Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 659–662

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Probabilités

Visibilité dans le modèle Booléen

Pierre Calka [a], Julien Michel [b], Sylvain Porret-Blanc [b]

[a] *MAP5, U.F.R. de mathématiques et informatique, Université Paris Descartes, 45, rue des Saints-Pères, 75270 Paris cedex 06, France* [1]
[b] *Unité de mathématiques pures et appliquées, UMR 5669, ENS Lyon, 46, allée d'Italie, 69364 Lyon cedex 07, France*

Reçu le 24 juin 2008 ; accepté après révision le 19 mars 2009

Disponible sur Internet le 16 avril 2009

Présenté par Jean-Pierre Kahane

Résumé

Le but de cette Note est de fournir une estimation fine de la queue de la loi de probabilité de la visibilité dans un modèle Booléen : cette fonction est définie comme étant la longueur du plus grand rayon issu de l'origine n'intersectant pas d'obstacle. L'étude est complétée par des résultats de convergence lorsque la taille des obstacles tend vers 0 et lorsque la distance de l'origine au plus proche obstacle tend vers l'infini. ***Pour citer cet article : P. Calka et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

Visibility in the Boolean model. The aim of this Note is to give an estimate on the tail probability of the visibility function in a Boolean model: this function is defined as the length of the longest ray starting at the origin that does not intersect an obstacle. Convergence results are added, when the size of obstacles goes to zero and when the distance between the origin and the closest obstacle goes to infinity. ***To cite this article: P. Calka et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

1. Introduction

G. Polya a introduit le problème de la visibilité dans une forêt dans [10] à la fois dans un cadre réseau et dans un cadre aléatoire. Dans le cas d'une personne se tenant à l'origine d'un réseau carré d'arbres de rayon constant R, il a montré que pour avoir une visibilité dégagée jusqu'à la distance r au moins le rayon R devait être choisi asymptotiquement comme $1/r$ lorsque r est grand. Plus récemment, V. Janković a donné une élégante solution complète de ce cas discret dans [6]. Le cas aléatoire étudié par G. Polya était celui de la visibilité dans une seule direction : nous nous intéressons ici à une solution globale de ce problème, en considérant simultanément toutes les directions. Notons que cette problématique est naturelle pour des applications en études forestières.

Adresses e-mail : pierre.calka@math-info.univ-paris5.fr (P. Calka), julien.michel@umpa.ens-lyon.fr (J. Michel), sylvain.porret-blanc@umpa.ens-lyon.fr (S. Porret-Blanc).
[1] Recherche effectuée en partie dans le cadre du projet ANR « mipomodim » No. ANR-05-BLAN-0017.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.03.018

De façon surprenante, ce problème ne semble pas avoir été étudié complètement dans la littérature, nous citerons les travaux de M. Yadin et S. Zacks pour un nombre fini de directions ([15] et papiers ultérieurs). Cette question a par ailleurs été étudiée très récemment dans le cadre hyperbolique par I. Benjamini et al. [1].

Nous donnons une formulation plus générale de ce problème de visibilité en nous plaçant dans le cadre du modèle Booléen (voir [8,14]) de forme générique un convexe aléatoire $\mathcal{K}$ (*obstacle*) invariant en loi par rotation, de diamètre borné presque sûrement par une constante D. Rappelons que ce modèle est construit sur un processus ponctuel de Poisson $\mathbf{X}$ de mesure d'intensité la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, marqué en tout point x par une copie indépendante K_x de $\mathcal{K}$. La phase occupée du modèle Booléen est alors donnée par $\mathcal{O} = \bigcup_{x\in\mathbf{X}}(x \oplus K_x)$, et l'on conditionne par l'événement $\{0 \notin \mathcal{O}\}$, dont la probabilité vaut $\exp(-E[\mathrm{Leb}(\mathcal{K})])$. La *visibilité* à partir du point origine 0 est définie de la façon suivante :

Définition 1.1. Soit $\mathbf{u}$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^2$, la visibilité dans la direction $\mathbf{u}$ et la visibilité totale sont données par

$$V(\mathbf{u}) = \inf\{r > 0\colon\ r\mathbf{u} \in \mathcal{O}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{V} = \sup_{\|\mathbf{u}\|=1} V(\mathbf{u}).$$

Cette notion de visibilité peut être vue comme une façon alternative à la distribution sphérique de contact de caractériser un milieu aléatoire.

2. Loi de la visibilité

2.1. *Visibilité en dimension* 2

Dans le cas d'obstacles circulaires de rayon constant, nous obtenons une formule explicite pour la queue de distribution de $\mathcal{V}$ et dans le cas général, un équivalent logarithmique de $P(\mathcal{V} \geqslant r)$.

Ces résultats reposent sur une récriture de la loi de $\mathcal{V}$ en termes de probabilité de recouvrement du cercle unité par des arcs aléatoires. Pour une mesure de probabilité ν fixée sur $[0, 1]$, et un entier $n \in \mathbb{N}$, définissons $P(\nu, n)$ la probabilité que n arcs indépendants de longueur de loi ν centrés en des points indépendants uniformément répartis recouvrent le cercle de périmètre 1. Cette quantité $P(\nu, n)$ est connue explicitement (voir les travaux de W.L. Stevens [13] (arcs fixes) et de A.F. Siegel et L. Holst [12]).

Proposition 2.1. *Lorsque les obstacles sont des disques de rayon $R > 0$ fixé, on a pour tout $r > 0$,*

$$P(\mathcal{V} \geqslant r) = \exp\bigl(-\pi\bigl(2rR + r^2\bigr)\bigr)\sum_{n\geqslant 0}\frac{(\pi(2rR + r^2))^n}{n!}\bigl(1 - P(\nu_r, n)\bigr)$$

où ν_r est la mesure de probabilité

$$\begin{aligned}\nu_r(\mathrm{d}u) = {}& \frac{\pi r}{rR + \frac{r^2}{2}}\mathbf{1}_{[0, \frac{1}{\pi}\arctan(\frac{R}{r})]}(u)\left(r\sin(2\pi u) + \frac{\sin(\pi u)(R^2 + r^2\cos(2\pi u))}{\sqrt{R^2 - r^2\sin^2(\pi u)}}\right)\\ &+ \frac{\pi R^2}{rR + \frac{r^2}{2}}\mathbf{1}_{[\frac{1}{\pi}\arctan(\frac{R}{r}), \frac{1}{2}]}(u)\frac{\cos(\pi u)}{\sin^3(\pi u)}.\end{aligned}$$

Dans le cas général d'obstacles de forme aléatoire, invariante par rotation, le lien avec des probabilités de recouvrement de type $P(\nu, n)$ subsiste mais il est plus délicat d'expliciter la mesure ν impliquée. Cependant, en notant $\mathbf{W}(\mathcal{K})$ le diamètre moyen du convexe $\mathcal{K}$, on peut obtenir l'estimation ci-dessous :

Théorème 2.2. *La visibilité totale $\mathcal{V}$ satisfait* $\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{r}\log P(\mathcal{V} \geqslant r) = -2E[\mathbf{W}(\mathcal{K})]$.

Le Théorème 2.2 indique en particulier que l'estimation unidirectionnelle fournie par l'égalité immédiate $P(V(\mathbf{u}) > r) = \exp(-2rE[\mathbf{W}(\mathcal{K})])$ se transpose pour le maximum dans toutes les directions.

La preuve de ce résultat (ou plutôt d'un encadrement plus général de $P(\mathcal{V} \geqslant r)$ impliquant le Théorème 2.2) s'appuie sur la stratégie utilisée dans ([3], conséquence de la preuve du Théorème 13), à savoir : on exploite tout d'abord un résultat de comparaison entre probabilités de recouvrement $P(\nu_1, n)$ et $P(\nu_2, n)$ lorsque ν_1 et ν_2 sont des mesures de probabilité sur [0, 1/2] ordonnées suivant l'ordre convexe [9], puis on applique une estimation due à L.A. Shepp [11] de la probabilité de recouvrir le cercle avec des arcs de longueur constante.

2.2. *Visibilité en dimension supérieure*

L'équivalent en dimension supérieure des recouvrements du cercle est le recouvrement de la sphère par des calottes. Il y a peu de littérature sur ce sujet, essentiellement concentrée dans le cas des calottes sphériques de rayon constant. Citons par exemple [4,5] ou les travaux plus récents [2]. Nous nous réduisons donc dans cette section à des obstacles $\mathcal{K} = B_d(0, R)$ où R est un rayon constant.

Proposition 2.3. *En dimension $d \geqslant 3$, si ω_d désigne le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^d$, on a* :

$$-\omega_{d-1}R^{d-1} \leqslant \liminf_{r\to+\infty} \frac{1}{r}\log P(\mathcal{V} \geqslant r) \leqslant \limsup_{r\to+\infty} \frac{1}{r}\log P(\mathcal{V} \geqslant r) \leqslant -\frac{1}{d}\omega_{d-1}R^{d-1}.$$

3. Visibilité avec des petits obstacles

Dans cette partie, nous nous plaçons en dimension quelconque avec des obstacles qui sont des boules déterministes. Nous obtenons un résultat plus précis de convergence vers la loi des valeurs extrêmes lorsque le rayon R tend vers 0 à l'aide du lemme 8.1 de [7] qui traite le cas du recouvrement d'une variété par des petites boules géodésiques : notons $\mathcal{V}_R$ la visibilité associée aux obstacles de rayon R et considérons la quantité

$$\xi_R = \omega_{d-1}R^{d-1}\mathcal{V}_R + d(d-1)\log(R) - 2(d-1)\log\bigl|\log(R)\bigr| - C_d$$

où

$$C_d = \log\left(d^{2(d-1)}(d-1)^{3(d-1)-1}\Gamma\left(\frac{d}{2}-\frac{1}{2}\right)^{2d-2}\right) - \log\left((d-1)!\,\pi^{\frac{(d-1)^2+1}{2}}2^{2d-3}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)^{d-2}\right).$$

Théorème 3.1. *En toute dimension $d \geqslant 2$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a* $\lim_{R\to 0} P(\xi_R \leqslant t) = \exp(-e^{-t})$.

4. Visibilité lorsque le plus proche obstacle est éloigné

Le cadre de cette partie est la visibilité en dimension quelconque avec des obstacles qui sont des boules de rayon aléatoire borné presque-sûrement. Nous considérons la distance S séparant l'origine du plus proche obstacle, c'est-à-dire $S = \sup\{r > 0\colon\ B_2(0, r) \cap \mathcal{O} = \emptyset\}$. La loi de S est communément appelée distribution sphérique de contact. En particulier, pour tout $r > 0$, on note $\mathcal{V}_r$ une variable ayant la loi de $\mathcal{V}$ conditionnée par l'événement $\{S \geqslant r\}$. On considère de plus la quantité

$$\psi_r = \omega_{d-1}E\bigl(R^{d-1}\bigr)(\mathcal{V}_r - r) - (d-1)\log(r) - (d-1)\log\bigl(\log(r)\bigr) - K_d$$

où

$$K_d = \log\left(\frac{1}{(d-1)!}\left(\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})}\right)^{d-2}\frac{E_\mu(R^{d-2})^{d-1}}{E_\mu(R^{d-1})^{d-2}}\right) + (d-1)\log(d-1) - \log\left(\frac{\omega_{d-1}E_\mu(R^{d-1})}{d\omega_d}\right).$$

L'objet du théorème ci-dessous est de fournir un résultat de convergence pour la loi conditionnelle de la visibilité sachant $\{S \geqslant r\}$ quand r tend vers l'infini :

Théorème 4.1. *En toute dimension $d \geqslant 2$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a* $\lim_{r\to+\infty} P(\psi_R \leqslant t) = \exp(-e^{-t})$.

La preuve du Théorème 4.1 repose également sur l'étude asymptotique des recouvrements de la sphère par des petites calottes due à S. Janson [7].

En particulier, on peut remarquer que lorsqu'on a la vue totalement dégagée à grande distance r, on ne verra pas au-delà d'une distance de l'ordre de $(r + c\log(r))$, où c est une constante positive ne dépendant que de la dimension.

Références

[1] I. Benjamini, J. Jonasson, O. Schramm, J. Tykesson, Visibility to infinity in the hyperbolic plane, despite obstacles, 2008, disponible sur http://arxiv.org/abs/0807.3308.
[2] P. Bürgisser, F. Cucker, M. Lotz, Coverage processes on spheres and condition numbers for linear programming, 2008, disponible sur http://arxiv.org/abs/0712.2816.
[3] P. Calka, The distributions of the smallest disks containing the Poisson–Voronoi typical cell and the Crofton cell in the plane, Adv. Appl. Probab. 34 (2002) 702–717.
[4] E.N. Gilbert, The probability of covering a sphere with N circular caps, Biometrika 52 (1965) 323–330.
[5] P. Hall, On the coverage of k-dimensional space by k-dimensional spheres, Ann. Probab. 13 (3) (1985) 991–1002.
[6] V. Janković, Solution of one problem of G. Pólya, Mat. Vesnik 48 (1996) 47–50.
[7] S. Janson, Random coverings in several dimensions, Acta Math. 156 (1986) 83–118.
[8] I. Molchanov, Theory of Random Sets, Probability and its Applications, Springer-Verlag London Ltd., London, 2005.
[9] A. Müller, D. Stoyan, Comparison Methods for Stochastic Models and Risks, Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 2002.
[10] G. Polya, Zahlentheoretisches und Wahrscheinlichkeitstheoretisches über die Sichweite im Walde, Arch. Math. Phys. 3 (1918) 135–142.
[11] L.A. Shepp, Covering the circle with random arcs, Israel J. Math. 11 (1972) 328–345.
[12] A.F. Siegel, L. Holst, Covering the circle with random arcs of random sizes, J. Appl. Probab. 19 (1982) 373–381.
[13] W.L. Stevens, Solution to a geometrical problem in probability, Ann. Eugenics 9 (1939) 315–320.
[14] D. Stoyan, W.S. Kendall, J. Mecke, Stochastic Geometry and its Applications, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Applied Probability and Statistics, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1987.
[15] M. Yadin, S. Zacks, Random coverage of a circle with applications to a shadowing problem, J. Appl. Probab. 19 (1982) 562–577.