Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 1–4
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Logique/Combinatoire

Support critique d'un graphe indécomposable

Mohamed Yahia Sayar

Faculté des sciences de Sfax, département de mathématiques, route de la soukra km 4, BP 802, 3018 Sfax, Tunisie

Reçu le 9 octobre 2008 ; accepté après révision le 27 octobre 2008

Disponible sur Internet le 26 novembre 2008

Présenté par Jean-Yves Girard

Résumé

Étant donné un graphe orienté $G = (S, A)$, à chaque partie X de S est associé le sous-graphe $G[X] = (X, (X \times X) \cap A)$ de G induit par X. Une partie I de S est un intervalle de G si pour tous $a, b \in I$ et $x \in S \setminus I$, $(a, x) \in A$ si et seulement si $(b, x) \in A$, et $(x, a) \in A$ si et seulement si $(x, b) \in A$. Par exemple, $\emptyset$, S et $\{x\}$, où $x \in S$, sont des intervalles de G appelés intervalles triviaux. Un graphe orienté est indécomposable si tous ses intervalles sont triviaux. Étant donné un graphe orienté et indécomposable $G = (S, A)$, le support de G est l'ensemble $\sigma(G)$ des sommets x de G tels que $G[S \setminus \{x\}]$ est indécomposable. Son support critique est l'ensemble $\sigma_C(G)$ des éléments x de $\sigma(G)$ tels que $\sigma(G[S \setminus \{x\}]) = \emptyset$. Pour tout graphe orienté $G = (S, A)$, nous montrons que si G est indécomposable et si $|S| \geqslant 7$, alors $|\sigma_C(G)| \leqslant 2$. ***Pour citer cet article : M.Y. Sayar, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***
© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Critical support of an indecomposable graph. Given a digraph $G = (V, A)$, with each subset X of V is associated the subgraph $G[X] = (X, A \cap (X \times X))$ of G induced by X. A subset I of V is an interval of G provided that for any $a, b \in I$ and $x \in V \setminus I$, $(a, x) \in A$ if and only if $(b, x) \in A$, and $(x, a) \in A$ if and only if $(x, b) \in A$. For example, $\emptyset$, V and $\{x\}$, where $x \in V$, are intervals of G called trivial intervals. A digraph is indecomposable if all its intervals are trivial. Given an indecomposable digraph $G = (V, A)$, the support of G is the set $\sigma(G)$ of vertices $x \in V$ such that $G[V \setminus \{x\}]$ is indecomposable. Its critical support is the set $\sigma_C(G)$ of the elements x of $\sigma(G)$ such that $\sigma(G[V \setminus \{x\}]) = \emptyset$. For every digraph $G = (V, A)$, we prove that if G is indecomposable and if $|V| \geqslant 7$, then $|\sigma_C(G)| \leqslant 2$. ***To cite this article: M.Y. Sayar, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***
© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

1.1. Généralités

Un *graphe* (orienté) $G = (S, A)$ est constitué d'un ensemble fini et non vide S de *sommets* et d'un ensemble A de couples de sommets distincts, appelés *arcs*. À chaque partie non vide X de S est associé le *sous-graphe* $G[X] = (X, (X \times X) \cap A)$ de G induit par X. Étant donnée une partie stricte X de S, $G[S \setminus X]$ est aussi noté $G - X$. De plus, pour $x \in S$, $G - \{x\}$ est noté $G - x$. De même, pour toute partie B de A, le graphe $(S, A \setminus B)$ est noté $G - B$.

Adresse e-mail : sayar_mohamed@yahoo.fr.

1631-073X/$ – see front matter © 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2008.10.018

Considérons des graphes $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$. Un *isomorphisme* de G sur G' est une bijection f de S sur S' telle que pour tous $x, y \in S$, on a : $(x, y) \in A$ si et seulement si $(f(x), f(y)) \in A'$. Lorsqu'il existe un isomorphisme de G sur G', on dit que G et G' sont *isomorphes*, ce qui est noté $G \simeq G'$.

À chaque graphe $G = (S, A)$, on associe son *dual* $G^\star = (S, A^\star)$, son *complémentaire* $\bar{G} = (S, \bar{A})$ et son *symétrisé* $\mathrm{Sym}(G) = (S, \mathrm{Sym}(A))$ définis sur S comme suit : pour tous $x \neq y \in S$, $(x, y) \in A^\star$ si et seulement si $(y, x) \in A$, $(x, y) \in \bar{A}$ si et seulement si $(x, y) \notin A$ et $(x, y) \in \mathrm{Sym}(A)$ si et seulement si $(x, y) \in A$ ou $(y, x) \in A$.

Un graphe $G = (S, A)$ est *symétrique* lorsque $G = \mathrm{Sym}(G)$. Par contre, un graphe $G = (S, A)$ est un *tournoi* lorsque $G^\star = \bar{G}$. Enfin, un graphe $G = (S, A)$ est un *ordre partiel* lorsque pour tous $x, y, z \in S$, on a : si $(x, y) \in A$ et $(y, z) \in A$, alors $(x, z) \in A$. Un *ordre total* est un graphe qui est à la fois un ordre partiel et un tournoi. Étant donné un ordre total $O = (S, A)$, $x < y$ signifie que $(x, y) \in A$. Étant donné $n \geqslant 2$, l'ordre total usuel sur $\{0, \ldots, n-1\}$ est noté O_n.

1.2. Support critique

Soit $G = (S, A)$ un graphe. Une partie I de S est un *intervalle* [3,4] de G lorsque pour tous $a, b \in I$ et $x \in S \setminus I$, on a : $(a, x) \in A$ si et seulement si $(b, x) \in A$, et $(x, a) \in A$ si et seulement si $(x, b) \in A$. Par exemple, $\emptyset$, S et $\{x\}$, où $x \in S$, sont des intervalles de G, appelés intervalles *triviaux*. Un graphe est *indécomposable* [3,4] si tous ses intervalles sont triviaux, sinon il est *décomposable*. Rappelons les principaux résultats sur les sous-graphes indécomposables obtenus en enlevant un ou deux sommets d'un graphe indécomposable.

Proposition 1.1. *(Ehrenfeucht et Rozenberg [2].) Étant donné un graphe indécomposable $G = (S, A)$, avec $|S| \geqslant 5$, il existe $x, y \in S$ tels que $G - \{x, y\}$ est indécomposable.*

Dans cette proposition, on peut avoir $x = y$. Ceci nous amène à étudier l'indécomposabilité des sous-graphes obtenus en enlevant un seul sommet d'un graphe indécomposable. Étant donné un graphe indécomposable $G = (S, A)$, avec $|S| \geqslant 2$, le *support* de G est l'ensemble $\sigma(G)$ des sommets x de G tels que $G - x$ est indécomposable. Disons alors que G est *critique* lorsque $\sigma(G) = \emptyset$. La caractérisation des graphes critiques, due à Schmerl et Trotter [4], est présentée au paragraphe 1.3. L'amélioration suivante de la Proposition 1.1 en découle :

Théorème 1.2. *(Schmerl et Trotter [4].) Étant donné un graphe indécomposable $G = (S, A)$, avec $|S| \geqslant 7$, il existe des sommets distincts x et y de G tels que $G - \{x, y\}$ est indécomposable.*

On essaie alors d'améliorer ce théorème de la façon suivante : étant donné un graphe indécomposable $G = (S, A)$, si G n'est pas critique, alors existe-t-il $x \neq y \in S$ tels que $G - x$ et $G - \{x, y\}$ sont indécomposables ? Autrement dit, existe-t-il $x \in \sigma(G)$ tel que $\sigma(G - x) \neq \emptyset$? Ceci nous conduit à la définition suivante. Étant donné un graphe indécomposable $G = (S, A)$, avec $|S| \geqslant 2$, le *support critique* de G est l'ensemble $\sigma_C(G)$ des éléments x de $\sigma(G)$ tels que $\sigma(G - x) = \emptyset$. Ainsi, $\sigma_C(G)$ est l'ensemble des sommets x de G tels que $G - x$ est indécomposable et critique. La question précédente s'énonce alors : étant donné un graphe indécomposable et non critique G, est-ce-que $\sigma_C(G)$ est une partie stricte de $\sigma(G)$? Boudabbous et Ille [1] ont apporté la réponse suivante :

Théorème 1.3. *(Boudabbous et Ille [1].) Considérons un graphe indécomposable $G = (S, A)$ tel que $|S| \geqslant 7$. Si $|\sigma(G)| \geqslant 2$, alors $\sigma_C(G)$ est une partie stricte de $\sigma(G)$.*

Une autre alternative consiste à majorer le cardinal du support critique. Le but de cette Note est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 1.4. *Pour tout graphe indécomposable $G = (S, A)$, avec $|S| \geqslant 7$, on a $|\sigma_C(G)| \leqslant 2$.*

1.3. Caractérisation des graphes critiques

Afin de présenter la caractérisation des graphes critiques, nous utilisons les graphes suivants : Considérons un entier $n \geqslant 2$. On définit sur $\{0, \ldots, 2n\}$ les tournois T_{2n+1}, U_{2n+1} et V_{2n+1} de la façon suivante. Pour tous $i \neq j \in$

$\{0,\dots,2n\}$, (i,j) est un arc de T_{2n+1} s'il existe $k\in\{1,\dots,n\}$ tel que $j\equiv i+k \bmod (2n+1)$. Le tournoi U_{2n+1} est obtenu à partir de T_{2n+1} en inversant les arcs contenus dans $\{n+1,\dots,2n\}$. Le tournoi V_{2n+1} est défini par : $V_{2n+1}-2n=O_{2n}$ et pour tout $i\in\{0,\dots,n-1\}$, $(2n,2i)$ et $(2i+1,2n)$ sont des arcs de V_{2n+1}. On considère aussi les ordres partiels $Q_{2n}=(\{0,\dots,2n-1\},\{(2i,2j+1)\colon\ 0\leqslant i\leqslant j\leqslant n-1\})$ et $R_{2n}=O_{2n}-\{(2i,2j+1)\colon\ 0\leqslant i\leqslant j\leqslant n-1\}$. Posons alors $G_{2n}=\mathrm{Sym}(Q_{2n})$ et notons que $\mathrm{Sym}(R_{2n})=\overline{G_{2n}}$. Considérons enfin le graphe $H_{2n+1}=O_{2n+1}-\{(2i,2j);\ 0\leqslant i<j\leqslant n\}$.

Théorème 1.5. *(Schmerl et Trotter [4].) Étant donné un graphe indécomposable $G=(S,A)$, avec $|S|\geqslant 4$, G est critique si et seulement si G est isomorphe à G_{2n}, $\overline{G_{2n}}$, Q_{2n}, $\overline{Q_{2n}}$, R_{2n}, $\overline{R_{2n}}$, H_{2n+1}, $\overline{H_{2n+1}}$, T_{2n+1}, U_{2n+1} ou V_{2n+1}.*

2. Preuve du Théorème 1.4

Remarque 1. Pour tout graphe $G=(S,A)$, G et $\bar G$ ont les mêmes intervalles. Par suite, si l'un de ces graphes est indécomposable, alors l'autre l'est aussi. Il s'ensuit que si G est indécomposable, alors $\sigma(G)=\sigma(\bar G)$ et $\sigma_C(G)=\sigma_C(\bar G)$.

Remarque 2. On peut définir les notions de support et de support critique pour les graphes décomposables. Le Théorème 1.4 s'étend alors facilement aux graphes décomposables.

Le premier résultat se démontre à l'aide du Théorème 1.5 en utilisant les propriétés structurelles des graphes critiques.

Proposition 2.1. *Soit $G=(S,A)$ un graphe indécomposable tel que $|S|\geqslant 7$. Pour tous $x,y\in\sigma_C(G)$, $G-x\simeq G-y$.*

Nous vérifions tout d'abord le Théorème 1.4 lorsqu'il existe un sommet x de G tel que $G-x\simeq G_{2n}$.

Lemme 2.2. *Considérons un graphe indécomposable $G=(S,A)$ tel que $|S|\geqslant 7$. S'il existe $x\in S$ tel que $G-x\simeq G_{2n}$, alors $|\sigma_C(G)|\leqslant 2$.*

En utilisant le lemme précédent et les Remarques 1 et 2, nous obtenons la proposition suivante :

Proposition 2.3. *Considérons un graphe indécomposable $G=(S,A)$ tel que $|S|\geqslant 7$. S'il existe $x\in S$ tel que $G-x$ est isomorphe à G_{2n}, $\overline{G_{2n}}$, Q_{2n}, $\overline{Q_{2n}}$, R_{2n} ou $\overline{R_{2n}}$, alors $|\sigma_C(G)|\leqslant 2$.*

Preuve. Par le Lemme 2.2, $|\sigma_C(G)|\leqslant 2$ lorsque $G-x\simeq G_{2n}$. De plus, par la Remarque 1, $\bar G$ est aussi indécomposable et $\sigma_C(G)=\sigma_C(\bar G)$. On peut donc supposer que $G-x$ est isomorphe à Q_{2n} ou à R_{2n}. Dans le premier cas, on obtient par la Proposition 2.1 que $G-y\simeq Q_{2n}$ pour tout $y\in\sigma_C(G)$. Par suite, pour tout $y\in\sigma_C(G)$, $\mathrm{Sym}(G-y)=\mathrm{Sym}(G)-y$ est isomorphe à $\mathrm{Sym}(Q_{2n})=G_{2n}$. Ainsi, $\sigma_C(G)\subseteq\sigma_C(\mathrm{Sym}(G))$. Si $\mathrm{Sym}(G)$ est décomposable, alors la Remarque 2 permet de conclure. Si $\mathrm{Sym}(G)$ est indécomposable, alors il suffit d'appliquer le Lemme 2.2. Dans le second cas, on a $\overline{\mathrm{Sym}(G)}-y\simeq G_{2n}$ pour tout $y\in\sigma_C(G)$ et on conclut comme dans le premier. □

En fait, dans la proposition précédente, on a $|\sigma_C(G)|\leqslant 1$ lorsque $G-x\simeq R_{2n}$ ou $\overline{R_{2n}}$.

Proposition 2.4. *Soit $G=(S,A)$ un graphe indécomposable tel que $|S|\geqslant 7$. S'il existe $x\in S$ tel que $G-x$ est isomorphe à H_{2n+1} ou à $\overline{H_{2n+1}}$, alors $|\sigma_C(G)|\leqslant 2$.*

Nous établissons enfin l'amélioration suivante du Théorème 1.4 lorsqu'il existe $x\in\sigma_C(G)$ tel que $G-x$ est un tournoi :

Théorème 2.5. *Considérons un graphe indécomposable $G=(S,A)$ tel que $|S|\geqslant 7$. S'il existe $x\in S$ tel que $G-x$ est un tournoi critique, alors $|\sigma_C(G)|\leqslant 1$.*

Par le Théorème 1.5, le Théorème 1.4 est une conséquence directe des Propositions 2.3, 2.4 et du Théorème 2.5.

Références

[1] Y. Boudabbous, P. Ille, Indecomposability graph and critical vertices of an indecomposable graph, à paraître dans Discrete Math.

[2] A. Ehrenfeucht, G. Rozenberg, Primitivity is hereditary for 2-structures, Theoret. Comput. Sci. 3 (70) (1990) 343–358.

[3] P. Ille, Indecomposable graphs, Discrete Math. 173 (1997) 71–78.

[4] J.H. Schmerl, W.T. Trotter, Critically indecomposable partially ordered sets, graphs, tournaments and other binary relational structures, Discrete Math. 113 (1993) 191–205.