Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 85–88
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Probabilités

# Majoration du noyau de la chaleur en environnement stationnaire de conductances

Jean-Marc Derrien

*Laboratoire de mathématiques, Universitée de Bretagne Occidentale, 29238 Brest, France*

Reçu le 21 décembre 2007 ; accepté le 20 novembre 2008

Disponible sur Internet le 31 décembre 2008

Présenté par Marc Yor

**Résumé**

On établit une majoration standard de la probabilité de retour en 0 à l'instant $2n$ pour la marche aléatoire réversible en environnement stationnaire sur $\mathbb{Z}$ sous l'hypothèse d'intégrabilité des résistances. ***Pour citer cet article : J.-M. Derrien, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***



**Abstract**

**Heat kernel decay on a stationary environment of conductances.** We prove a standard decay of the $2n$-step return probability to 0 for the reversible random walk in a stationary random media on $\mathbb{Z}$ under the assumption of integrability of resistances. ***To cite this article: J.-M. Derrien, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***



## 1. Le modèle

Dans cette Note, on appelle *conductance* entre deux entiers relatifs consécutifs $x$ et $x+1$ tout réel strictement positif $c(x,x+1)$ ; l'inverse $r(x,x+1)$ de $c(x,x+1)$ étant la *résistance* entre $x$ et $x+1$.

Une famille $(c(x,x+1))_{x\in Z}$ de conductances étant donnée, on peut lui associer une chaîne de Markov $(\xi_n)_{n\geqslant 0}$ se déplaçant aux plus proches voisins sur $\mathbb{Z}$ et dont les probabilités de transition sont proportionnelles aux conductances. On a ainsi, pour $x\in\mathbb{Z}$ et $n\in\mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}[\xi_{n+1}=x+1 \mid \xi_n=x]=\frac{c(x,x+1)}{\bar{c}(x)} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}[\xi_{n+1}=x-1 \mid \xi_n=x]=\frac{c(x-1,x)}{\bar{c}(x)},$$

où $\bar{c}(x):=c(x-1,x)+c(x,x+1)$.

La chaîne de Markov $(\xi_n)_{n\geqslant 0}$ ainsi définie est appelée marche aléatoire dans l'environnement de conductances $(c(x,x+1))_{x\in Z}$. Elle est irréductible et réversible sur $\mathbb{Z}$ au sens où, pour tout $n\geqslant 0$, pour tous $x$, $y$ dans $\mathbb{Z}$, on a

$$\frac{\mathbb{P}_x[\xi_n=y]}{\bar{c}(y)}=\frac{\mathbb{P}_y[\xi_n=x]}{\bar{c}(x)}$$

*Adresse e-mail :* Jean-Marc.Derrien@univ-brest.fr.

1631-073X/$ – see front matter © 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2008.11.017

($\mathbb{P}_x$ désignant la probabilité sous laquelle $\xi_0 \equiv x$). La famille

$$H_n(x,y) := \frac{\mathbb{P}_x[\xi_n = y]}{\bar{c}(y)}, \quad x, y \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},$$

est le *noyau de la chaleur* associé à $(\xi_n)_{n\geqslant 0}$.

## 2. La majoration

Lorsque les conductances sont uniformément majorées et minorées par des constantes strictement positives, T. Delmotte montre dans [6] que le noyau de la chaleur associé à $(\xi_n)_{n\geqslant 0}$ satisfait des inégalités gaussiennes. Pour pallier en partie l'absence de cette hypothèse d'uniforme ellipticité, nous supposons dans cette note que les conductances sont obtenues comme réalisation d'une suite stationnaire de variables aléatoires.

On considère donc dans la suite qu'il existe un système dynamique probabilisé inversible $(\Omega, \mathcal{F}, m, \tau)$ et une application mesurable $c : \Omega \to ]0; +\infty[$ tels que, pour $\omega$ dans $\Omega$ fixé, la famille des conductances soit donnée par

$$c(x, x+1)(\omega) = c(\tau^x \omega), \quad x \in \mathbb{Z}.$$

Sous les hypothèses d'ergodicité de $(\Omega, \mathcal{F}, m, \tau)$ et d'intégrabilité de $c$ et $1/c$, on montre, pour $m$-presque tout $\omega$, la convergence de la suite $(\mathbb{E}_0^\omega(\xi_n^2)/n)_{n\geqslant 1}$ vers $(\int c\,\mathrm{d}m \int 1/c\,\mathrm{d}m)^{-1}$. C'est une conséquence d'une méthode d'approximation par martingale et de l'étude de la chaîne de Markov sur l'espace des environnements dite « chaîne de l'environnement vu de la particule » [7]. Lorsque seule la résistance $r := 1/c$ appartient à $\mathrm{L}^1(m)$, en utilisant la théorie ergodique des opérateurs markoviens en mesure infinie, on peut encore établir la convergence presque sûre de la suite $(\mathbb{E}_0^{\cdot}(\xi_n^2)/n)_{n\geqslant 1}$ mais, cette fois, la limite est nulle. On constate donc dans cette situation une dégénérescence de la variance asymptotique.

Sous l'hypothèse d'intégrabilité des résistances, on montre dans cette Note le théorème suivant :

**Théorème.** *Si $\int 1/c\,\mathrm{d}m < +\infty$ alors, pour $m$-presque tout $\omega$ dans $\Omega$, il existe un réel $a = a(\omega)$ tel que, pour tout $n \geqslant 1$, on ait*

$$\mathbb{P}_0^\omega[\xi_{2n} = 0] \leqslant \frac{a}{\sqrt{n}}$$

*($\mathbb{P}_0^\omega$ désignant la probabilité associée à la chaîne de Markov $(\xi_n)_{n\geqslant 0}$ partant de $0$ et évoluant dans l'environnement de conductances $(c(x,x+1)(\omega))_{x\in\mathbb{Z}}$.)*

**Remarques.**

1. La preuve de ce théorème (voir section 4 ci-dessous) est une adaptation de la méthode de Nash raffinée notamment par Coulhon et Saloff-Coste [4,5].
   Elle s'adapte à la dimension $d \geqslant 2$ sous l'hypothèse supplémentaire que la famille des résistances est bornée pour obtenir une majoration en $n^{-d/(d+1)}$ de la probabilité $\mathbb{P}_0^\omega[\xi_{2n} = 0]$.
2. Berger, Biskup, Hoffman et Kozma ont obtenu récemment dans [1] des majorations remarquables du noyau de la chaleur dans $\mathbb{Z}^d$, $d \geqslant 2$, lorsque l'environnement est donné par des conductances indépendantes et à valeurs dans $[0, 1]$. Ces majorations ne sont pas standard pour $d \geqslant 4$. Elles assurent cependant que, pour $d \geqslant 3$, les marches aléatoires $(\xi_n)$ associées à ces environnements sont transientes.
   Dans $\mathbb{Z}^d$, $d \geqslant 3$, également sous la contrainte de majoration uniforme des conductances, on peut construire des exemples d'environnements stationnaires pour lesquels les marches $(\xi_n)$ sont récurrentes [2].
3. Comets et Popov établissent dans [3] des estimations précises du comportement asymptotique (en temps) des probabilités $\mathbb{P}_x[\xi_t = y]$ (moyennées relativement à l'environnement) pour la marche aléatoire de Sinai $(\xi_t)$ en milieu aléatoire.

Dans la section suivante, on rappelle sans démonstration quelques propriétés classiques du noyau de la chaleur associé à $(\xi_n)_{n\geqslant 0}$.

## 3. Le noyau de la chaleur

Dans cette section, $f$ est la notation générique pour une fonction définie sur $\mathbb{Z}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et nulle en dehors d'une partie finie de $\mathbb{Z}$. De plus, pour alléger les notations, on pose $h_n(x) := H_n(0,x)$, $x \in \mathbb{Z}$, $n \geqslant 0$. Au facteur $\bar{c}(0)$ près, le théorème de cette note concerne la suite $(h_{2n}(0))_{n\geqslant 0}$.

La famille $(h_n)_{n\geqslant 0}$ satisfait l'équation de la chaleur discrète : $(h_n - h_{n+1}) = (I-P)h_n$ où $P$ désigne l'opérateur markovien associé à $(\xi_n)_{n\geqslant 0}$ :

$$Pf(x) := f(x-1)\frac{c(x-1,x)}{\bar{c}(x)} + f(x+1)\frac{c(x,x+1)}{\bar{c}(x)}, \quad x \in \mathbb{Z}.$$

Par ailleurs, la propriété de réversibilité de la chaîne $(\xi_n)_{n\geqslant 0}$ permet de montrer que, pour tout $n \geqslant 0$, on a

$$h_{2n}(0) = \|h_n\|_2^2 \quad \text{avec } \|f\|_2^2 := \sum_{x\in\mathbb{Z}} f(x)^2\bar{c}(x).$$

Ainsi, l'inégalité $\|Pf\|_2^2 \leqslant \|f\|_2^2$ donne la décroissance de la suite $(h_{2n}(0))_{n\geqslant 0}$.

Enfin, un ingrédient essentiel dans la preuve du théorème est de récrire la différence entre $h_{2n}(0)$ et $h_{2n+2}(0)$ à l'aide de l'égalité :

$$\|f\|_2^2 - \|Pf\|_2^2 = \sum_{x\in\mathbb{Z}} \big(f(x-1) - f(x+1)\big)^2 \left(\frac{c(x-1,x)c(x,x+1)}{\bar{c}(x)}\right).$$

## 4. Preuve du théorème

Par le théorème ergodique de Birkhoff, pour presque tout environnement de conductances, les deux quantités

$$C_1 := \sup_{K\geqslant 1} \frac{1}{K}\sum_{x=-K}^{K-1} r(x,x+1) \quad \text{et} \quad C_2 := \inf_{K\geqslant 1}\frac{1}{K}\sum_{x=-K+1}^{K-1}\bar{c}(x)$$

sont des réels strictement positifs. (On a utilisé l'intégrabilité des résistances et la stricte positivité des conductances.)

Soit $n$ un entier fixé. Désignons par $K_0$ le plus petit entier naturel tel que

$$\sum_{x=-K_0}^{K_0}\bar{c}(x) \geqslant \frac{2}{h_{4n}(0)}.$$

On a $K_0 \geqslant 1$ et, par minimalité de $K_0$, $\sum_{x=-K_0+1}^{K_0-1}\bar{c}(x) < 2/h_{4n}(0)$.

Soit maintenant $x_0$ un élément de $\{-K_0, -K_0+1, \ldots, K_0\} \cap 2\mathbb{Z}$ qui réalise le minimum de $h_{2n}$ sur cet ensemble. Il vient :

$$h_{2n}(x_0) \leqslant \frac{1}{\sum_{x=-K_0}^{K_0}\bar{c}(x)}\sum_{x=-K_0}^{K_0} h_{2n}(x)\bar{c}(x) \leqslant \frac{1}{\sum_{x=-K_0}^{K_0}\bar{c}(x)} \leqslant \frac{h_{4n}(0)}{2};$$

ce qui assure que l'on a

$$x_0 \neq 0 \quad \text{et} \quad h_{4n}(0) \leqslant h_{2n}(0) \leqslant h_{2n}(0) - h_{2n}(x_0) + \frac{h_{4n}(0)}{2}.$$

Ainsi, en posant $x_0 = 2l_0 + 2$ (et en supposant par exemple $l_0 \geqslant 0$), on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{h_{4n}(0)}{2} &\leqslant h_{2n}(0) - h_{2n}(x_0) = \sum_{l=0}^{l_0}\big(h_n(2l) - h_n(2l+2)\big)\\ &\leqslant \sqrt{\sum_{l=0}^{l_0}\big(h_{2n}(2l) - h_{2n}(2l+2)\big)^2\left(\frac{c(2l,2l+1)c(2l+1,2l+2)}{\bar{c}(2l+1)}\right)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \sqrt{\sum_{l=0}^{l_0}\big(r(2l,2l+1)+r(2l+1,2l+2)\big)} \\
&\leqslant \big(\|h_{2n}\|_2^2-\|h_{2n+1}\|_2^2\big)^{1/2}\left(\sum_{x=-K_0}^{K_0-1} r(x,x+1)\right)^{1/2} \\
&\leqslant \big(\|h_{2n}\|_2^2-\|h_{2n+1}\|_2^2\big)^{1/2}\left(\frac{C_1}{C_2}\sum_{x=-K_0+1}^{K_0-1} \bar{c}(x)\right)^{1/2} \\
&\leqslant \big(\|h_{2n}\|_2^2-\|h_{2n+1}\|_2^2\big)^{1/2}\left(\frac{C_1}{C_2}\frac{2}{h_{4n}(0)}\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$h_{4n}(0)-\frac{C_2}{8C_1}h_{4n}(0)^3 \geqslant h_{4n+2}(0) \geqslant h_{4n+4}(0)\ ;$$

ce qui permet de conclure grâce au lemme élémentaire suivant.

**Lemme.** *Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite positive et décroissante pour laquelle il existe un réel $C>0$ tel que, pour tout $n\geqslant 0$,*

$$u_{2n+2}\leqslant u_{2n}-Cu_{2n}^3,$$

*alors, il existe une constante $A>0$ telle que, pour tout $n\geqslant 1$, $u_n\leqslant A/\sqrt{n}$.*

**Remarque.** La conclusion du théorème reste vraie sans hypothèse de stationnarité dès que l'on a

$$\lim_{K\to+\infty}\sum_{x=-K}^{K}\bar{c}(x)=+\infty$$

et que la suite

$$\left(\frac{\sum_{x=-K}^{K-1} r(x,x+1)}{\sum_{x=-K+1}^{K-1}\bar{c}(x)}\right)_{K\geqslant 1}$$

est bornée.

## Références


[1] N. Berger, M. Biskup, C.E. Hoffman, G. Kozma, Anomalous heat-kernel decay for random walk among bounded random conductances, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Stat. 44 (2) (2008) 374–392.

[2] D. Boivin, J.-M. Derrien, Geodesics and recurrence of random walks in disordered systems, Electron. Commun. Probab. 7 (2002) 101–115.

[3] F. Comets, S. Popov, Limit law for transition probabilities and moderate deviations for Sinai's random walk in random environment, Probab. Theory Related Fields 126 (4) (2003) 571–609.

[4] T. Coulhon, Ultracontractivity and Nash type inequalities, J. Funct. Anal. 141 (2) (1996) 510–539.

[5] T. Coulhon, L. Saloff-Coste, Isopérimétrie pour les groupes et les variétés, Rev. Mat. Iberoamericana 9 (2) (1993) 293–314.

[6] T. Delmotte, Parabolic Harnack inequality and estimates of Markov chains on graphs, Rev. Mat. Iberoamericana 15 (1) (1999) 181–232.

[7] S.M. Kozlov, The method of averaging and walks in inhomogeneous environments, Russian Math. Survey 40 (1985) 73–145.