $\underline{u}_i(\xi_i, \bar{x}_{-i}) \leqslant u_i{}^{**}(\bar{x})$. Par conséquent $\sup_{\xi_i \in X_i} \underline{u}_i(\xi_i, \bar{x}_{-i}) \leqslant u_i{}^{**}(\bar{x})$, $\forall i \in I$, ce qui implique d'après le Lemme 3 que $\bar{x}$ est un équilibre de Nash. $\square$

Démonstration du Théorème 2. Si E est un espace vectoriel topologique non séparé, l'ensemble H défini par $H = \bigcap_{V \in \mathcal{V}_E(0)} V$ est un sous espace vectoriel de E et l'espace quotient $\tilde{E} = E_{/H}$ est un espace vectoriel topologique séparé pour la topologie quotient (voir par exemple [5], chapitre 4). De plus, la projection $\pi : E \to \tilde{E}$ est linéaire, continue et ouverte. Enfin, pour tout ouvert U de E, $U + H = U$. On considère la projection de E^J dans $(\tilde{E})^J$ définie par $p(x) = p((x_i)_{i \in J}) = (\pi(x_i)_{i \in J})$. En munissant E^J, respectivement $\tilde{E}^J$ des topologies produit respectives, on déduit des propriétés de π que p est également linéaire, continue et ouverte. De même, si U est un ouvert de E^J alors, $U + H^J = U$. Si x et x' sont deux points de X tels que $p(x) = p(x')$ alors pour tout i dans J, $F_i(x) = F_i(x')$ car F_i est à image inverse ouverte et $U + H^J = U$ pour tout ouvert U de E^J. On pose $Y_i = \pi(X_i)$ qui est un sous ensemble convexe compact non vide de $\tilde{E}$ car l'application π est linéaire et continue. On considère $Y = \prod_{i \in J} Y_i$ qui s'écrit également $Y = p(X)$. Pour tout $i \in J$, on définit la correspondance $\tilde{F}_i : Y \to Y_i$, par $\tilde{F}_i(y) = \pi(F_i(x))$ où $x \in p^{-1}(y) \cap X$. Cette définition est cohérente puisque l'ensemble $\tilde{F}_i(y)$ est indépendant du choix de $x \in X \cap p^{-1}(y)$. Pour tout $i \in J$, la correspondance $\tilde{F}_i$ est à valeurs convexes car π est linéaire et à image inverse ouverte car p est ouverte, F_i est à image inverse ouverte et $\tilde{F}_i^{-1}(y_i) = \bigcup_{x_i \in \pi^{-1}(y_i)} p(F_i^{-1}(x_i))$. D'après le théorème de Fan–Browder compétitif dans le cas séparé, l'une des alternatives suivantes est vérifiée :

- Il existe $i \in J$ et $y^* \in Y$ tels que $y_i^* \in \tilde{F}_i(y^*)$, il existe alors $x \in X$ et $z_i \in E$ tel que pour tout $j \in J$, $\pi(x_j) = y_j^*$, $z_i \in F_i(x)$ et $y_i^* = \pi(z_i)$. Donc $z_i \in X_i$, et $\pi(x_i) = \pi(z_i) = y_i^*$. On pose pour tout $j \neq i$, $x_j^* = x_j$ et $x_i^* = z_i$. Par construction, $x^* \in X$ et $p(x) = p(x^*)$, donc pour tout $j \in J$, $F_j(x^*) = F_j(x)$, donc $x_i^* \in F_i(x^*)$.
- Il existe $y^* \in Y$ tel que pour tout $i \in J$, $\tilde{F}_i(y^*) = \emptyset$, il existe alors $x \in p^{-1}(y^*) \cap X$ tel que $F_i(x) = \emptyset$. $\square$

Références

[1] D. Azé, Éléments d'analyse convexe et variationnelle, Ellipses, Paris, 1997.

[2] P. Bich, A constructive and elementary proof of Reny's theorem, cahiers de la MSE 2006-01, Université Paris 1 Panthéon-Sorbonne, 2006.

[3] P. Deguire, M. Lassonde, Familles sélectantes, Topological Methods in Nonlinear Analysis 5 (1995) 261–269.

[4] J. Morgan, V. Scalzo, Pseudocontinuous functions and existence of Nash equilibria, Journal of Mathematical Economics 43 (2007) 174–183.

[5] F. Treves, Topological Vector Spaces, Distributions and Kernel, Academic Press, New York, 1967.

[6] P.J. Reny, On the existence of pure and mixed strategy Nash equilibria in discontinuous games, Econometrica 67 (1998) 1029–1056.