Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 277–282
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Optimal Control

Exponential and polynomial stability of a wave equation for boundary memory damping with singular kernels

Fatiha Alabau-Boussouira [a], Jan Prüss [b], Rico Zacher [b]

[a] Projet INRIA CORIDA et L.M.A.M., CNRS-UMR 7122, Université de Metz, Ile du Saulcy, 57045 Metz cedex 01, France
[b] Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Institut für Mathematik, Theodor-Lieser Strasse 5, 06120 Halle, Germany

Received 20 October 2008; accepted after revision 8 January 2009

Available online 23 February 2009

Presented by Philippe G. Ciarlet

Abstract

This work is concerned with stabilization of a wave equation stabilized by a boundary feedback. When the feedback is both frictional and with memory, we prove exponential stability of the solutions. In case of a boundary feedback which is only of memory type, uniform stability is not expected. We prove in this latter case, that the solutions decay polynomially. The method is new and uses the method of higher order energies (see [F. Alabau-Boussouira, J. Prüss, R. Zacher, Exponential and polynomial stabilization of wave equations subjected to boundary-memory dissipation with singular kernels, in preparation; F. Alabau, Stabilisation frontière indirecte de systèmes faiblement couplés, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 328 (1999) 1015–1020; F. Alabau, P. Cannarsa, V. Komornik, Indirect internal damping of coupled systems, J. Evolution Equations 2 (2002) 127–150; F. Alabau, Indirect boundary stabilization of weakly coupled systems, SIAM J. Control Optim. 41 (2002) 511–541]), the multiplier method and the properties of a large class of singular kernels. Moreover, our method can be extended to include cases of nonsingular kernels (see [V. Vergara, R. Zacher, Lyapunov functions and convergence to steady state for differential equations of fractional order, Math. Z. 259 (2008) 287–309; R. Zacher, Convergence to equilibrium for second order differential equations with weak damping of memory type, preprint.]). ***To cite this article: F. Alabau-Boussouira et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Résumé

Stabilité exponentielle et polynômiale pour une équation des ondes par un feedback frontière mémoire avec noyau singulier. On étudie le problème de la stabilisation d'une équation des ondes par un feedback frontière avec mémoire. Le noyau du feedback est supposé singulier. Dans le cas où le feedback est à la fois frictionnel et avec mémoire, on démontre que l'énergie des solutions décroît exponentiellement. Dans le cas où le feedback est seulement de type mémoire, on montre dans cette Note que l'énergie des solutions décroît polynômialement. Le résultat repose sur l'utilisation d'énergies d'ordre plus élevé (cf. [F. Alabau-Boussouira, J. Prüss, R. Zacher, Exponential and polynomial stabilization of wave equations subjected to boundary-memory dissipation with singular kernels, in preparation ; F. Alabau, Stabilisation frontière indirecte de systèmes faiblement couplés, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 328 (1999) 1015–1020 ; F. Alabau, P. Cannarsa, V. Komornik, Indirect internal damping of coupled systems, J. Evolution Equations 2 (2002) 127–150 ; F. Alabau, Indirect boundary stabilization of weakly coupled systems, SIAM J. Control Optim. 41 (2002) 511–541]) la méthode des multiplicateurs et les propriétés d'une large classe de noyaux singuliers (cf. [V. Vergara, R. Zacher, Lyapunov functions and convergence to steady state for differential equations of fractional

E-mail addresses: alabau@univ-metz.fr (F. Alabau-Boussouira), jan.pruess@mathematik.uni-halle.de (J. Prüss), rico.zacher@mathematik.uni-halle.de (R. Zacher).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2009.01.005

order, Math. Z. 259 (2008) 287–309 ; R. Zacher, Convergence to equilibrium for second order differential equations with weak damping of memory type, preprint.]). De plus, notre méthode peut être étendue pour traiter des cas de noyaux non singuliers. ***Pour citer cet article : F. Alabau-Boussouira et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Version française abrégée

Introduction

Nous présentons dans cette Note, un résultat de stabilisation de l'équation des ondes pour des matériaux visco-élastiques. Dans le cas de tels matériaux, l'opérateur de stabilisation est un opérateur de convolution en temps. On suppose ici que cet opérateur est actif sur une partie de la frontière et que le noyau de cet opérateur est singulier, ce qui est souvent le cas au niveau des applications. Il existe de nombreux résultats pour les matériaux visco-élastiques. Nous renvoyons à e.g. [9,10,18,15,16,8,7,5,4,11,12].

Soit Ω un ouvert borné connexe non vide dans $\mathbb{R}^N$ ayant une frontière Γ de classe C^2. On suppose que Γ_0, Γ_1 est une partition de Γ avec $\operatorname{dist}(\Gamma_0, \Gamma_1) > 0$. On considère le système

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, \quad t > 0,\ x \in \Omega, \\ \partial_\nu u + \eta(x)u + k * u_t + \sigma(x)u_t = 0, \quad t > 0,\ x \in \Gamma_0, \\ u = 0, \quad t > 0,\ x \in \Gamma_1, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \\ u_t(0,x) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où ν désigne la normale unité extérieure à Γ, $k \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ est un noyau positif et singulier, et $k * v$ est défini par $(k * v)(t,x) = \int_0^t k(t-\tau)v(\tau,x)\,\mathrm{d}\tau$, $t \geqslant 0$.

On suppose que $\eta(x) \geqslant 0$, $x \in \Gamma_0$ et que si Γ_1 est de mesure nulle sur la frontière , alors $\eta > 0$ sur un sous-ensemble de $\partial\Omega$ de mesure (sur la frontière) strictement positive (pour que le problème de type Robin soit bien posé).

On définit l'énergie associée à une solution u de (1) par

$$E(t) := \frac{1}{2}\left(\int_\Omega \left(u_t^2 + |\nabla u|^2\right)\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_0} \left(a * v^2 + \eta u^2\right)\mathrm{d}s\right), \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

où

$$v = k * u_t \tag{3}$$

et a est le noyau apparaissant dans l'hypothèse (K3).

L'objet principal de cette Note est d'établir des taux de décroissance de l'énergie dans les deux cas de feedbacks frontière mémoire et frictionnels, et de mémoire seulement.

Résultat principal

On renvoie à e.g. [17] pour les résultats d'existence, unicité sous les hypothèses (K1)–(K3) sur le noyau k et à [6] pour la régularité des solutions de (1) lorsque les données initiales sont plus régulières. Ces résultats montrent que pour des données initiales dans l'espace d'énergie, le problème est bien posé.

Les deux résultats principaux de cette Note sont :

Théorème 2.1. *On suppose que $\sigma \geqslant \sigma_0 > 0$ sur Γ_0. On suppose de plus que le noyau k vérifie les hypothèses* (K1)–(K3)*, que les hypothèses géométriques* (*HG*) *sont satisfaites et que les données initiales sont dans l'espace d'énergie. Alors l'énergie E des solutions, définie par* (2) *vérifie*

$$E(t) \leqslant C\,\mathrm{e}^{-\omega t}, \quad \forall t \geqslant 0,$$

pour un certain $\omega > 0$, et donc E décroît exponentiellement à l'infini.

Théorème 2.2. *On suppose que $\sigma \equiv 0$ sur Γ_0. On suppose de plus que le noyau k vérifie les hypothèses* (K1)–(K4)*, que les hypothèses géométriques* (*HG*) *sont satisfaites et que les données initiales sont suffisamment régulières. Alors l'énergie E des solutions, définie par* (2) *vérifie*

$$E(t) \leqslant \frac{C}{t} F(0), \quad \forall t > 0,$$

où $F(0)$ fait intervenir les énergies d'ordre plus élevé des données initiales.

Remarques. La régularité des données initiales requise dans le Théorème 2.2 est la régularité suffisante pour que les énergies d'ordre plus élevé des données initiales apparaissant dans l'expression de F soient définies (cf. [6]). On pourra aussi se référer à [1,3,2] pour cette méthode et de telles propriétés dans le cas de feedbacks frictionnels.

De plus, notre méthode peut être adaptée aux cas de noyaux non singuliers. On peut notamment remplacer l'hypothèse (K2) par l'hypothèse (K2)$'$: il existe $b_0 \geqslant 0$ et un noyau positif et décroissant $b \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ tels que $b_0 k(t) + (b * k)(t) = 1$ pour tout $t \geqslant 0$ (cf. [20,6]). Les Théorèmes 2.1 et 2.2 sont en particulier valides dans le cas non singulier $\alpha = 0$ de l'exemple (6), i.e. pour le cas de noyaux k de la forme $k(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}$, $t \geqslant 0$, $\gamma > 0$.

Une classe importante de noyaux singuliers

On considère une classe de noyaux singuliers dont la forme est donnée dans les hypothèses (K1)–(K3) (cas de feedbacks frontière mémoire et frictionnels) et (K1)–(K4) (cas de feedbacks frontière de type mémoire uniquement). Cette classe permet d'obtenir des propriétés de dissipation nouvelles (cf. [19]). Un exemple de tels noyaux est donné par

$$k(t) = g_{1-\alpha}(t)\mathrm{e}^{-\gamma t}, \quad t > 0,\ \alpha \in (0,1),\ \gamma > 0, \tag{4}$$

où g_β désigne le noyau de Riemann–Liouville, i.e.

$$g_\beta(t) = \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, \quad t > 0,\ \beta > 0.$$

On pourra remarquer que ces noyaux explosent en $t = 0$.

Idée de la preuve des résultats principaux. La preuve du Théorème 2.2 est basée sur la méthode des multiplicateurs (cf. e.g. [14,13]), l'utilisation d'énergies d'ordre plus élevé et la structure des noyaux singuliers. Cette structure permet notamment d'obtenir de nouvelles inégalités de dissipation de l'énergie, les énergies d'ordre plus élevé permettant comme dans [1,3,2] d'obtenir des estimations sur la vélocité. □

1. Introduction

We consider the stabilization of viscoelastic materials. For such materials, the feedback operator is a convolution operator in time. We consider the case of memory damping which is active only on a part of the boundary and for which the kernel of convolution is singular. Such situations are more realistic from the applications point of view.

We refer to e.g. [9,10,18,15,16,8,7,5,4,11,12] and the references therein for well-posedness and stability properties of viscoelastic materials. We refer to [17] for well-posedness of (5) under hypotheses (K1)–(K3) and to [6] for the regularity of the solutions for smoother initial data.

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ be a bounded domain with smooth boundary Γ which decomposes as $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ with $\mathrm{dist}(\Gamma_0, \Gamma_1) > 0$. We are concerned with the problem

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, \quad t > 0,\ x \in \Omega, \\ \partial_\nu u + \eta(x)u + k * u_t + \sigma(x)u_t = 0, \quad t > 0,\ x \in \Gamma_0, \\ u = 0, \quad t > 0,\ x \in \Gamma_1, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \\ u_t(0,x) = u_1(x), \quad x \in \Omega. \end{cases} \tag{5}$$

Here ν denotes the outer unit normal of Γ, $k \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ is a nonnegative singular kernel, and $k * v$ stands for the convolution on the positive half-line w.r.t. time, that is $(k * v)(t,x) = \int_0^t k(t-\tau)v(\tau,x)\,\mathrm{d}\tau$, $t \geqslant 0$.

We make the following assumptions on the coefficients: $\eta(x) \geqslant 0$, $x \in \Gamma_0$. In addition, if Γ_1 is of boundary-measure zero, we assume (for the well-posedness of the Robin-type problem) that $\eta > 0$ on a subset of strictly positive Lebesgue-boundary measure of $\partial\Omega$. Moreover, in the case of the frictional-memory boundary damping, we assume that $\sigma(x) \geqslant \sigma_0 > 0$, $x \in \Gamma_0$, whereas in the pure memory boundary damping, we assume $\sigma(x) \equiv 0$, $x \in \Gamma_0$.

A typical example for the kernel k we have in mind is given by

$$k(t) = g_{1-\alpha}(t)\mathrm{e}^{-\gamma t}, \quad t > 0,\ \alpha \in (0,1),\ \gamma > 0, \tag{6}$$

where g_β denotes the Riemann–Liouville kernel

$$g_\beta(t) = \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, \quad t > 0,\ \beta > 0.$$

These kernels explose at $t = 0$.

2. Singular kernels

In what follows $\hat{f}$ stands for the Laplace transform of f. A function $k \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ is called to be of *subexponential growth* if for all $\varepsilon > 0$, $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\varepsilon t}|k(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$. Following [18, Definition 3.3] we say that a kernel $k \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ of subexponential growth is 1-*regular* if there is a constant $c > 0$ such that $|\lambda \hat{k}'(\lambda)| \leqslant c|\hat{k}(\lambda)|$ for all $\operatorname{Re}\lambda > 0$. A kernel $k \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ of subexponential growth satisfying $\hat{k}(\lambda) \neq 0$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$, is called θ-*sectorial* ($\theta > 0$) if $|\arg \hat{k}(\lambda)| \leqslant \theta$ for all $\operatorname{Re}\lambda > 0$ (cf. [18, Definition 3.2]). The following class of kernels has been introduced in [22, Definition 2.6.3], see also [21, Definition 2.1].

Definition 2.1. Let $k \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ be of subexponential growth, and let $\theta_k > 0$, and $\alpha > 0$. Then k is said to belong to the class $\mathcal{K}^1(\alpha, \theta_k)$ if k is 1-regular and θ_k-sectorial, and satisfies

$$\limsup_{\mu\to\infty} \bigl|\hat{k}(\mu)\bigr|\mu^\alpha < \infty, \quad \liminf_{\mu\to\infty} \bigl|\hat{k}(\mu)\bigr|\mu^\alpha > 0, \quad \liminf_{\mu\to 0} \bigl|\hat{k}(\mu)\bigr| > 0.$$

We consider in this Note, a class of singular kernels given respectively in the hypotheses (K1)–(K3) (cases of both memory and frictional boundary feedbacks) and hypotheses (K1)–(K4) (cases of boundary memory feedbacks only). This class allows us to derive new dissipation properties (see [19]) and to obtain decay rates of the energy using higher order energies as in [1]. The kernels given in (6) are explicit examples of singular kernels in these classes and for which the main results of this Note are valid.

Moreover, our method can be adapted to cover the more general case where k is completely positive, that is (K2) can be weakened to (K2′): there exist $b_0 \geqslant 0$ and a nonnegative and nonincreasing kernel $b \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ such that $b_0 k(t) + (b * k)(t) = 1$ for all $t \geqslant 0$ (see [20,6]). This allows to include the nonsingular case $\alpha = 0$ in the example (6). In particular, Theorems 2.1 and 2.2 are still valid for $k(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}$, $t \geqslant 0$, $\gamma > 0$.

3. Uniform stability: case of both memory and frictional boundary dampings

In this section we will assume that

$$\sigma(x) \geqslant \sigma_0 > 0, \quad x \in \Gamma_0. \tag{7}$$

Assumptions on the kernel:

(K1) $k \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ is nonnegative, and $k \in \mathcal{K}^1(\beta, \theta)$ for some $\beta \in (0,1)$ and $\theta \leqslant \pi/2$;
(K2) there exists a nonnegative and nonincreasing kernel $b \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ such that $k * b = 1$ on $(0, \infty)$;
(K3) there is a constant $\gamma > 0$ and $a \in L_1(\mathbb{R}_+)$ strictly positive and nonincreasing such that

$$b(t) = a(t) + \gamma(1 * a)(t), \quad t > 0.$$

Define now the energy

$$E(t) := \frac{1}{2}\left(\int_{\Omega}\left(u_t^2 + |\nabla u|^2\right)\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_0}\left(a * v^2 + \eta u^2\right)\mathrm{d}s\right), \quad t \geqslant 0, \tag{8}$$

where

$$v = k * u_t \tag{9}$$

and a is the kernel from assumption (K3). We set $b_\infty := \gamma |a|_{L_1(\mathbb{R}_+)}$. We obtain the dissipation relation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) \leqslant -\sigma_0 \int_{\Gamma_0} u_t^2\,\mathrm{d}s - \frac{b_\infty}{2}\int_{\Gamma_0} v^2\,\mathrm{d}s - \frac{\gamma}{2}\int_{\Gamma_0} a * v^2\,\mathrm{d}s, \quad \text{a.a. } t > 0. \tag{10}$$

Set $m(x) = x - x_0$. We assume from now on that

- (HG) $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$, $m \cdot \nu \leqslant 0$ on Γ_1, $m \cdot \nu \geqslant \delta > 0$ on Γ_0, where δ is a fixed constant.

Theorem 1. *We assume that $\sigma \geqslant \sigma_0 > 0$ on Γ_0 and that the kernel k satisfies the hypotheses* (K1)–(K3). *We moreover assume that the multiplier geometrical assumptions* (HG) *are satisfied. Then for initial data in the energy space, the energy E defined by* (8) *decays exponentially at infinity, that is*

$$E(t) \leqslant C\mathrm{e}^{-\omega t}, \quad \forall t \geqslant 0,$$

for a certain $\omega > 0$.

4. Polynomial stability: case of memory boundary damping only

In this section we will assume that

$$\sigma(x) = 0, \quad x \in \Gamma_0. \tag{11}$$

For the energy E as defined in (8) we have now the weaker dissipation law

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(t) \leqslant -\frac{b_\infty}{2}\int_{\Gamma_0} v^2\,\mathrm{d}s - \frac{\gamma}{2}\int_{\Gamma_0} a * v^2\,\mathrm{d}s, \quad \text{a.a. } t > 0. \tag{12}$$

We need to use higher energies of the solution. For this we need an additional assumption on the kernel k:

(K4) k belongs to the space $H_2^1([S,\infty))$ for some $S > 0$, where $H_2^1([S,\infty)) = \{k \in L^2([S,\infty)),\ k' \in L^2([S,\infty))\}$, the derivative of k being the derivative in the distributional sense.

Theorem 2. *We assume that $\sigma \equiv 0$ on Γ_0 and that the kernel k satisfies the hypotheses* (K1)–(K4). *Moreover, we assume that the multiplier geometrical assumptions* (HG) *are satisfied and that the initial data are sufficiently smooth. Then the energy E defined by* (8) *decays polynomially at infinity, that is*

$$E(t) \leqslant \frac{C}{t}F(0), \quad \forall t > 0,$$

where $F(0)$ involves higher order energies of the initial data.

Remark. The required regularity for the initial data in Theorem 2.2 is the regularity sufficient to assert that the higher order energies of the initial data appearing in F are defined (see [6]). One can also refer to [1,3,2] for this method and such properties in the case of frictional feedbacks.

Idea of the proof. The proof is based on the multiplier method (see e.g. [14,13]) combined with the use of higher order energies and on the properties of the class of singular kernels under consideration. These properties allow us in particular to obtain new dissipation inequalities, the higher order energies giving as in [1,3,2] the estimates on the velocity. □

References

[1] F. Alabau, Stabilisation frontière indirecte de systèmes faiblement couplés, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 328 (1999) 1015–1020.

[2] F. Alabau, Indirect boundary stabilization of weakly coupled systems, SIAM J. Control Optim. 41 (2002) 511–541.

[3] F. Alabau, P. Cannarsa, V. Komornik, Indirect internal damping of coupled systems, J. Evolution Equations 2 (2002) 127–150.

[4] F. Alabau-Boussouira, Asymptotic stability of wave equations with memory and frictional boundary dampings, Appl. Math. 35 (3) (2008) 247–258.

[5] F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa, D. Sforza, Decay estimates for second order evolution equations with memory, J. Funct. Anal. 254 (2008) 1342–1372.

[6] F. Alabau-Boussouira, J. Prüss, R. Zacher, Exponential and polynomial stabilization of wave equations subjected to boundary-memory dissipation with singular kernels, in preparation.

[7] P. Cannarsa, D. Sforza, An existence result for semilinear equations in viscoelasticity: the case of regular kernels, in: M. Fabrizio, B. Lazzari, A. Morro (Eds.), Mathematical Models and Methods for Smart Materials, in: Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, vol. 62, World Scientific, 2002, pp. 343–354.

[8] M.M. Cavalcanti, H.P. Oquendo, Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation, SIAM J. Control Optim. 42 (2003) 1310–1324.

[9] C.M. Dafermos, Asymptotic stability in viscoelasticity, Arch. Rational Mech. Anal. 37 (1970) 297–308.

[10] C.M. Dafermos, An abstract Volterra equation with applications to linear viscoelasticity, J. Differential Equations 7 (1970) 554–569.

[11] M. Fabrizio, B. Lazzari, On the existence and the asymptotic stability of solutions for linearly viscoelastic solids, Arch. Rational Mech. Anal. 116 (1991) 139–152.

[12] S. Gatti, M. Grasselli, V. Pata, Lyapunov functionals for reaction–diffusion equations with memory, Math. Methods Appl. Sci. 28 (2005) 1725–1735.

[13] V. Komornik, Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method, RAM: Research in Applied Mathematics, Masson, Paris, 1994, John Wiley and Sons, Ltd., Chichester.

[14] J.-L. Lions, Contrôlabilité Exacte et Stabilisation de Systèmes Distribués I–II, Masson, Paris, 1988.

[15] J.E. Muñoz Rivera, Asymptotic behaviour in linear viscoelasticity, Quart. Appl. Math. 52 (1994) 628–648.

[16] J.E. Muñoz Rivera, A. Peres Salvatierra, Asymptotic behaviour of the energy in partially viscoelastic materials, Quart. Appl. Math. 59 (2001) 557–578.

[17] G. Propst, J. Prüss, On wave equations with boundary dissipation of memory type, J. Integral Equations Appl. 8 (1996) 99–123.

[18] J. Prüss, Evolutionary Integral Equations and Applications, Monographs in Mathematics, vol. 87, Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.

[19] V. Vergara, R. Zacher, Lyapunov functions and convergence to steady state for differential equations of fractional order, Math. Z. 259 (2008) 287–309.

[20] R. Zacher, Convergence to equilibrium for second order differential equations with weak damping of memory type, preprint.

[21] R. Zacher, Maximal regularity of type L_p for abstract parabolic Volterra equations, J. Evolution Equations 5 (2005) 79–103.

[22] R. Zacher, Quasilinear parabolic problems with nonlinear boundary conditions, Thesis, Martin-Luther-Universität Halle, 2003.