Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 401–406
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Probabilités

Variance limite d'une marche aléatoire réversible en milieu aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Jérôme Depauw [a], Jean-Marc Derrien [b]

[a] *Laboratoire de mathématique et physique théorique, UMR CNRS 6083, Université Rabelais, parc de Grandmont, 37200 Tours, France*
[b] *Laboratoire de mathématiques de Brest, UMR CNRS 6205, Université de Bretagne Occidentale, 6, avenue Victor-Le-Gorgeu, CS 93837, 29238 Brest cedex 3, France*

Reçu le 17 septembre 2008 ; accepté après révision le 27 janvier 2009

Disponible sur Internet le 10 mars 2009

Présenté par Marc Yor

Résumé

Le théorème limite central pour la marche aléatoire sur un réseau aléatoire stationnaire de conductances a été étudié par de nombreux auteurs. En dimension 1, lorsque conductances et résistances sont intégrables, on peut montrer, pour presque tout environnement, la convergence vers une loi gaussienne non dégénérée en suivant une méthode de martingales introduite par S. Kozlov (1985). Lorsque les résistances ne sont pas intégrables, Y. Derriennic et M. Lin ont établi la convergence, cette fois avec variance nulle, et en probabilité relativement aux environnements (communication personnelle). On montre ici, par une méthode particulièrement simple, que cette dernière convergence a lieu ponctuellement. Le problème analogue pour la diffusion continue est ensuite considéré. Enfin notre méthode nous permet de démontrer une inégalité sur la moyenne quadratique d'une diffusion. ***Pour citer cet article : J. Depauw, J.-M. Derrien, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

Limit of the variance of a reversible random walk in random medium on $\mathbb{Z}$. The Central Limit Theorem for the random walk on a stationary random network of conductances has been studied by several authors. In one dimension, when conductances and resistances are integrable, and following a method of martingale introduced by S. Kozlov (1985), we can prove the Quenched Central Limit Theorem. In that case the variance of the limit law is not null. When resistances are not integrable, the Annealed Central Limit Theorem with null variance was established by Y. Derriennic and M. Lin (personal communication). The quenched version of this last theorem is proved here, by using a very simple method. The similar problem for the continuous diffusion is then considered. Finally our method allows us to prove an inequality for the quadratic mean of a diffusion. ***To cite this article: J. Depauw, J.-M. Derrien, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Adresses e-mail : jerome.depauw@univ-tours.fr (J. Depauw), Jean-Marc.Derrien@univ-brest.fr (J.-M. Derrien).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.01.030

Abridged English version

We consider, on the $\mathbb{Z}$-network, a random stationary sequence of conductances, defined through a probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, an invertible μ-preserving transformation T which is also ergodic, and a random variable $c > 0$: for a fixed environment $\omega \in \Omega$, the conductance of the edge $[k, k+1]$ is $c(T^k\omega)$. Let $\bar{c} = c + c \circ T^{-1}$. We introduce the random walk $(X_n)_n$ on $\mathbb{Z}$ with Markov's operator $f \mapsto P_\omega f$ defined by

$$P_\omega f(k) = \frac{1}{\bar{c}(T^k\omega)}\big(c\big(T^{k-1}\omega\big)f(k-1) + c\big(T^k\omega\big)f(k+1)\big),$$

and with initial condition $X_0 = 0$.

If c and c^{-1} are μ-integrable, we have a Quenched Central Limit Theorem: for almost all environment $\omega \in \Omega$ the random variable $\frac{X_n}{\sqrt{n}}$ converges in law, for $n \to \infty$, to the Gaussian law with mean 0 and variance

$$\sigma^2 = \left[\left(\int_\Omega c \,\mathrm{d}\mu\right)\left(\int_\Omega \frac{1}{c}\,\mathrm{d}\mu\right)\right]^{-1}.$$

To prove this result we can use a modification of the walk $(X_n)_n$, to obtain a martingale. This method is explained in [4] in the multidimensional case. The above expression of the variance σ^2, only true in dimension 1, appears in [2], where the Annealed Central Limit Theorem is proved.

When c is integrable but not c^{-1}, Y. Derriennic and M. Lin have proved, in an unpublished work, the Annealed Central Limit Theorem with null variance: $\lim_{n\to+\infty} n^{-1}E_\omega(X_n^2) = 0$ in μ-measure, where E_ω denotes the expectation relatively to the randomness of the walk, the environment being fixed. We prove here the quenched version, i.e. the μ-a.e. convergence. More precisely, we prove the following theorem, which gives the value of $\lim_{n\to+\infty} n^{-1}E_\omega(X_n^2)$, without condition on c (other than $c > 0$):

Theorem 0.1. *We have, for almost all environments ω,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{E_\omega(X_n^2)}{n} = \left[\left(\int_\Omega c \,\mathrm{d}\mu\right)\left(\int_\Omega \frac{1}{c}\,\mathrm{d}\mu\right)\right]^{-1}.$$

This limit being null if one of the integrals is $+\infty$ (or both).

M. Biskup, T.M. Prescott in [1] and P. Mathieu in [5] have obtained a quenched functional central limit theorem in $\mathbb{Z}^d$, $d \geqslant 2$, for random walks in random media of uniformly bounded conductances which form a family of independent identically distributed random variables. The limiting brownian motion is always non-degenerate even if the resistances are not integrable.

Proof. Our method is particularly simple and does not use any martingale. On the other hand, it does not give the Central Limit Theorem. But our computation is still valid with infinite integrals. Fix ω and denote by P the operator denoted by P_ω before. Consider a function f, defined on $\mathbb{Z}$, satisfying $(P - I)f \equiv 1$, and $f(0) = 0$. We can take for instance

$$f(m) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\ell=0}^{m-1} \frac{1}{c(T^\ell\omega)} \sum_{k=1}^{\ell} \bar{c}\big(T^k\omega\big) & \text{if } m \geqslant 1, \\ \displaystyle\sum_{\ell=1}^{-m} \frac{1}{c(T^{-\ell}\omega)} \sum_{k=0}^{\ell-1} \bar{c}\big(T^{-k}\omega\big) & \text{if } m \leqslant -1. \end{cases}$$

It is easy to deduce from the pointwise ergodic theorem (see [7]) that

$$\lim_{m\to\pm\infty} \frac{f(m)}{m^2} = \frac{1}{2}\left(\int_\Omega \frac{1}{c}\,\mathrm{d}\mu\right)\left(\int_\Omega \bar{c}\,\mathrm{d}\mu\right) \quad \text{p.s. } \omega. \tag{1}$$

The point is that, since $c > 0$, this convergence is still satisfied if one of these integrals is $+\infty$ (or both). Moreover, from the definition of f, we have $E_\omega(f(X_n)) = n$, which can be rewritten as

$$E_\omega\left(\frac{f(X_n)}{X_n^2} \times \frac{X_n^2}{n}\right) = 1.$$

Finally, by considering separately points where $|X_n|$ is either small or large following (1), we obtain

$$\frac{1}{2}\left(\int_\Omega \bar{c}\,\mathrm{d}\mu\right)\left(\int_\Omega \frac{1}{c}\,\mathrm{d}\mu\right)E_\omega\left(\frac{X_n^2}{n}\right) \longrightarrow 1$$

for n tending to infinity, which prove Theorem 0.1. $\square$

We can state an analogue of Theorem 0.1 for continuous time and discrete space, and an analogue statement for both continuous time and space.

Changing our framework, we consider now non-random environment. The continuous analogue of equation $(P - I)f \equiv 1$ allows us to prove the following very natural result:

Proposition 0.2. *Let $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ be function with a locally Lipschitz first derivative σ'. Suppose that σ is bounded by a constant σ_0. Then the solution $(X_t)_t$ of the stochastic differential equation $\mathrm{d}X_t = \sigma(X_t)\,\mathrm{d}B_t + \sigma(X_t)\sigma'(X_t)\,\mathrm{d}t$ satisfies $E(X_t^2) \leqslant \sigma_0^2 t$ for any $t > 0$.*

The similar statement for the equation without drift $\mathrm{d}X_t = \sigma(X_t)\,\mathrm{d}B_t$ is well-known.

1. Introduction

Soit, sur le réseau $\mathbb{Z}$, une suite aléatoire stationnaire de conductances, définie à l'aide d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, d'une transformation inversible et ergodique T préservant la mesure μ, et d'une variable aléatoire $c > 0$: pour un environnement $\omega \in \Omega$ fixé, la conductance de l'arête $[k, k+1]$ est $c(T^k\omega)$. On pose $\bar{c} = c + T^{-1}c$. Soit alors la marche aléatoire $(X_n)_n$ sur $\mathbb{Z}$ d'opérateur de Markov $f \mapsto P_\omega f$ défini par

$$P_\omega f(k) = \frac{1}{\bar{c}(T^k\omega)}\big(c\big(T^{k-1}\omega\big)f(k-1) + c\big(T^k\omega\big)f(k+1)\big),$$

et de condition initiale $X_0 = 0$.

Lorsque les fonctions c et c^{-1} sont intégrables, on a un théorème limite central pour presque tout environnement $\omega \in \Omega$: la variable aléatoire $\frac{X_n}{\sqrt{n}}$ tend en loi, pour n tendant vers l'infini, vers la loi de Gauss de moyenne nulle et de variance

$$\sigma^2 = \left[\left(\int_\Omega c\,\mathrm{d}\mu\right)\left(\int_\Omega \frac{1}{c}\,\mathrm{d}\mu\right)\right]^{-1}.$$

On peut démontrer ce résultat en suivant la méthode de martingales développée dans [4] dans un cadre multidimensionnel. Enfin l'expression de σ^2 ci-dessus, typique de la dimension 1, apparaît dans [2], où la convergence en moyenne relativement aux environnements est démontrée.

Une étude approfondie de cette même méthode, non publiée, a permis récemment à Y. Derriennic et M. Lin de démontrer que, lorsque les conductances c sont intégrables mais pas les résistances c^{-1}, on a la convergence $\lim_{n\to+\infty} n^{-1}E_\omega(X_n^2) = 0$ en probabilité pour μ, la notation E_ω désignant l'espérance relativement à l'aléa de la chaîne, à environnement fixé. On montre ici le résultat analogue, pour la convergence presque sûre. Plus précisément, on montre le théorème suivant, qui donne la valeur de $\lim_{n\to+\infty} n^{-1}E_\omega(X_n^2)$, sans condition sur c (autre que $c > 0$) :

Théorème 1.1. *On a, pour presque tout environnement ω,*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{E_\omega(X_n^2)}{n} = \left[\left(\int_\Omega c\,\mathrm{d}\mu\right)\left(\int_\Omega \frac{1}{c}\,\mathrm{d}\mu\right)\right]^{-1},$$

cette limite étant nulle dès que l'une des deux intégrales diverge (ou les deux).

M. Biskup, T.M. Prescott dans [1] et P. Mathieu dans [5] ont obtenu un principe d'invariance ponctuel dans $\mathbb{Z}^d$, $d \geqslant 2$, pour des conductances bornées, indépendantes et équidistribuées. Le mouvement brownien limite est non dégénéré, même si les résistances ne sont pas intégrables.

2. Démonstration

Notre méthode, particulièrement simple, ne repose pas sur un argument de type martingale. Elle ne donne pas le théorème limite central. Par contre notre calcul de la variance reste valide dans le cas dégénéré. Soit ω fixé. On note P l'opérateur noté P_ω ci-dessus. On considère une fonction f, définie sur $\mathbb{Z}$, vérifiant $(P - I)f \equiv 1$, et $f(0) = 0$. On a donc $E_\omega(f(X_n)) - E_\omega(f(X_{n-1})) = 1$ et $E_\omega(f(X_0)) = 0$, soit encore

$$E_\omega\big(f(X_n)\big) = n. \tag{2}$$

D'autre part, en notant τ la translation des fonctions, définie par $(\tau f)(k) = f(k+1)$, et en considérant $\partial = I - \tau$ et $\partial^* = I - \tau^{-1}$, on a $I - P = \frac{1}{\bar{c}}\partial^* c\partial$. Il en découle aisément l'expression d'une solution $f \geqslant 0$ explicite : $f(0) = f(1) = 0$, et

$$f(m) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\ell=0}^{m-1} \frac{1}{c(T^\ell\omega)} \sum_{k=1}^{\ell} \bar{c}\big(T^k\omega\big) & \text{si } m \geqslant 2, \\ \displaystyle\sum_{\ell=1}^{-m} \frac{1}{c(T^{-\ell}\omega)} \sum_{k=0}^{\ell-1} \bar{c}\big(T^{-k}\omega\big) & \text{si } m \leqslant -1. \end{cases}$$

Il est facile de voir que le théorème ergodique ponctuel (voir [7]), appliqué successivement aux deux sommations en k et ℓ, donne alors

$$\lim_{m \to \pm\infty} \frac{f(m)}{m^2} = \frac{1}{2}\bigg(\int_\Omega \frac{1}{c}\,\mathrm{d}\mu\bigg)\bigg(\int_\Omega \bar{c}\,\mathrm{d}\mu\bigg) \quad \text{p.s. } \omega. \tag{3}$$

Le point est que, comme $c > 0$, cette convergence est aussi vérifiée si l'une des deux intégrales diverge (ou les deux), la limite étant alors $+\infty$. Notons v_∞ l'inverse multiplicatif, éventuellement nul, de cette limite. Finalement de l'égalité (2), on tire

$$E_\omega\bigg(\frac{X_n^2}{n}\bigg) - v_\infty = E_\omega\bigg(\bigg(\frac{X_n^2}{f(X_n)} - v_\infty\bigg)\frac{f(X_n)}{n}\mathbf{1}_{|X_n|>M}\bigg) + \frac{1}{n}E_\omega\big(\big(X_n^2 - v_\infty f(X_n)\big)\mathbf{1}_{|X_n|\leqslant M}\big).$$

Pour n tendant vers l'infini, le dernier terme s'annule. La démonstration du Théorème 1.1 s'achève en laissant ensuite tendre M vers l'infini, et en appliquant les égalités (2) et (3).

3. Analogues continus

Le modèle précédent de la marche aléatoire sur un réseau de conductances aléatoires a naturellement deux analogues en paramètres continus.

– Le premier analogue consiste à prendre le temps continu mais l'espace toujours discret. On considère alors, en général, le processus de Markov $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{Z}$ de générateur infinitésimal

$$L_\omega f(k) = c\big(T^{k-1}\omega\big)f(k-1) + c\big(T^k\omega\big)f(k+1) - \bar{c}\big(T^k\omega\big)f(k), \tag{4}$$

soit encore $L_\omega f = -\partial^*(c\partial f)$. Par une démonstration très similaire à celle du théorème 1.1, consistant à considérer une solution f de l'équation $L_\omega f \equiv 1$, on obtient comme limite de la variance $\lim_{t\to+\infty} t^{-1}E_\omega(X_t^2) = 2[\int_\Omega c^{-1}\,\mathrm{d}\mu]^{-1}$, cette limite étant nulle dès que l'intégrale diverge (le théorème limite central dans le cas où c^{-1} est intégrable est dû à K. Kawazu et H. Kesten ; voir [3]).

– Le second analogue consiste à prendre à la fois le temps et l'espace continus. Ce modèle étant formellement moins similaire, et plus intuitif, nous nous y attardons un peu plus dans le paragraphe suivant.

4. Diffusion en milieu aléatoire stationnaire

La version continue, en temps et en espace, du travail précédent, consiste à se donner un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, muni d'un flot $(T_x)_{x\in\mathbb{R}}$ ergodique préservant la probabilité μ. Précisément, on suppose que l'application $(\omega, x) \mapsto T_x\omega$ est mesurable et vérifie :

- $T_{x+y} = T_x T_y$ et $T_0\omega = \omega$;
- si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $T_x F = F$ modulo μ, alors $\mu(F) = 0$ ou 1 ;
- $\mu(T_x F) = \mu(F)$.

On se donne aussi deux variables aléatoires λ, $\gamma > 0$, et on étudie, à ω fixé, le processus de générateur infinitésimal $f \mapsto L_\omega f$ défini par

$$L_\omega f(x) = \frac{1}{2\gamma(T_x\omega)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lambda(T_x\omega)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right), \tag{5}$$

et de condition initiale $X_0 = 0$. L'interprétation physique est celle d'un conducteur thermique linéaire, de longueur infinie, tel que, pour un environnement $\omega \in \Omega$, la conductivité et la capacité thermiques soient données respectivement par les fonctions $x \mapsto \lambda(T_x\omega)$ et $x \mapsto \gamma(T_x\omega)$. Il est usuel d'écrire le problème sous forme d'une équation différentielle stochastique $\mathrm{d}X_t = \sigma_\omega(X_t)\,\mathrm{d}B_t + b_\omega(X_t)\,\mathrm{d}t$. Ici le coefficient de diffusion est donné (toujours pour un environement ω fixé) par $\sigma^2_\omega(x) = \lambda(T_x\omega)\gamma(T_x\omega)^{-1}$, et la dérive par $b_\omega(x) = (2\gamma(T_x\omega))^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lambda(T_x\omega)$. Le théorème analogue au résultat du paragraphe précédent prend la forme suivante :

Théorème 4.1. *Supposons que, pour presque tout $\omega \in \Omega$, les fonctions σ^2_ω et b_ω sont localement lipschitziennes. Alors, pour presque tout environnement ω, la solution $(X_t)_t$ de l'équation différentielle stochastique ci-dessus vérifie*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{E_\omega(X_t^2)}{t} = \left[\left(\int_\Omega \gamma\,\mathrm{d}\mu\right)\left(\int_\Omega \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{d}\mu\right)\right]^{-1},$$

cette limite étant nulle dès que l'une des deux intégrales diverge (*ou les deux*).

Là encore, dans le cas où les fonctions γ et λ^{-1} sont intégrables sur Ω, il est connu que le théorème limite central est valide (voir notamment G.D. Papanicolaou et S.R.S. Varadhan [6] pour le cas elliptique).

Démonstration du Théorème 4.1. La démonstration est très similaire à celle du cas de la marche aléatoire. L'environnement $\omega \in \Omega$ étant fixé, on considère la fonction $f \geqslant 0$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{v=0}^{x} \frac{1}{\lambda(T_v\omega)} \int_{u=0}^{v} 2\gamma(T_u\omega)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v & \text{si } x \geqslant 0, \\ \displaystyle\int_{v=x}^{0} \frac{1}{\lambda(T_v\omega)} \int_{u=v}^{0} 2\gamma(T_u\omega)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Le théorème ergodique ponctuel, appliqué successivement aux deux intégrales en u et v, donne

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \left(\int_\Omega \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{d}\mu\right)\left(\int_\Omega \gamma\,\mathrm{d}\mu\right) \quad \text{p.s. } \omega,$$

et comme les fonctions sont positives, la convergence est aussi vérifiée si l'une des deux intégrales diverge (ou les deux), la limite étant alors $+\infty$. Comme d'autre part, d'après les hypothèses du théorème, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$, le processus Y défini par $Y_t = f(X_t)$ vérifie une équation différentielle stochastique obtenue grâce à la formule de Itô. Le calcul, que nous ne développons pas, donne un coefficient de dérive constant : $\mathrm{d}Y_t = a_\omega(X_t)\,\mathrm{d}B_t + \mathrm{d}t$. On a donc $E_\omega(f(X_t)) = t$, et la démonstration se termine comme celle du Théorème 1.1. □

5. Majoration et minoration de la moyenne quadratique à temps t fini

Il est clair, d'après l'expression de la variance limite de la marche aléatoire donnée par le Théorème 1.1, que la variance de X_n n'est pas une fonction croissante de la conductance c. Par contre, en temps continu, la question de la monotonie de $E_\omega(X_t^2)$ par rapport à chacun des coefficients de capacité et de conductivité se pose. Considérons ici la dépendance par rapport à la conductivité. Dans le générateur infinitésimal (5), prenons $\gamma \equiv 1$, et notons σ^2 la fonction, toujours supposée strictement positive, donnant le coefficient de diffusion, soit $\sigma^2(\omega) = \lambda(\omega)$. A défaut de véritable loi de monotonie, on a le résultat suivant :

Proposition 5.1. *Supposons que pour presque tout $\omega \in \Omega$, la fonction $x \mapsto \sigma^2(T_x\omega)$ est dérivable, de dérivée localement lipschitzienne. On suppose également qu'il existe une constante $\sigma_0^2 > 0$ telle que p.s. ω, on a $\sigma^2(\omega) \leqslant \sigma_0^2$. Alors, pour presque tout environnement ω on a, pour tout t, $E_\omega(X_t^2) \leqslant \sigma_0^2 t$.*

Comme cela se voit dans la démonstration ci-dessous, cette proposition n'a rien à voir avec l'environnement aléatoire. Ce cadre n'est gardé ici que pour éviter d'introduire de nouvelles notations. Ce résultat est très naturel, et sa démonstration est une très simple application de la méthode utilisée dans la démonstration ci-dessus (l'inégalité équivalente pour γ variable mais $\lambda \equiv 1$, soit une dérive $b = 0$, est classique).

Démonstration. La fonction f utilisée dans la démonstration du Théorème 4.1 vérifie maintenant $f(x) \geqslant \sigma_0^{-2} x^2$. Comme d'autre part $E_\omega(f(X_t)) = t$, la Proposition 5.1 est démontrée. □

Lorsque l'on suppose $\sigma^2(\omega) \geqslant \sigma_0^2$, on a de même la minoration $E_\omega(X_t^2) \geqslant \sigma_0^2 t$.

Références

[1] M. Biskup, T.M. Prescott, Functional CLT for random walk among bounded random conductances, Electron. J. Probab. 12 (49) (2007) 1323–1348 (electronic).

[2] A. De Masi, P.A. Ferrari, S. Goldstein, W.D. Wick, An invariance principle for reversible Markov processes. Applications to random motions in random environments, J. Statist. Phys. 55 (3–4) (1989) 787–855.

[3] K. Kawazu, H. Kesten, On birth and death processes in symmetric random environment, J. Statist. Phys. 37 (5–6) (1984) 561–576.

[4] S.M. Kozlov, The averaging method and walks in inhomogeneous environments, Uspekhi Mat. Nauk 40 (2) (1985) 61–120.

[5] P. Mathieu, Quenched invariance principles for random walks with random conductances, J. Statist. Phys. 130 (5) (2008) 1025–1046.

[6] G.C. Papanicolaou, S.R.S. Varadhan, Diffusions with random coefficients, in: Statistics and Probability: Essays in Honor of C.R. Rao, North-Holland, Amsterdam, 1982, pp. 547–552.

[7] N. Wiener, The ergodic theorem, Duke Math. J. 5 (1) (1939) 1–18.