Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 1129–1132
COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Algèbre homologique

La conjecture de Karoubi pour la K-théorie lisse

Hvédri Inassaridzé [a,b], Tamaz Kandélaki [a,b]

[a] *A. Razmadze Mathematical Institute, M. Alexidze St. 1, 0193 Tbilisi, Georgia*
[b] *National Centre for Science and Technology, Tbilisi, Georgia*

Reçu le 13 mars 2008 ; accepté après révision le 10 octobre 2008

Présenté par Christophe Soulé

Résumé

Nous construisons des K-foncteurs lisses sur la catégorie des algèbres réelles (resp. complexes) localement convexes. La conjecture de Karoubi pour la K-théorie lisse sur l'isomorphisme des K-foncteurs algébriques et lisses est confirmée sur la catégorie des algèbres de Fréchet réelles (resp. complexes) quasi-stables. ***Pour citer cet article : H. Inassaridzé, T. Kandélaki, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abstract

Karoubi's conjecture for the smooth K-theory. Smooth K-functors are constructed on the category of locally convex real (resp. complex) algebras. The Karoubi's conjecture for the smooth K-theory on the isomorphism of algebraic and smooth K-functors is confirmed on the category of real (resp. complex) quasi-stable Fréchet algebras. ***To cite this article: H. Inassaridzé, T. Kandélaki, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

La conjecture de Karoubi en K-théorie est bien connue. Elle a été énoncée en 1979 conjecturant l'isomorphisme des K-foncteurs algébriques et topologiques sur la catégorie des C^*-algèbres stables [3], la stabilité étant exprimée par le produit tensoriel des C^*-algèbres. Elle a été confirmée par Karoubi pour les K-foncteurs négatifs. Le cas positif a été prouvé par Suslin et Wodzicki [5]. Cette conjecture a été etendue et confirmée pour les algèbres stables d'opérateurs généralisés et leurs extensions polynomiales [2] et par Wodzicki pour les algèbres de Banach avec unité approximative bornée [8]. En outre Wodzicki a montré que toute algèbre de Fréchet multiplicativement convexe avec unité approximative uniformément bornée est H-unitaire [7].

Nous étendons la conjecture de Karoubi à la catégorie des algèbres de Fréchet réelles (resp. complexes) quasi-stables, la notion de stabilité des algèbres étant exprimée par le produit tensoriel projectif de Grothendieck. L'algèbre des applications continues n'est pas compatible avec ce produit, ce qui veut dire qu'elle ne vérifie pas les isomorphismes $(A \hat{\otimes} k)^I \cong A \hat{\otimes} k^I \cong A^I \hat{\otimes} k$, dont nous avons besoin pour prouver cette conjecture. C'est pourquoi nous avons utilisé l'algèbre des applications lisses qui possède cette propriété. Cela nous a conduit à introduire des K-foncteurs topologiques spéciaux dits K-foncteurs lisses, définis à l'aide d'applications lisses, et la conjecture dite

Adresses e-mail : inassari@gmail.com (H. Inassaridzé), kandel@rmi.acnet.ge (T. Kandélaki).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2008.10.005

conjecture de Karoubi pour la K-théorie lisse (par rapport au produit tensoriel projectif) s'énonce sous la forme suivante :

Les K-foncteurs algébriques K_n, $n \geqslant 0$, sont isomorphes aux K-foncteurs lisses K_n^{sm} sur la catégorie des algèbres de Fréchet réelles (resp. complexes) quasi-stables.

Le but de cette annonce est de confirmer cette conjecture de Karoubi.

Ces résultats ont été exposés au séminaire de topologie algébrique à l'Université Paris 13 et à l'Université de Copenhagen. De plus, ils font partie du travail effectué dans le cadre des projets scientifiques d'INTAS (03-51-3251 et 06-1000017-8609) et consacré à l'étude des propriétés homotopiques des algèbres localement convexes.

Toutes les k-algèbres considérées sont des algèbres associatives sur le corps des nombres réels ou complexes. Nous rappelons qu'une k-algèbre de Fréchet est une k-algèbre dont la topologie est induite par une famille dénombrable de seminormes déterminantes. Une k-algèbre de Fréchet est appelée k-algèbre de Fréchet–Michael si ses seminormes déterminantes possèdent la propriété de multiplicativité.

1. K-théorie lisse des k-algèbres localement convexes

Soit $\mathcal{A}$ la catégorie des k-algèbres localement convexes. Une application continue $f : I \to A$ à valeurs dans une k-algèbre localement convexe A est appelée lisse, si elle possède toutes les derivées $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(n)}, \ldots$, et $A^{\infty(X)}$ désigne la k-algèbre localement convexe des applications lisses sur un sous-ensemble compact X d'un espace euclidien de dimension finie. Si A est une k-algèbre de Fréchet (resp. de Fréchet–Michael), il en est de même pour la k-algèbre $A^{\infty(X)}$.

Nous allons maintenant définir sur la catégorie $\mathcal{A}$ le cotriple lisse des chemins $\mathbf{I}$. Considérons les applications $\varepsilon_i : A^{\infty(I)} \to A$, $i = 0, 1$, $\varepsilon_0(f) = f(0)$, $\varepsilon_1(f) = f(1)$, où I désigne le segment $[0, 1]$. On note $\mathcal{I}(A)$ le noyau de ε_0 et soit $\tau_A : \mathcal{I}(A) \to A$ la restriction de ε_1 sur $\mathcal{I}(A)$. On a un k-homomorphisme $\delta_A : \mathcal{I}(A) \to \mathcal{I}^2(A) = \mathcal{I}(\mathcal{I}(A))$ defini par $\delta_A(f)(s,t) = f(st)$, $f \in \mathcal{I}(A)$. Il est évident que $\delta_A(f)$ est une application lisse.

On obtient sur la catégorie $\mathcal{A}$ le cotriple $\mathbf{I} = (\mathcal{I}, \tau, \delta)$ qui est appelé cotriple lisse. Ce cotriple induit une k-algèbre simpliciale augmentée localement convexe $\mathcal{I}_*^+(A) = \mathcal{I}_*(A) \to A$ qui, combinée avec le foncteur général linéaire GL, se met sous la forme d'un groupe simplicial augmenté $\mathrm{GL}(\mathcal{I}_*^+(A)) = \mathrm{GL}(\mathcal{I}_*(A)) \to \mathrm{GL}(A)$.

Définition 1.1. Pour toute k-algèbre localement convexe A on pose

$$K_n^{\mathrm{sm}}(A) = \{\pi_{n-2}\,\mathrm{GL}(\mathcal{I}_*^+(A))\}, \quad n \geqslant 1, \qquad K_0^{\mathrm{sm}}(A) = K_0(A),$$

où le groupe d'homotopie d'ordre négatif est défini par Coker de l'homorphisme $\mathrm{GL}(\tau_A)$.

Définition 1.2. Soient A et B deux k-algèbres localement convexes. On dit que deux k-homomorphismes continus $f, g : A \to B$ sont homotopes lisses, s'il existe un k-homomorphisme continu $h : A \to B^{\infty(I)}$ tel que $\varepsilon_0 h = \varepsilon_1 h$ et h est appelé l'homotopie lisse de f à g. Un foncteur défini sur la catégorie $\mathcal{A}$ à valeurs dans la catégorie $\mathcal{G}$ des groupes est appelé homotopique lisse, si $T(f) = T(g)$ pour f et g homotopes lisses.

On appelle $h^{\mathrm{sm}}T(A) = \mathrm{Coker}(T(A^{\infty(I)}) \rightrightarrows T(A))$ l'homotopisation lisse $h^{\mathrm{sm}}T$ d'un foncteur $T : \mathcal{A} \to \mathcal{G}$ pour toute k-algèbre localement convexe A. On a un morphisme naturel $\eta : T \to h^{\mathrm{sm}}T$ qui est universel pour les transformations de T dans les foncteurs homotopiques lisses. Il est évident que $h^{\mathrm{sm}}T = T$ si et seulemet si T est un foncteur homotopique lisse.

Théorème 1.3. (i) *Soit $0 \to A' \xrightarrow{\sigma} A \xrightarrow{\eta} A'' \to 0$ une extension de k-algèbres localement convexes telle que η soit une* GL*-fibration par rapport au cotriple lisse. Alors il existe une longue suite exacte naturelle*

$$\begin{aligned} &\cdots \longrightarrow K_{n+1}^{\mathrm{sm}}(A'') \longrightarrow K_n^{\mathrm{sm}}(A') \longrightarrow K_n^{\mathrm{sm}}(A) \longrightarrow K_n^{\mathrm{sm}}(A'') \longrightarrow \\ &\cdots \longrightarrow K_1^{\mathrm{sm}}(A'') \longrightarrow K_0(A') \longrightarrow K_0(A) \longrightarrow K_0(A''). \end{aligned}$$

(ii) *Les K-foncteurs lisses K_n^{sm}, $n \geqslant 1$, sont des foncteurs homotopiques lisses.*

(iii) *Soit $\alpha_1 : K_1 \to K_1^{\mathrm{sm}}$ le morphisme naturel. Alors on a un isomorphisme*

$$h^{\mathrm{sm}}\alpha_1(A) : h^{\mathrm{sm}}K_1(A) \xrightarrow{\cong} K_1^{\mathrm{sm}}(A)$$

pout toute k-algèbre localement convexe A et $\alpha_1(A)$ est un isomorphisme, si $K_1(A) \to K_1(A^{\infty(I)})$ est un isomorphisme, induit par l'injection naturelle $A \to A^{\infty(I)}$.

On peut définir sur la catégorie $\mathcal{A}$ des k-algèbres localement convexes des K-foncteurs topologiques K_n^{top}, $n \geqslant 0$, d'une manière complètement analogue en utilisant le cotriple des chemins continus $\mathbf{J}$ au lieu du cotriple des chemins lisses [6]. L'inclusion naturelle $A^{\infty(I)} \hookrightarrow A^I$ induit un morphisme de cotriples $\mathbf{I} \to \mathbf{J}$ et donc des homorphismes $\beta_n(A) : K_n^{\mathrm{sm}}(A) \to K_n^{\mathrm{top}}(A)$, $n \geqslant 0$. On vérifie aisément que les foncteurs topologiques sont des K-foncteurs homotopiques lisses, puisqu'ils sont des foncteurs homotopiques. Il en est de *même* pour le foncteur de Grothendieck K_0 sur la sous-catégorie des k-algèbres de Banach.

Il existe un morphisme naturel du cotriple libre $\mathbf{F} = (\mathcal{F}, \tau, \delta)$ sur la catégorie $\mathcal{A}$ dans le cotriple lisse : $\mathcal{F}(A) \to \mathcal{I}(A)$, $|a| \mapsto (t \mapsto at)$, $a \in A$, $t \in I$. Il induit des homomorphismes des K-foncteurs algébriques de Swan [6] dans les K-foncteurs lisses qui, combinés avec l' isomorphisme des K-foncteurs de Quillen K_n, $n \geqslant 0$, et de Swan, définit des homomorphismes $\alpha_n(A) : K_n(A) \to K_n^{\mathrm{sm}}(A)$, $n \geqslant 0$.

Théorème 1.4. *Soit A une k-algèbre complexe de Fréchet–Michael. Alors on a un isomorphisme $\beta_n(A) : K_n^{\mathrm{sm}}(A) \to K_n^{\mathrm{top}}(A)$ pout tout $n \geqslant 0$.*

Corollaire 1.5. *Soit A une k-algèbre complexe de Fréchet–Michael telle que* $\mathrm{GL}_1(A^+)$ *soit ouvert dans A^+ (A^+ étant le complété unitaire de A). Alors les trois K-groupes $K_n^{\mathrm{sm}}(A)$, $K_n^{\mathrm{top}}(A)$ et $RK_n(A)$ (défini dans* [4]) *sont isomorphes pour tout $n \geqslant 0$. Donc la K-théorie lisse est isomorphe à la K-théorie topologique bien connue sur la catégorie des algèbres complexes de Banach.*

2. Conjecture de Karoubi pour les *k*-algèbres de Fréchet

La conjecture que nous allons confirmer peut encore se formuler sous la forme suivante :

Si A est une k-algèbre de Fréchet avec unité approximative proprement uniformément bornée, alors on a un isomorphisme $\alpha_n : K_n(A \hat{\otimes} \mathcal{K}) \xrightarrow{\cong} K_n^{\mathrm{sm}}(A \hat{\otimes} \mathcal{K})$ pour tout $n \geqslant 0$, où $\mathcal{K}$ désigne la C^*-algèbre des opérateurs compacts sur l'espace de Hilbert séparé et de dimension infinie.

A cet effet l'étude des foncteurs $K_n(A \hat{\otimes} (- \otimes \mathcal{K}))$, $n \in \mathbb{Z}$, sur la catérorie des C^*-algèbres a été cruciale, où $\otimes$ désigne le produit tensoriel des C^*-algèbres. On prouve que ces foncteurs possèdent les propriétés d'exactitude, de stabilité, d'invariance homotopique et de la périodicité de Bott, lorsque A appartient à la classe des k-algèbres de Fréchet avec unité approximative proprement uniformément bornée.

Définition 2.1. Une sous-algèbre B d'une k-algèbre de Fréchet A est appelée propre, s'il existe pour A une suite de seminormes déterminantes $\mathcal{F} = \{\|\cdot\|_n\}$, une structure de k-algèbre de Banach sur B avec norme $\|\cdot\|$ et une constante positive C_n telles que $\|b\|_n \leqslant C_n\|b\|$ pour toute seminorme $\|\cdot\|_n \in \mathcal{F}$ et $b \in B$.

Si A est une k-algèbre de Fréchet–Michael, la sous-algèbre A_b des éléments bornés est une sous-algèbre propre de A. Une k-algèbre de Fréchet A est appelée presque k-algèbre de Fréchet–Michael, si sa suite de seminormes déterminantes $\{\|\cdot\|_n\}$ vérifie la condition $\|xy\|_n \leqslant \|x\|_{r(n)} \cdot \|y\|_{r(n)}$ pour $r(n) \geqslant n$, tout $x, y \in A$ et chaque n. Cette suite est appelée suite de presque multiplicatives seminormes déterminantes.

Proposition 2.2. *Toute k-algèbre de Fréchet admet une structure de presque k-algèbre de Fréchet–Michael.*

Un élément a d'une k-algèbre de Fréchet A est appelé uniformément borné par rapport à la suite des presque multiplicatives seminormes déterminantes $\mathcal{F} = \{\|\cdot\|_n\}$, s'il existe une constante positive C telle que $\|a\|_n < C$ pour tout n. On prouve que l'algèbre A_b des éléments uniformément bornés dans A est une sous-algèbre de la k-algèbre de Fréchet A par rapport à la suite $\mathcal{F}$ des presque multiplicatives seminormes déterminantes.

Soit A une k-algèbre de Fréchet unitaire. L'injection naturelle $k \to A$ est toujours bornée. Son image qui contient l'unité de A est une sous-algèbre propre de A par rapport à toute suite de seminormes déterminantes.

Définition 2.3. Soit B une sous-algèbre d'une k-algèbre de Fréchet A équipée de sa structure de Banach. Si A possède dans B une unité approximative bornée, ce qui veut dire qu'il existe un ensemble inductif borné $\{\nu_\alpha\}$ dans B tel que $\varinjlim_\alpha(\nu_\alpha\mu)=\mu$ et $\varinjlim_\alpha(\nu_\alpha x)=x$, $\mu\in B$, $x\in A$, alors cette unité est appelée unité approximative proprement uniformément bornée de la k-algèbre de Fréchet A. En particulier, si une k-algèbre presque de Fréchet–Michael A possède dans A_b une unité approximative bornée, cette unité est appelée unité approximative proprement uniformément bornée de A.

Si A est une k-algèbre de Fréchet avec unité e, alors A possède dans la sous-algèbre propre ke une unité approximative bornée (c'est l'unité e). Par conséquent l'unité e est une unité approximative proprement uniformément bornée de A.

Si A est la limite projective d'une famille dénombrable de C^*-algèbres, il existe une suite de seminormes déterminantes telle que A_b est une propre sous-algèbre dense dans A et A possède une unite approximative bornée dans A_b qui est donc une unité approximative proprement uniformémnt bornée de A.

Théorème 2.4. *Soit A une k-algèbre de Fréchet. Si elle a une unité approximative proprement uniformément bornée, alors elle est H-unitaire et elle possède la propriété d'excision en K-théorie algébrique.*

Une k-algèbre de Fréchet B est appelée quasi-stable, si elle est de la forme $A\mathbin{\hat\otimes}\mathcal{K}$, A étant une k-algèbre de Fréchet avec unité approximative proprement uniformément bornée.

Comme conséquence des Théorème 2.4 et Théorème 1.3(iii), et de la propriété d'homotopie des foncteurs $K_n(A\mathbin{\hat\otimes}(-\otimes\mathcal{K}))$, $n\in\mathbb{Z}$, on obtient.

Théorème 2.5. *Les foncteurs $K_n^{\mathcal{K}}=K_n(-\mathbin{\hat\otimes}\mathcal{K})$, $n\in Z$, définis sur la catégorie des k-algèbres de Fréchet quasi-stables, sont homotopiques lisses et possèdent la propriété d'excision.*

Corollaire 2.6. *Les foncteurs K_n et K_n^{sm}, $n\geqslant 0$, sont isomorphes sur la catégorie des k-algèbres de Fréchet quasi-stables.*

D'apres le travail de Wodzicki [8,1] ce résultat peut être considéré comme une extension non triviale de la validité de la conjecture de Karoubi (par rapport au produit tensoriel projectif) de la classe des algèbres complexes multiplicativement convexes avec unité approximative uniformément bornée à la classe des algèbres de Fréchet complexes avec unité approximative proprement uniformément bornée qui contient la classe des algèbres de Fréchet complexes unitaires.

Remarque. Plus clairement, ce corollaire généralise le résultat présenté dans [1], Th. 8.3.3, qui prouve la conjecture de Karoubi pour les algèbres de Fréchet quasi-stables complexes dont les seminormes possèdent la propriété de multiplicativité. Notre résultat est valable pour les algèbres de Fréchet quasi-stables qui sont d'une part arbitraires (donc ne supposant pas la propriété de multiplicativité de leurs seminormes déterminantes) et d'autre part sont non seulement complexes mais aussi réelles. Par exemple, une algèbre de Fréchet unitaire arbitraire tensorisée par $\mathcal{K}$ ne satisfait pas aux conditions du Th. 8.3.3 de [1], tandis qu'elle est valable pour le Corollaire 2.6.

Références

[1] G. Cortinas, A. Thom, Comparison between algebraic and topological K-theory of locally convex algebras, Preprint, 2006; arXiv: math.KT/0607222.
[2] H. Inassaridze, T. Kandelaki, K-theory of stable generalized operator algebras, K-Theory 27 (2002) 103–110.
[3] M. Karoubi, K-théorie algébrique de certaines algèbres d'opérateurs, in : Lecture Notes in Math., vol. 725, 1979, pp. 254–290.
[4] C. Phillips, K-theory of Fréchet algebras, Int. J. Math. 2 (1) (1991) 77–129.
[5] A. Suslin, M. Wodzicki, Excision in algebraic K-theory, Ann. of Math. 136 (1) (1992) 51–122.
[6] R.G. Swan, Some relations between higher K-functors, J. Algebra 21 (1) (1972) 113–136.
[7] M. Wodzicki, Excision in cyclic homology and in rational algebraic K-theory, Ann. of Math. 129 (1989) 591–639.
[8] M. Wodzicki, Algebraic K-theory and functional analysis, in: First European Congress of Mathematics, vol. II, Paris, 1992, in: Progr. Math., vol. 120, Birkhäuser, Basel, 1994, pp. 485–496.