Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 177–182

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

Géométrie différentielle

Relèvement d'une algébroïde de Courant

Mohamed Boumaiza, Nadhem Zaalani

École supérieure des sciences et des technologies de Hammam Sousse, 4002 Sousse, Tunisie

Reçu le 22 avril 2008 ; accepté après révision le 30 décembre 2008

Disponible sur Internet le 7 février 2009

Présenté par Charles-Michel Marle

Résumé

Soit $q : E \to P$ une algébroïde de Courant. On se propose de munir le fibré tangent $Tq : TE \to TP$ d'une structure d'algébroïde de Courant relevée de celle de $q : E \to P$. En particulier, dans le cas où $E = A \oplus A^*$ le double d'une bigébroïde de Lie (A, A^*), l'algébroïde de Courant tangente TE est le double de la bigébroïde de Lie tangente $(TA, (TA)^*)$. Les structures de Dirac de l'algébroïde tangente TE sont déterminées à partir des sous-fibrés intégrables de E. ***Pour citer cet article : M. Boumaiza, N. Zaalani, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

Tangent of a Courant algebroid. Let $q : E \to P$ be a Courant algebroid. We show that the tangent bundle $Tq : TE \to TP$, has a lifted structure of a Courant algebroid, deduced from that of $q : E \to P$. If $E = A \oplus A^*$, is the double of a Lie bialgebroid (A, A^*), then TE is the double of the tangent Lie bialgebroid $(TA, (TA)^*)$. The Dirac structures of the Courant algebroid TE are determined by integrable sub-bundles of E. ***To cite this article: M. Boumaiza, N. Zaalani, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abridged English version

The notion of a Courant algebroid was introduced by Z.-J. Liu, A. Weinstein and P. Xu [4], as a vector bundle $q : E \to P$, equipped with a skew symmetric bracket $[\ ,\ ]$, a non-degenerate symmetric bilinear form $(\ ,\ )$, and an anchor map $a : E \to TP$, for which the Lie algebroid axioms are satisfied only modulo certain conditions described in terms of the bilinear form $(\ ,\ )$. We show that the lifted structure of $q : E \to P$ to $Tq : TE \to TP$, gives a Courant algebroid on the tangent bundle $Tq : TE \to TP$. This result generalizes the notion of tangent algebroid given by Mackenzie and Xu [6]. We recall that $\Gamma(TE)$, the set of sections of $Tq : TE \to TP$, is generated by $\widehat{X},\ \ TX$, where $X \in \Gamma(E)$ [6].

We denote by $J : T^2P \to T^2P$ the canonical involution of the double tangent bundle T^2P. Then we have:

Theorem 0.1. *Let $(E, [\ ,\ ], a, (\ ,\ ))$ be a Courant algebroid. We equip the tangent bundle $Tq\ :\ TE \to TP$ with*:

Adresses e-mail : Mohamed.Boumaiza@essths.rnu.tn (M. Boumaiza), Nadhem.Zaalani@issatso.rnu.tn (N. Zaalani).

1631-073X/$ – see front matter © 2009 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2009.01.001

– *a symmetric bilinear form defined by,*

$$(\xi,\eta)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(X_t,Y_t)\bigg|_{t=0},$$

where $\xi=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(X_t)\,|_{t=0}$ *and* $\eta=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Y_t)|_{t=0}$ *are elements of* TE*;*

– *a tangent bracket given, for all* $X,Y\in\Gamma(E)$*, by,*

$$[TX,TY]=T[X,Y];\quad \big[TX,\widehat{Y}\big]=\widehat{[X,Y]};\quad \big[\widehat{X},\widehat{Y}\big]=0;$$

– *a bundle map* $a_T=J\circ Ta\ :\ TE\to T^2P$*.*

Then $(TE,[\ ,\ ],(\cdot,\cdot),a_T)$ *is also a Courant algebroid.*

Dirac structures. A Dirac structure of a Courant algebroid E is defined in [4], as an integrable maximal isotropic subbundle of E. We describe Dirac structures of TE by the following theorem:

Theorem 0.2. *Let* $(E,[\ ,\ ],(\ ,\ ),a)$ *be a Courant algebroid and* $(TE,[\ ,\ ],(\ ,\ ),a_T)$ *its associated tangent Courant algebroid. Then, the Dirac structures of* TE *are related, with integrable sub-bundles of the Courant algebroid* E*.*

1. Introduction

La notion d'algébroïde de Courant a été introduite par Z.-J. Liu, A. Weinstein et P. Xu [4], pour étudier le double $E=A\oplus A^*$ d'une bigébroïde de Lie (A,A^*). Cette notion est une extention naturelle du triplet de Manin $D=\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}^*$ d'une bigèbre de Lie $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^*)$ [7]. Notons que, dans le cas particulier de la bigébroïde de Lie (TP,T^*P), associée à une variété de Poisson P, T.J. Courant [2] a introduit, auparavant, un crochet sur $E=TP\oplus T^*P$ qui ne vérifie pas l'identité de Jacobi. Néanmoins, cette identité est vérifiée pour des sous-fibrés particuliers $L\subset TP\oplus T^*P$ dits structures de Dirac, qui sont isotropes maximaux et stables par le crochet. Dans ce contexte, les travaux de Z.-J. Liu, A. Weinstein et P. Xu [5], montrent qu'il existe une correspendance entre les structures de Dirac de l'algébroïde de Courant $E=TP\oplus T^*P$ et les reductions de Poisson de la variété de Poisson P.

Soit $q:E\to P$ une algébroïde de Courant et $Tq:TE\to TP$ le fibré tangent associé. Dans la Section 2, nous allons munir le fibré tangent $Tq:TE\to TP$ d'une structure d'algébroïde de Courant relevée de celle de $q:E\to P$.

Dans le cas particulier où P est un point, une algébroïde de Courant est une algèbre de Lie $\mathfrak{D}$ munie d'un produit scalaire $(\ ,\ )$ ad-invariant. Dans ce cas, l'algébroïde de Courant tangente $T\mathfrak{D}$ est identifiée à l'algèbre de Lie, produit semi direct, $\mathfrak{D}\rtimes\mathfrak{D}$ muni du produit scalaire :

$$\big\langle(x,y),(x',y')\big\rangle=(x,y')+(y,x').$$

Dans la deuxième partie de la Section 2, nous allons montrer que les structures de Dirac de TE, sont entièrement déterminées par les sous-fibrés intégrables de E.

Dans la Section 3, nous introduirons la notion de bigébroïde de Lie tangente $(TA,(TA)^*)$ associée à une bigébroïde de Lie (A,A^*), afin d'etablir un isomorphisme entre le double $\widetilde{E}=TA\oplus(TA)^*$ et l'algébroïde de Courant tangente TE de $E=A\oplus A^*$.

2. Algébroïde de Courant tangente

Soit $q:E\to P$ un fibré vectoriel et $Tq:TE\to TP$ l'application tangente de q. Soit $\pi:TE\to E$ et $p:TP\to P$ les projections canoniques. On note les éléments de TE par (ξ,X,x,m), où $\xi\in T_XE$, $X=\pi(\xi)$, $x=Tq(\xi)$ et $m=q(X)=p(x)$. Les opérations dans le fibré $Tq:TE\to TP$ sont les opérations tangentes de celles de $q:E\to P$:

$$(\xi+\eta)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(X_t+Y_t)\bigg|_{t=0},\qquad \lambda\xi=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lambda X_t)\bigg|_{t=0},$$

où $\xi=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(X_t)|_{t=0},\ \eta=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Y_t)|_{t=0},\ Tq(\xi)=Tq(\eta)=x,\ X_t,\ Y_t$ sont des courbes dans E et $\lambda\in\mathbb{R}$.

Pour tout $m\in P$, on note 0_m l'élément nul de la fibre E_m. On identifie $T_{0_m}E_m$ avec E_m et on note l'élément de $T_{0_m}E_m$ correspond à X par $\overline{X}$. On note $\Gamma(E)$ l'ensemble des sections de $q:E\to P$.

A tout élément $X \in \Gamma(E)$, on associe une section $\widehat{X}$ de $Tq : TE \to TP$, définie par :

$$\widehat{X}(x) = T(0)(x) + \overline{X(m)},$$

où $T(0)(x)$ est l'élément nul de la fibre $(Tq)^{-1}(x)$. L'ensemble des sections $\Gamma(TE)$ du fibré $Tq : TE \to TP$ est engendré par les TX, $\widehat{X}$, avec $X \in \Gamma(E)$ (voir [6]).

Considerons le fibré tangent double $T^2P = T(TP)$ associé au fibré tangent $p : TP \to P$. Pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(P)$ on définit les fonctions $\tilde{f}$ et $\hat{f}$ de $\mathcal{C}^\infty(TP)$ par : $\tilde{f}(x) = \mathrm{d}f(x)$, et $\hat{f}(x) = (f \circ p)(x)$, pour tout $x \in TP$. Pour tout champ de vecteurs X sur P, on définit aussi le champ de vecteurs $\widetilde{X}$ sur TP par : $\widetilde{X} = J \circ TX$, où J est l'involution canonique de T^2P :

$$\begin{aligned} J : T^2P &\longrightarrow T^2P, \\ (\xi, x, y, m) &\longmapsto (\xi, y, x, m). \end{aligned}$$

On a les égalités suivantes :

$$\widetilde{X+Y} = \widetilde{X} + \widetilde{Y}, \quad \widetilde{X}(\hat{f}) = \widehat{X(f)}, \quad \widetilde{X}(\tilde{f}) = \widetilde{X(f)}, \quad \widetilde{[X,Y]} = [\widetilde{X}, \widetilde{Y}].$$

Définition 2.1. (Voir [4].) Une algébroïde de Courant est un fibré vectoriel $q : E \to P$ muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $(\cdot,\cdot)$, d'un crochet antisymétrique $[\ ,\ ]$ et d'un morphisme de fibrés vectoriels $a : E \to TP$, vérifiant les propriétés suivantes :

(i) Pour tous $e_1, e_2, e_3 \in \Gamma(E)$, $[[e_1, e_2], e_3] + c.p. = \mathcal{D}T(e_1, e_2, e_3)$;
(ii) Pour tous $e_1, e_2 \in \Gamma(E)$, $a[e_1, e_2] = [a(e_1), a(e_2)]$;
(iii) Pour tous e_1, $e_2 \in \Gamma(E)$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(P)$, $[e_1, fe_2] = f[e_1, e_2] + (a(e_1)f)e_2 - (e_1, e_2)\mathcal{D}f$;
(iv) $a \circ \mathcal{D} = 0$, c-à-d, pour tous $f, g \in \mathcal{C}^\infty(P)$, $(\mathcal{D}f, \mathcal{D}g) = 0$;
(v) Pour tous e, h_1, $h_2 \in \Gamma(E)$,

$$a(e)(h_1, h_2) = \big([e, h_1] + \mathcal{D}(e, h_1), h_2\big) + \big(h_1, [e, h_2] + \mathcal{D}(e, h_2)\big),$$

où $T(e_1, e_2, e_3)$ est la fonction définie sur P par,

$$T(e_1, e_2, e_3) = \frac{1}{3}\big([e_1, e_2], e_3\big) + c.p,$$

et $\mathcal{D} : \mathcal{C}^\infty(P) \to \Gamma(E)$ définie, pour tout $e \in \Gamma(E)$ par,

$$(\mathcal{D}f, e) = \frac{1}{2}a(e)f.$$

On définit de même, pour le fibré $Tq : TE \to TP$ les fonctions $\widetilde{D} : \mathcal{C}^\infty(TP) \to \Gamma(TE)$ et $\widetilde{T}(\xi, \eta, \chi) \in \mathcal{C}^\infty(TP)$, pour tous $\xi, \eta, \chi \in \Gamma(TE)$.

Nous allons introduire, dans le théorème suivant, la notion d'algébroïde de Courant tangente :

Théorème 2.1. *Soit $(E, [\ ,\ ], a, (\cdot,\cdot))$ une algébroïde de Courant. On munit le fibré vectoriel tangent $Tq : TE \to TP$ de la forme bilinéaire symétrique* :

$$(\xi, \eta) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(X_t, Y_t)\bigg|_{t=0},$$

où $\xi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(X_t)|_{t=0}$ et $\eta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Y_t)|_{t=0}$.

On définit un crochet sur $\Gamma(TE)$ par :

$$[TX, TY] = T[X, Y]; \quad \big[TX, \widehat{Y}\big] = \widehat{[X, Y]}; \quad \big[\widehat{X}, \widehat{Y}\big] = 0, \quad \forall X, Y \in \Gamma(E).$$

On pose $a_T = J \circ Ta : TE \to T^2P$.

Alors $(TE, [\ ,\ ], (\cdot,\cdot), a_T)$ est une algébroïde de Courant.

Schéma de la démonstration. Il est clair que $(\ ,\ )$ est une forme bilinéaire symétrique et non dégénérée. L'application Ta est un morphisme entre le fibré $Tq : TE \to TP$ et le fibré $Tp : T^2P \to TP$. On compose avec J, on obtient $a_T = J \circ Ta$ un morphisme entre $Tq : TE \to TP$ et le fibré tangent $T(TP)$. Pour vérifier les propriétés de la Définition 2.1, nous avons besoin des lemmes suivants :

Lemme 2.2. *Pour tout $f \in \mathcal{C}^\infty(P)$, on a :*

$$\widetilde{\mathcal{D}}(\tilde{f}) = T(Df) \quad \textit{et} \quad \widetilde{\mathcal{D}}(\hat{f}) = \widehat{(Df)}.$$

Lemme 2.3. *Pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(E)$, on a :*

(i) $\widetilde{T}(TX, TY, TZ) = T\widetilde{(X, Y, Z)}$;
(ii) $\widetilde{T}(TX, TY, \widehat{Z}) = \widetilde{T}(TX, \widehat{Y}, TZ) = \widetilde{T}(\widehat{X}, TY, TZ) = T\widehat{(X, Y, Z)}$;
(iii) $\widetilde{T}(TX, \widehat{Y}, \widehat{Z}) = \widetilde{T}(\widehat{X}, \widehat{Y}, \widehat{Z}) = 0$.

On commence par vérifier la condition de non linéarité (iii) de la Définition 2.1. On considère les sections de la forme $\widehat{X}, TX \in \Gamma(TE)$ et les fonctions $\hat{f}, \tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(TP)$. Les cas $[TX, \hat{f}\widehat{Y}]$ et $[\widehat{X}, \hat{f}\widehat{Y}]$ sont clairs. Pour les cas $[TX, \hat{f}TY]$ et $[TX, \tilde{f}TY]$, on utilise la relation $T(fX) = \hat{f}TX + \tilde{f}\widehat{X}$. Par polarisation on obtient :

$$\bigl[TX, \tilde{f}\widehat{Y}\bigr] = \tilde{f}\bigl[TX, \widehat{Y}\bigr] + a_T(TX)\bigl(\tilde{f}\bigr)\widehat{Y} - \bigl(TX, \widehat{Y}\bigr)\widetilde{D}\tilde{f},$$
$$\bigl[TX, \hat{f}TY\bigr] = \hat{f}[TX, TY] + \bigl(a_T(TX)\hat{f}\bigr)TY - \widetilde{(X, Y)}\widetilde{D}\hat{f}.$$

Ainsi, on prolonge le crochet sur $\Gamma(TE)$ par la condition (iii) :

$$[\xi, F\eta] = F[\xi, \eta] + a_T(F)(\xi)\eta - (\xi, \eta)\widetilde{\mathcal{D}}F, \quad \text{pour } \xi, \eta \in \Gamma(TE) \text{ et } F \in \mathcal{C}^\infty(TP).$$

Pour montrer la propriété i), on utilise le lemme suivant :

Lemme 2.4. *Pour tous $X, Y, Z \in \Gamma(E)$ et $f, g \in \mathcal{C}^\infty(P)$, on a :*

(i) $T(X, Y, fZ) = fT(X, Y, Z) + \frac{1}{2}(a(Y)f)(X, Z) - \frac{1}{2}(a(X)f)(Y, Z)$.
(ii) $D(fg) = fD(g) + gD(f)$.

Il est facile, avec les même techniques, de démontrer les propriétés (ii), (iv) et (v).

Remarques 1.

(i) Une algébroïde de Courant sur un point est une algèbre de Lie $\mathfrak{D}$, munie d'un produit scalaire ad-invariant : c'est-à-dire $(ad_x y, z) + (y, ad_x z) = 0$. Dans ce cas, l'algébroïde de Courant tangente $T\mathfrak{D}$ sera identifiée au produit semi-direct $\mathfrak{D} \rtimes \mathfrak{D}$, muni du crochet de Lie :

$$\bigl[(x, y), (x', y')\bigr] = \bigl([x, x'], [x, y'] + [y, x']\bigr),$$

et de la forme bilinéaire,

$$\bigl\langle (x, y), (x', y')\bigr\rangle = (x, y') + (y, x').$$

Dans le cas de l'algèbre de Lie double $\mathfrak{D} = (\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*, (\cdot,\cdot))$, associée à une bigèbre de Lie $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ (voir [7]), l'algébroïde de Courant tangente $T\mathfrak{D}$ est l'algèbre de Lie double $\widetilde{\mathfrak{D}} = (\mathfrak{g} \rtimes \mathfrak{g}) \oplus (\mathfrak{g}^* \ltimes \mathfrak{g}^*)$, associée à la bigèbre de Lie $(\mathfrak{g} \rtimes \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^* \ltimes \mathfrak{g}^*)$ (voir [1]), muni de la forme bilinéaire :

$$\bigl\langle (x, y) + (\alpha, \beta), (x', y') + (\alpha', \beta')\bigr\rangle = \bigl\langle (x, y), (\alpha', \beta')\bigr\rangle + \bigl\langle (x', y'), (\alpha, \beta)\bigr\rangle.$$

(ii) Si la forme bilinéaire sur E est nulle, E est simplement une algébroïde de Lie, et TE est l'algébroïde de Lie tangente de Mackenzie [6].

2.1. Structures de Dirac

Définition 2.5. (Voir [4].) Soit $(E, [\ ,\ ], (\cdot,\cdot), a)$ une algébroïde de Courant. Une structure de Dirac de E est un sous-fibré de E intégrable et isotrope maximal.

Théorème 2.6. *Soit $(E, [\ ,\ ], (\ ,\ ), a)$ une algébroïde de Courant et $(TE, [\ ,\ ], (\ ,\ ), a_T)$ l'algébroïde de Courant tangente associée. Alors les structures de Dirac de TE sont en correspondence avec les sous fibrés intégrables de E.*

Schéma de la démonstration. Comme les sections projetables de $Tq : TE \to TP$, sont des combinaisons $\mathcal{C}^\infty(P)$-linéaires des sections de la formes TX et $\widehat{Y}$, $X, Y \in \Gamma(E)$, alors pour tous ϕ, $\psi \in \Gamma(TE)$ projetables, le crochet $[\phi, \psi]$ est aussi projetable.

Soit $\widetilde{L}$ une structure de Dirac de TE. On pose $\widetilde{\Gamma} = \{\xi \in \Gamma(\widetilde{L}),\ \xi \text{ projetable}\} = \langle TX_1, \dots, TX_r, \widehat{Y_1}, \dots, \widehat{Y_s}\rangle$, considéré comme un $\mathcal{C}^\infty(P)$-module qui est stable par le crochet, où $X_1, \dots, X_r$ sont linéairement indépendants. Ainsi l'ensemble $\Gamma = \{X \in \Gamma(E),\ X \sim \xi,\ \xi \in \widetilde{\Gamma}\} = \langle X_1, \dots, X_r\rangle$, est un $\mathcal{C}^\infty(P)$-module de dimension r, stable par le crochet de $\Gamma(E)$. Il suffit alors de prendre le sous fibrè L de E vérifiant $\Gamma(L) = \Gamma$.

Inversement, nous allons associer à tout sous-fibré inégrable L de E une structure de Dirac $\widetilde{L}$ de TE.

Lemme 2.7. *Pour tous $X \in \Gamma(L \cap L^\perp)$, $Y \in \Gamma(L^\perp)$ on a : $[X, Y] \in \Gamma(L^\perp)$.*

On considère le $\mathcal{C}^\infty(TP)$ module $\widetilde{\Gamma}$ de $\Gamma(TE)$ engendré par

$$\left\{TX, \widehat{Y}, X \in \Gamma\left(L \cap L^\perp\right), Y \in \Gamma\left(L + L^\perp\right)\right\}.$$

On vérifie facilement que $\widetilde{\Gamma}$ est stable par le crochet de $\Gamma(TE)$. On pose $\widetilde{L}$ le sous-fibré de TE tel que $\Gamma(\widetilde{L}) = \widetilde{\Gamma}$. Il est alors facile de vérifier que $\widetilde{L}$ est intégrable isotrope maximal.

Remarques 2.

(i) Dans le cas d'une algèbre de Lie $(\mathfrak{D}, (\ ,\ ))$, une sous algèbre de Lie lagrangienne est une structure de Dirac particulière de $\mathfrak{D}$. Les structures de Dirac de $T\mathfrak{D} \equiv \mathfrak{D} \rtimes \mathfrak{D}$ sont en correspondance avec les sous-algèbres de $\mathfrak{D}$. En particulier, pour toute sous-algèbre L de $\mathfrak{D}$, l'ensemble $L \times L^\perp$ est une sous algèbre lagrangienne, donc une structure de Dirac de $T\mathfrak{D}$.
(ii) D'après Drinfield [3], les sous-algèbres lagrangiennes de $\mathfrak{D} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ sont en correspondance avec les G-espaces homogènes du groupe de Lie–Poisson G, associées à $(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$. D'après [1], on sait que le fibré tangent TG est aussi muni d'une structure de groupe de Lie–Poisson de bigèbre de Lie $T\mathfrak{D}$. Il est clair maintenant que les TG-espaces homogènes sont en correspondance avec les sous-algèbres de $\mathfrak{D}$. Ils ne sont donc pas nécéssairement déduits des G-espaces homogènes.

3. Double d'une bigébroïde de Lie

Soit(A, A^*) une bigébroïde de Lie d'ancres a et a_* [8]. Sur le fibré vectoriel $E = A \oplus A^*$, il existe deux formes bilinéaires, l'une symétrique et l'autre antisymétrique, définies, pour tous $X, Y \in \Gamma(E)$ et $\alpha, \beta \in \Gamma(A^*)$ par :

$$(X + \alpha, Y + \beta)_+ = \frac{1}{2}\big((\alpha, Y) + (\beta, X)\big), \qquad (X + \alpha, Y + \beta)_- = \frac{1}{2}\big((\alpha, Y) - (\beta, X)\big).$$

On définit un crochet sur $\Gamma(E)$ par :

$$[e_1, e_2] = \big([X, Y] + L_\alpha Y - L_\beta X - d_*(e_1, e_2)_-\big) + \big([\alpha, \beta] + L_X\beta - L_Y\alpha + d(e_1, e_2)_-\big),$$

où $e_1 = X + \alpha$ et $e_2 = Y + \beta$.

On pose $\rho : E \to TP$ le morphisme de fibrés vectoriels défini par : $\rho = a + a_*$. D'après [4], le fibré $E = A \oplus A^*$ admet une structure d'algébroïde de Coutant qui généralise le double d'une bigèbre de Lie.

D'après [6], il existe un isomorphisme $I : TA^* \to (TA)^*$, donné dans le cas d'un fibré vectoriel trivial $A = P \times V$ par : $I(x, f, f') = (x, f', f)$, où $f, f' \in V^*$.

Théorème 3.1. *Soit* (A, A^*) *une bigébroïde de Lie de base* P *et d'applications ancres* a, a_*. *On munit le fibré tangent* $Tq : TA \to TP$ *de sa structure d'algébroïde tangente. On munit le fibré* $(TA)^*$, *dual de* $Tq : TA \to TP$, *de l'application ancre* $a_T^* = (a_*)_T \circ I^{-1} = J \circ Ta_* \circ I^{-1}$, *et du crochet* :

$$[I \circ s_1, I \circ s_2] = I \circ [s_1, s_2], \quad \forall s_1, s_2 \in \Gamma\big((TA)^*\big).$$

Alors,

(i) $(TA, (TA)^*)$ *est une bigébroïde de Lie,*
(ii) *l'algébroïde de Courant double* $\widetilde{E} = TA \oplus (TA)^*$ *est isomorphe à l'algébroïde de Courant tangente* TE, *de* $E = A \oplus A^*$.

Remarques 3. Soit (P, Λ) une variété de Poisson et $\Lambda^\sharp : T^*P \to TP$ le morphisme défini par Λ. On définit un crochet sur $\Gamma(T^*P)$ par :

$$\{\alpha, \beta\} = L_{\Lambda^\sharp\alpha}\beta - L_{\Lambda^\sharp\beta}\alpha - d\Lambda(\alpha, \beta), \quad \forall \alpha, \beta \in \Gamma\big(T^*P\big).$$

Alors $(T^*P, [\ ,\ ], \Lambda^\sharp)$ est une algébroïde de Lie. De plus le couple (TP, T^*P) est une bigébroïde de Lie, où le crochet de TP est celui des champs de vecteurs et l'application ancre est l'identité de TP.

On vérifie que l'involution canonique $J :\ T^2P \to T^2P$ définit un isomorphisme de bigébroïdes de Lie entre la bigébroïde de Lie tangente $(T(TP), (T(TP))^*)$ déduite de (TP, T^*P) et la bigébroïde de Lie $(T^2P, T^*(TP))$ définie par la structure de Poisson tangente $\widetilde{\Lambda} = J \circ T\Lambda$.

Références

[1] M. Boumaiza, N. Zaalani, Poisson–Lie structure on the tangent bundle of a Poisson–Lie group, and Poisson action lifting, J. Geom. Symmetry Phys. 4 (2005) 1–17.
[2] T.J. Courant, Dirac manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 319 (1990) 631–661.
[3] V.G. Drinfel'd, On Poisson homogeneous space of Poisson–Lie groups, Theoret. Math. Phys. 95 (2) (1993) 226–227.
[4] Z.-J. Liu, A. Weinstein, P. Xu, Manin triples for Lie bialgebroids, J. Differential Geom. 45 (1997) 547–574.
[5] Z.-J. Liu, A. Weinstein, P. Xu, Poisson homogeneous spaces and Lie algebroids associated to Poisson action, Comm. Math. Phys. 192 (1998).
[6] K.C.H. Mackenzie, P. Xu, Lie bialgebroid and Poisson groupoids, Duke Math. J. 73 (1994) 415–452.
[7] I. Vaisman, Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds, Birkhäuser, Boston, 1994.
[8] P. Xu, On Poisson groupoids, Internat. J. Math. (1994) 101–123.