Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 117–118
Comptes Rendus Mathematique

Théorie des nombres

Un complément à la Note de Lassina Dembélé "A non-solvable Galois extension of **Q** ramified at 2 only" [C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009)]

Jean-Pierre Serre

Collège de France, 3 rue d'Ulm, 75005 Paris, France

Disponible sur Internet le 23 janvier 2009

La Note de L. Dembélé décrit une extension galoisienne $K/\mathbf{Q}$ dont le degré n est grand ($n = 2^{19} \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 17^2 \cdot 257^2 = 2\,251\,731\,094\,732\,800$), et qui a plusieurs propriétés intéressantes :

1) Elle est non ramifiée en dehors de 2 ;
2) Son groupe de Galois n'est pas résoluble : il contient comme sous-groupe d'indice 8 le produit direct de deux exemplaires de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{F}_{256})$;
3) Son discriminant normalisé $\delta_K = |d_K|^{1/n}$ est petit : il est majoré par 58,688..., alors que les meilleurs exemples connus, dus à F. Hajir et C. Maire, étaient voisins de 82.

En fait, lorsque l'on examine plus en détail la ramification du corps K, on obtient un résultat encore meilleur, à savoir $\delta_K \leqslant 55{,}394388\ldots$ Voici pourquoi :

Je conserve les notations de la Note. Le point essentiel consiste à estimer, aussi précisément que possible, les conducteurs des caractères associés à l'extension multiquadratique $K_{\mathfrak{P}}$ du corps L ; cette extension est de degré 2^{2m}, avec $m \leqslant 8$.

Soit X le groupe des caractères en question, i.e. le dual de $\mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{P}}/L)$; c'est un sous-groupe de $Y = L^\times/L^{\times 2}$. Le groupe Y est un $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel de dimension $3 \cdot 8 + 1 = 25$. Il est muni d'une action du groupe C d'ordre 3 qui est le groupe de Galois de l'extension $L/F_{\mathfrak{p}_2}$. Cette action le décompose en deux morceaux :

$$Y = Y^+ \oplus Y^-,$$

où Y^+ est la partie fixe, et Y^- est l'unique supplémentaire stable. Si c est un générateur de C, Y^- est l'ensemble des $y \in Y$ tels que $(1 + c + c^2)y = 0$. On peut donc voir Y^- comme un $\mathbf{F}_4$-espace vectoriel. On vérifie facilement que $\dim Y^+ = 9$ (car c'est le « Y » du corps $F_{\mathfrak{p}_2}$), et que la dimension de Y^- sur $\mathbf{F}_4$ est égale à 8, de sorte que Y^- est d'ordre $4^8 = 2^{16}$.

L'intérêt de cette décomposition de Y en deux morceaux est que *le groupe X associé à l'extension $K_{\mathfrak{P}}/L$ est contenu dans Y^-*. C'est évident lorsque l'on regarde le produit semi-direct $\mathrm{Gal}(K_{\mathfrak{P}}/L).\ C$ comme plongé dans le produit de deux copies de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{F}_{2^8})$. [Noter que ceci entraîne que l'extension $K_{\mathfrak{P}}/L$ est peu ramifiée, car les

DOI of original article: 10.1016/j.crma.2008.12.004.
Adresse e-mail : serre@noos.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2008.12.006

conducteurs des éléments de Y^- sont au plus égaux à $2e = 16$.] Il faut ensuite regarder la filtration de X définie par le conducteur. Celle de Y^- est donnée par un drapeau complet

$$Y^- = Y_0 \supset Y_1 \supset \cdots \supset Y_8 = 0,$$

où la dimension sur $\mathbf{F}_4$ de chaque quotient successif Y_i/Y_{i+1} est 1, et le conducteur de tout élément de $Y_i - Y_{i+1}$ est $16 - 2i$. Lorsqu'on intersecte ceci avec X, on obtient une filtration de X avec quotient successifs, soit nuls, soit de dimension 1 sur $\mathbf{F}_4$. Si l'on appelle $c_1, \ldots, c_m$ les sauts de cette filtration, ordonnés par $16 \geqslant c_1 > c_2 > \cdots > c_m > 0$, on en conclut que X contient :

$4^m - 4^{m-1}$ éléments de conducteur c_1,
$4^{m-1} - 4^{m-2}$ éléments de conducteur c_2,
$\vdots$
$4 - 1$ éléments de conducteur c_m.

D'où la valuation du discriminant normalisé de $K_{\mathfrak{P}}/L$, à savoir

$$v_L(\text{disc.norm}) = 4^{-m}\big((4^m - 4^{m-1})c_1 + (4^{m-1} - 4^{m-2})c_2 + \cdots + (4-1)c_m\big),$$

ce que l'on peut écrire sous la forme $v_L(\text{disc.norm}) = c_1 - \epsilon$, avec

$$\epsilon = (c_1 - c_2)/4 + (c_2 - c_3)/4^2 + \cdots + c_m/4^m.$$

Les $c_i - c_{i+1}$ sont pairs et > 0. On en déduit

$$\epsilon \geqslant 2/4 + 2/4^2 + \cdots + 2/4^m = \frac{2}{3}\big(1 - 4^{-m}\big),$$

d'où $v_L(\text{disc.norm}) \leqslant c_1 - \frac{2}{3}(1 - 4^{-m})$. Sous cette forme, il est facile de prouver que la valeur maximale de $v_L(\text{disc.red})$ est atteinte pour $c_1 = 16$ et $m = 8$ et l'on obtient alors $v_L(\text{disc.norm}) \leqslant 16 - \epsilon$ avec $\epsilon = \frac{2}{3}(1 - 4^{-8}) = 21\,845/2^{15}$. Lorsque l'on utilise cette valeur pour estimer le discriminant normalisé du corps K (sur $\mathbf{Q}$, cette fois), on obtient $\delta_K = 2^z$, avec

$$z = 31/8 + 2 - \epsilon/8 = 1\,518\,251/262\,144 = 5{,}79166793\ldots,$$

d'où $\delta_K \leqslant 55{,}394388\ldots$