Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009) 93–98
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Statistique/Probabilités

$\mathcal{G}$-invariance faible et isovariance en planification expérimentale

Frédéric Bertrand

Institut de recherche mathématique avancée, Université Louis-Pasteur, 7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France

Reçu le 28 avril 2008 ; accepté le 4 septembre 2008

Disponible sur Internet le 16 octobre 2008

Présenté par Paul Deheuvels

Résumé

Dans cette Note, nous obtenons une caractérisation polynomiale de l'invariance faible et montrons comment la construction de plans expérimentaux faiblement invariants pour l'action d'un groupe de matrices compact sur un domaine expérimental, d'intérieur non vide, peut se déduire de celle de plans isovariants. Pour cela, nous introduisons une nouvelle fonction génératrice des moments du plan dont nous étudions quelques propriétés. Ces deux résultats permettent respectivement d'utiliser des techniques d'algébre computationnelle pour construire des plans faiblement invariants et de tirer avantage des importantes connaissances actuelles sur la construction des plans isovariants, ceux-ci ayant été étudiés de manière soutenue depuis leur introduction en 1957 par Box et Hunter. ***Pour citer cet article : F. Bertrand, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abstract

Rotatable designs and $\mathcal{G}$-weakly invariant designs. In this Note, we state a polynomial characterization of weakly invariant designs and show how to derive the construction of weakly invariant designs for the action of a compact group of matrices on an experimental domain, whose interior is not empty, from the construction of rotatable designs. As a consequence, it enables us to search for weakly invariant designs using techniques coming from computational commutative algebra and to benefit from the cumulated knowledge of rotatable designs which have been intensively studied since the seminal paper of Box and Hunter. ***To cite this article: F. Bertrand, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 347 (2009).***

Abridged English version

In this Note, we consider $\mathcal{G}$ a compact group of matrices and an experimental domain $\boldsymbol{\chi}$ which is a compact subset, whose interior is not empty, of an Euclidean vector space of dimension v. We set, in Section 3, the classical statistical framework of full polynomial regression models of degree d over the experimental domain $\boldsymbol{\chi}$ as defined by Eqs. (1) and (2). Then we recall the definitions of an approximate and an exact design and highlight that, from a statistical point of view, the quality of a design, if used with the former model, is fully characterized by its moment matrix, given by Eq. (3). In order to introduce $\mathcal{G}$-weakly invariant designs in Definition 3.5 and rotatable designs in Definition 3.6, we first deal with the $(\mathcal{G}, \mathcal{Q})$-equivariant property of a statistical model, following Gaffke and Heiligers, [3].

Adresse e-mail : fbertran@math.u-strasbg.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2008.09.027

Section 4 is about the moment E-generating function, whose definition is given in 4.1, and its properties with respect to the $\mathcal{G}$-weak invariance of a design. E was chosen to be one of the matrices such that the compact group of matrices $\mathcal{G}$ is a subgroup of the group $\mathcal{O}_v(E)$, the orthogonal of $\mathcal{R}^v$ for the scalar product defined by E, for the existence of E see [6]. A $\mathcal{G}$-invariance property for the moment E-generating function is defined as an invariance for a natural action of the group $\mathcal{G}$ in Definition 4.3. We show in Theorem 4.5 that a design is $\mathcal{G}$-weakly invariant if and only if the moment E-generating function is $\mathcal{G}$-invariant. This characterization theorem enables us reformulate the problem of the construction of $\mathcal{G}$-weakly invariant designs into the framework of computational commutative algebra since the characterization we established is a polynomial one. As a consequence, several tools that are specially devoted to the solving of polynomial equations such as Gröbner bases, see [4] and [5], can be used in a very efficient manner to derive $\mathcal{G}$-weakly invariant designs.

In Section 5, we derive a construction of $\mathcal{G}$-weakly invariant designs from rotatable ones. Since $\mathcal{G}$ is a compact subgroup of $\mathcal{GL}_v(\mathbb{R})$, the linear group of $\mathbb{R}^v$, there exists an automorphism $A \in \mathcal{GL}_v(\mathbb{R})$, the linear group of $\mathbb{R}^v$, and a subgroup $\mathcal{K}$ of the orthogonal group $\mathcal{O}_v$ of $\mathbb{R}^v$ for the canonical scalar product such that $\mathcal{G} = A\mathcal{K}A^{-1}$, which means that $\mathcal{G}$ is conjugate to $\mathcal{H}$ in $\mathcal{GL}_v(\mathbb{R})$, see [6]. One can easily show that $\mathcal{G}$ is then a subgroup of $\mathcal{O}_v(E)$ with E being equal to $(AA')^{-1}$. Theorem 5.2 states that function moment E-generating function, $\mathrm{MGF}_E^{A_d}(\boldsymbol{\xi})$, is $\mathcal{G}$-invariant if and only if the I_v-generating function of $\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{A}^{-1}}$, $\mathrm{MGF}_{I_v}^{A_d}(\boldsymbol{\xi}^{A^{-1}})$, is $\mathcal{K}$-invariant. As a consequence, we propose the following scheme for constructing $\mathcal{G}$-weakly invariant designs:

(i) Find $A \in \mathcal{GL}_v(\mathbb{R})$ and $\mathcal{K}$ a sub-group of $\mathcal{O}_v(\mathbb{R})$ such that $\mathcal{G} = A\mathcal{K}A^{-1}$;
(ii) Choose a design $\boldsymbol{\eta}$, such that the support of $\boldsymbol{\eta}^A$ is a subset of $\boldsymbol{\chi}$, among the list of known designs for which the moment generating function of the design $\boldsymbol{\eta}$, $\mathrm{MGF}_{I_v}^{A_d}(\boldsymbol{\eta})$, is $\mathcal{K}$-invariant;
(iii) The design $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta}^A$ is then a $\mathcal{G}$-weakly invariant design.

Virtually, the moment I_v-generating function $\mathrm{MGF}_{I_v}^{A_d}(\boldsymbol{\eta})$ of a design $\boldsymbol{\eta}$ is $\mathcal{K}$-invariant if and only if $\boldsymbol{\eta}$ is a $\mathcal{K}$-weakly invariant design since the interior of the experimental domain is non empty, see [3]. Thus, provided that a rotatable design is a $\mathcal{K}$-weakly invariant design for any $\mathcal{K}$ subgroup of $\mathcal{O}_v(\mathbb{R})$, one can benefit from the cumulated knowledge of rotatable designs to readily exhibit weakly invariant designs.

1. Motivation

Dans cette Note, nous démontrons que la propriété d'invariance faible pour un groupe compact de matrices $\mathcal{G}$ et un modèle polynomial est équivalente à l'invariance de la fonction E-génératrice des moments pour une action naturelle du groupe $\mathcal{G}$. L'introduction de cette fonction ainsi que le théorème de caractérisation font partie des nouveautés apportées par ce travail. Celles-ci permettent l'utilisation de techniques d'algèbre commutative computationnelle reposant sur l'utilisation des bases de Gröbner, [4] et [5], qui aboutissent à une approche algorithmique directe de la construction de plans $\mathcal{G}$-faiblement invariants pour l'action d'un groupe compact $\mathcal{G}$ qui agit linéairement sur le domaine expérimental. Les conditions de symétries imposées aux dispositifs $\mathcal{G}$-faiblement invariants n'en réduisent pas l'intérêt lors, par exemple de la recherche de plans admissibles ou de plans alphabétiquement optimaux pour un critère d'optimalité invariant par l'action induite par celle de $\mathcal{G}$, puisque Gaffke et Heiligers ont montré, [3], qu'il est toujours possible de chercher des plans qui sont de surcroît $\mathcal{G}$-faiblement invariants. La recherche de dispositifs expérimentaux admissibles ou alphabétiquement optimaux en est alors grandement simplifiée puisque la taille de l'ensemble dans lequel s'effectue la minimisation convexe est fortement réduite.

Nous montrons également certaines propriétés de la fonction E-génératrice qui ont pour conséquence de réduire le problème de la construction de plans $\mathcal{G}$-faiblement invariants pour l'action d'un groupe $\mathcal{G}$ de matrices compact à celui de la construction de plans $\mathcal{K}$-faiblement invariants pour l'action d'un groupe de matrices $\mathcal{K}$ qui est un sous-groupe compact du groupe orthogonal. Ainsi la connaissance de dispositifs isovariants, c'est-à-dire faiblement invariants pour l'action du groupe orthogonal tout entier, permet de construire des plans qui sont $\mathcal{G}$-faiblement invariants pour l'action d'un groupe $\mathcal{G}$ de matrices compact quelque soit le groupe $\mathcal{G}$ de matrices compact considéré. L'intérêt principal de ce second résultat est de pouvoir se servir de la connaissance existante de dispositifs isovariants pour des cardinaux variés de l'ensemble des points support du plan qui a été accumulée depuis l'introduction de cette notion par Box et Hunter en 1957, [2].

2. Notations et définitions

Nous nous intéressons à des modèles de régression linéaire soumis aux hypothèses statistiques usuelles. Nous considérons une variable explicative $\boldsymbol{x}$, dont les différentes valeurs possibles appartiennent à un domaine expérimental $\boldsymbol{\chi}$, qui est une partie compacte d'un espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}^v$, $v \in \mathbb{N}$ muni de sa structure euclidienne canonique, dont nous étudions l'influence sur une réponse y à valeurs réelles. Soient d un entier naturel et A_d le sous-ensemble fini de $\mathbb{N}^v$ défini par $A_d = \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^v, |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant d\}$, où $|\boldsymbol{\alpha}|$ désigne la somme des composantes du vecteur $\boldsymbol{\alpha}$. Les éléments de A_d sont notés $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_v)$. Nous posons $k = \mathrm{Card}(A_d) = C_{d+v-1}^{v-1}$ et, pour $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^v$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\alpha}})_{\boldsymbol{\alpha} \in A_d}$ avec $\boldsymbol{x}^{(\alpha_1,\ldots,\alpha_v)} = x_1^{\alpha_1} \times \cdots \times x_v^{\alpha_v}$. Un modèle de régression multiple polynomiale complet de degré d, noté A_d, sur un domaine expérimental $\boldsymbol{\chi} \in \mathbb{R}^v$ est alors défini par :

$$y(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\theta}' \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_v)\in A_d} \theta_{\boldsymbol{\alpha}} \prod_{i=1}^{v} x_i^{\alpha_i}, \quad \forall \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_v)' \in \boldsymbol{\chi}, \tag{1}$$

où $\boldsymbol{\theta}' = (\theta_{\boldsymbol{\alpha}})_{\boldsymbol{\alpha} \in A_d} \in \mathbb{R}^k$, est un vecteur de paramètres inconnus. Il s'agit de la part déterministe d'un modèle stochastique défini de la manière suivante : l'observation des valeurs de la réponse y aux points $\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_n} \in \boldsymbol{\chi}$ est représentée par des variables aléatoires à valeurs réelles $Y_1, \ldots, Y_n$ telles que

$$i = 1, \ldots, n, \quad \mathbb{E}[Y_i] = y(\boldsymbol{x_i}), \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}[Y_i] = \sigma^2, \qquad i, j = 1, \ldots, n, i \neq j, \quad \mathbb{C}\mathrm{ov}[Y_i, Y_j] = 0. \tag{2}$$

La variance constante $\sigma^2 \in]0, +\infty[$ est inconnue et est de ce fait un paramètre additionnel du modèle.
Nous supposons que les valeurs pour lesquelles les observations sont effectuées sont connues exactement et contrôlées par l'expérimentateur : il s'agit du contexte usuel de la planification expérimentale.

Définition 2.1. Un plan $\boldsymbol{\xi}$ approché pour le modèle défini par les Éqs. (1) et (2) est une mesure de probabilité de support fini sur $\boldsymbol{\chi}$, c'est-à-dire un couple $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{w}(\boldsymbol{X}))$ où $\boldsymbol{X}$ est un ensemble fini de r points $\{\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_r}\} \subset \boldsymbol{\chi}$, le support du plan, $\boldsymbol{w} = (w_1(\boldsymbol{x_1}), \ldots, w_r(\boldsymbol{x_r}))$ sont les poids des points support du plan. Soit n le nombre total d'essais que nous souhaitons effectuer. Un plan approché $\boldsymbol{\xi}$, ne peut être réalisé dans la pratique que s'il existe r entiers strictement positifs $n_1, \ldots, n_r$ de somme n tels que $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x_i}) = n_i/n$ pour $i = 1, \ldots, r$. Un tel plan est appelé plan exact de taille n et nous le notons alors $\boldsymbol{\xi_n}$.

D'un point de vue statistique, la qualité d'un plan expérimental, utilisé avec un modèle vérifiant les équations (1) et (2), se traduit par sa matrice des moments $M(\boldsymbol{\xi})$.

Définition 2.2. La matrice des moments $M(\boldsymbol{\xi})$ d'un plan $\boldsymbol{\xi}$, de points support $\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_r}$, analysé à l'aide d'un modèle polynomial complet de degré d est :

$$M(\boldsymbol{\xi}) = \bigl(\mu_{\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\xi})\bigr)_{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in A_d} \quad \text{où } \mu_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x_i}) \boldsymbol{x_i}^{\boldsymbol{\alpha}} \text{ pour } \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}^v \text{ et } |\boldsymbol{\alpha}| \leqslant 2d. \tag{3}$$

$M(\boldsymbol{\xi})$ est une matrice carrée d'ordre k qui est la matrice polaire d'une forme quadratique positive. Pour un plan exact $\boldsymbol{\xi_n}$ et dès que $M(\boldsymbol{\xi_n})$ est inversible, $(\sigma^2/n)M(\boldsymbol{\xi_n})^{-1}$ est la matrice de variance–covariance de l'estimateur des moindres carrés ordinaires de $\boldsymbol{\theta}$. En faisant l'hypothèse supplémentaire que le modèle linéaire est gaussien, alors $(n/\sigma^2)M(\boldsymbol{\xi_n})$ est la matrice d'information de Fisher.

Définition 2.3. Considérons un modèle de régression linéaire défini par l'équation (1), $y(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\theta}' \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\chi}$, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^k$. Soit $\mathcal{G}$ un groupe de transformations bijectives de $\boldsymbol{\chi}$ sur $\boldsymbol{\chi}$ et $\mathcal{Q}$ un groupe de matrices réelles carrées d'ordre k pour la multiplication matricielle usuelle. Le modèle de régression est équivariant pour $\mathcal{G}$ et $\mathcal{Q}$, ce que nous abrégeons également en $(\mathcal{G}, \mathcal{Q})$-équivariant, s'il existe une application surjective de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{Q}$ qui à un élément g de $\mathcal{G}$ associe un élément Q_g de $\mathcal{Q}$ tel que :

$$\boldsymbol{f}\bigl(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\bigr) = Q_g \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \quad \forall (\boldsymbol{x}, g) \in \boldsymbol{\chi} \times \mathcal{G}. \tag{4}$$

Remarque 1. Si l'équation (4) est vérifiée, il est possible de construire un groupe $\mathcal{Q}$. Nous renvoyons à [3].

Exemple 1. Le modèle polynomial complet de degré d sur le domaine expérimental $\boldsymbol{\chi}$ pris égal à une boule de $\mathbb{R}^v$ centrée en $\mathbf{0}$ est, pour $\mathcal{Q}_{\mathrm{orth}}$ donné par la Remarque 1, $(\mathcal{G}_{\mathrm{orth}}, \mathcal{Q}_{\mathrm{orth}})$-équivariant.

Définition 2.4. Une application g injective de $\boldsymbol{\chi}$ dans $\boldsymbol{\chi}$ induit une opération sur l'ensemble des plans dont le support est inclus dans $\boldsymbol{\chi}$ de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\xi}^g = \begin{pmatrix} g(\boldsymbol{x}_1) & \dots & g(\boldsymbol{x}_r) \\ \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}_1) & \dots & \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}_r) \end{pmatrix}, \quad \text{où } \boldsymbol{\xi}^g \text{ est l'image par } g \text{ du plan } \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \dots & \boldsymbol{x}_r \\ \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}_1) & \dots & \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}_r) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Remarque 2. Si un modèle de régression est $(\mathcal{G}, \mathcal{Q})$-équivariant alors le groupe $\mathcal{G}$ induit une opération sur l'ensemble des matrices des moments des plans dont le support est inclus dans $\boldsymbol{\chi}$:

$$M\big(\boldsymbol{\xi}^g\big) = Q_g M(\boldsymbol{\xi}) Q_g', \quad \forall \boldsymbol{\xi} \text{ de support } \boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{\chi}, \forall g \in \mathcal{G}. \tag{6}$$

Définition 2.5. Soit un modèle de régression $(\mathcal{G}, \mathcal{Q})$-équivariant. Un plan $\boldsymbol{\xi}$ est $\mathcal{G}$-faiblement invariant si pour tout $g \in \mathcal{G}$, $M(\boldsymbol{\xi}^g) = M(\boldsymbol{\xi})$.

Définition 2.6. Considérons un modèle polynomial complet de degré d et un domaine expérimental $\boldsymbol{\chi}$ égal à une boule de $\mathbb{R}^v$ centrée en $\mathbf{0}$. Un plan $\boldsymbol{\xi}$ est dit isovariant s'il est $\mathcal{G}_{\mathrm{orth}}$-faiblement invariant.

3. Fonction E-génératrice des moments et $\mathcal{G}$-invariance faible

Définition 3.1. Soient un modèle polynomial complet de degré d et E une matrice symétrique réelle d'ordre v définie positive. La fonction E-génératrice des moments du modèle polynomial complet A_d de degré d, $\mathrm{MGF}_E^{A_d}(\boldsymbol{\xi})$, est définie par la relation suivante :

$$\mathrm{MGF}_E^{A_d}(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{t}) = \mathbb{E}_{\boldsymbol{\xi}}\big[\big(1+ <\boldsymbol{t}, \boldsymbol{X}>_E\big)^{2d}\big], \quad \forall \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^v, \text{où } <\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}>_E = \boldsymbol{t}' E \boldsymbol{x} \text{ pour tout } (\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}) \text{ de } \mathbb{R}^v \times \mathbb{R}^v. \tag{7}$$

Remarque 3. La fonction I_v-génératrice des moments, $\mathrm{MGF}_{I_v}^{A_d}(\boldsymbol{\xi})$, également notée $\mathrm{MGF}^{A_d}(\boldsymbol{\xi})$, est égale à la fonction génératrice des moments du modèle polynomial complet de degré d telle qu'elle est définie habituellement, [3].

Nous allons maintenant établir certaines propriétés de la fonction E-génératrice des moments. Pour des démonstrations de ces dernières, nous renvoyons à [1].

Lemme 3.2. *Soient un modèle polynomial complet de degré d et E une matrice symétrique réelle d'ordre v définie positive. La fonction E-génératrice des moments du plan $\boldsymbol{\xi}$ vérifie les propriétés suivantes* :

$$\mathrm{MGF}_E^{A_d}(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{t}) = \mathrm{MGF}^{A_d}(\boldsymbol{\xi})(E\boldsymbol{t}) = \mathrm{MGF}^{A_d}\big(E^{1/2}\boldsymbol{\xi}\big)\big(E^{1/2}\boldsymbol{t}\big) = \mathrm{MGF}^{A_d}(E\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{t}), \quad \forall \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^v. \tag{8}$$

Proposition 1. *Soit un modèle polynomial complet de degré d $(\mathcal{G}, \mathcal{Q})$-équivariant pour un groupe $\mathcal{G}$ qui agit linéairement sur $\boldsymbol{\chi}$. Supposons que le groupe $\{U_g,\ g \in \mathcal{G}\}$, associé à l'action linéaire de $\mathcal{G}$ sur $\boldsymbol{\chi}$, est compact. Soit E l'une des matrices symétriques réelles définies positives telle que le groupe $\{U_g,\ g \in \mathcal{G}\}$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}_v(E)$, le groupe orthogonal de $\mathbb{R}^v$ pour le produit scalaire défini par E, pour l'existence de E voir* [6]. *Nous avons la relation suivante* :

$$\mathrm{MGF}_E^{A_d}(\boldsymbol{\xi})\big(g(\boldsymbol{t})\big) = \mathrm{MGF}_E^{A_d}\big(\boldsymbol{\xi}^{g^{-1}}\big)(\boldsymbol{t}), \quad \forall \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^v, \forall g \in \mathcal{G}. \tag{9}$$

Définition 3.3. Soient un groupe $\mathcal{G} = \{U_g,\ g \in \mathcal{G}\}$ qui agit linéairement sur $\boldsymbol{\chi}$ et un modèle polynomial complet de degré d sur un domaine expérimental $\boldsymbol{\chi}$. La fonction E-génératrice des moments du plan $\boldsymbol{\xi}$, $\mathrm{MGF}_E^{A_d}(\boldsymbol{\xi})$, est $\mathcal{G}$-invariante si :

$$\mathrm{MGF}_E^{A_d}(\boldsymbol{\xi})\big(g(\boldsymbol{t})\big) = \mathrm{MGF}_E^{A_d}(\boldsymbol{\xi})(\boldsymbol{t}), \quad \forall \boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^v, \forall g \in \mathcal{G}. \tag{10}$$

Lemme 3.4. *Considérons un domaine expérimental $\boldsymbol{\chi}$ inclus dans $\mathbb{R}^v$ et d'intérieur non vide. Soit un modèle polynomial complet de degré d $(\mathcal{G}, \mathcal{Q})$-équivariant pour un groupe $\mathcal{G}$ qui agit linéairement sur $\boldsymbol{\chi}$. Supposons que le groupe $\{U_g,\ g \in \mathcal{G}\}$, associé à l'action linéaire de $\mathcal{G}$ sur $\boldsymbol{\chi}$, est compact. Soit E l'une des matrices symétriques réelles définies positives telle que le groupe $\{U_g,\ g \in \mathcal{G}\}$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}_v(E)$, pour l'existence de E voir* [6]. *Le plan $\boldsymbol{\xi}^E$, image du plan $\boldsymbol{\xi}$ par la matrice E, est $\mathcal{G}$-faiblement invariant si et seulement si le plan $\boldsymbol{\xi}$ est $\mathcal{G}'$-faiblement invariant, avec $\mathcal{G}' = \{U'_g,\ g \in \mathcal{G}\}$.*

Proposition 2. *Considérons un domaine expérimental $\boldsymbol{\chi}$ inclus dans $\mathbb{R}^v$ et d'intérieur non vide. Soit un modèle polynomial complet de degré d $(\mathcal{G}, \mathcal{Q})$-équivariant pour un groupe $\mathcal{G}$ qui agit linéairement sur $\boldsymbol{\chi}$. Supposons que le groupe $\{U_g,\ g \in \mathcal{G}\}$, associé à l'action linéaire de $\mathcal{G}$ sur $\boldsymbol{\chi}$, est compact. Soit E l'une des matrices symétriques réelles définies positives telle que le groupe $\{U_g,\ g \in \mathcal{G}\}$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}_v(E)$, pour l'existence de E voir* [6]. *Le plan $\boldsymbol{\xi}^E$ est $\mathcal{G}'$-faiblement invariant, avec $\mathcal{G}' = \{U'_g,\ g \in \mathcal{G}\}$, si et seulement si la fonction E-génératrice des moments, $\mathrm{MGF}_E^{A_d}(\boldsymbol{\xi})$, est $\mathcal{G}$-invariante.*

Théorème 3.5. *Considérons un domaine expérimental $\boldsymbol{\chi}$ inclus dans $\mathbb{R}^v$ et d'intérieur non vide. Soit un modèle polynomial complet de degré d $(\mathcal{G}, \mathcal{Q})$-équivariant pour un groupe $\mathcal{G}$ qui agit linéairement sur $\boldsymbol{\chi}$. Supposons que le groupe $\{U_g,\ g \in \mathcal{G}\}$, associé à l'action linéaire de $\mathcal{G}$ sur $\boldsymbol{\chi}$, est compact. Soit E l'une des matrices symétriques réelles définies positives telle que le groupe $\{U_g,\ g \in \mathcal{G}\}$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}_v(E)$, pour l'existence de E voir* [6]. *La fonction E-génératrice des moments, $\mathrm{MGF}_E(\boldsymbol{\xi})$, est $\mathcal{G}$-invariante si et seulement si le plan $\boldsymbol{\xi}$ est $\mathcal{G}$-faiblement invariant.*

Remarque 4. Le lien que le Théorème 3.5 établit entre l'entre l'invariance faible et l'invariance de la fonction génératrice des moments est remarquable : nous transformons le problème initial en un problème d'invariance polynomiale qu'il est possible de traiter algorithmiquement à l'aide de l'algèbre commutative computationnelle, voir [4] pour l'application des bases de Gröbner à la résolution de ce type de problème.

4. Construction de plans $\mathcal{G}$-faiblement invariants

Nous rappelons un lemme classique, [6], qui précise la nature d'un sous-groupe compact de $\mathcal{GL}_v(\mathbb{R})$.

Lemme 4.1. *Soit $\mathcal{G}$ un sous-groupe compact de $\mathcal{GL}_v(\mathbb{R})$. Le sous-groupe $\mathcal{G}$ est conjugué à un sous-groupe $\mathcal{K}$ du groupe orthogonal $\mathcal{O}_v(I_v)$ dans $\mathcal{GL}_v(\mathbb{R})$, c'est-à-dire il existe $A \in \mathcal{GL}_v(\mathbb{R})$ tel que $\mathcal{G} = A\mathcal{K}A^{-1}$.*

Remarque 5. Soit $\mathcal{G}$ un sous-groupe compact de $\mathcal{GL}_v(\mathbb{R})$. Nous avons rappelé ci-dessus qu'il existe une matrice E définie positive telle que $\mathcal{G}$ est un sous-groupe compact de $\mathcal{O}_v(E)$. Un calcul direct montre que nous pouvons prendre $E = (AA')^{-1}$.

Théorème 4.2. *Soit un modèle polynomial complet de degré d $(\mathcal{G}, \mathcal{Q})$-équivariant pour un groupe $\mathcal{G}$ qui agit linéairement sur $\boldsymbol{\chi}$. Supposons que le groupe $\{U_g,\ g \in \mathcal{G}\}$, associé à l'action linéaire de $\mathcal{G}$ sur $\boldsymbol{\chi}$, est compact. Soit A l'une des matrices inversibles telle que le groupe $\{U_g,\ g \in \mathcal{G}\}$ est conjugué à $\mathcal{K}$, un sous-groupe de $\mathcal{O}_v(I_v)$, pour l'existence de A voir le Lemme* 5.1. *La matrice $E = (AA')^{-1}$ est définie positive et telle que $\mathcal{G}$ est un sous-groupe compact de $\mathcal{O}_v(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes* :

(i) *La fonction E-génératrice des moments, $\mathrm{MGF}_E^{A_d}(\boldsymbol{\xi})$, est $\mathcal{G}$-invariante.*
(ii) *La fonction génératrice des moments de $\boldsymbol{\xi}^{\boldsymbol{A}^{-1}}$, $\mathrm{MGF}_{I_v}^{A_d}(\boldsymbol{\xi}^{A^{-1}})$, est $\mathcal{K}$-invariante.*

Remarque 6. Soient $\boldsymbol{\chi}$ un domaine expérimental de $\mathbb{R}^v$ d'intérieur non vide et un modèle de régression polynomiale complet de degré d $(\mathcal{G}, \mathcal{Q})$-équivariant pour l'action linéaire d'un sous-groupe compact de $\mathcal{GL}_v(\mathbb{R})$. Pour construire un plan expérimental $\mathcal{G}$-faiblement invariant, nous proposons la méthode suivante.

(i) Déterminer $A \in \mathcal{GL}_v(\mathbb{R})$ et $\mathcal{K}$ un sous-groupe de $\mathcal{O}_v(\mathbb{R})$ tels que $\mathcal{G} = A\mathcal{K}A^{-1}$.

(ii) Choisir un plan $\boldsymbol{\eta}$, tel que le support de $\boldsymbol{\eta}^A$ est inclus dans $\boldsymbol{\chi}$, parmi la liste des plans à la disposition de l'expérimentateur pour lesquels la fonction génératrice des moments du plan expérimental $\boldsymbol{\eta}$, $\mathrm{MGF}^{A_d}(\boldsymbol{\eta})$, est $\mathcal{K}$-invariante.

(iii) Le plan expérimental $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta}^A$ est alors un plan $\mathcal{G}$-faiblement invariant.

5. Conclusion et perspectives

La connaissance de dispositifs isovariants pour des cardinaux variés de l'ensemble des points support du plan permet d'être assuré de disposer de plans qui seront de surcroît $\mathcal{K}$-faiblement invariants pour $\mathcal{K}$ tout sous-groupe compact du groupe orthogonal. La méthode proposée à la remarque 6 permet alors d'en déduire des plans $\mathcal{G}$-faiblement invariants.

Il est également souhaitable de construire des plans pour lesquels nous connaissons les coordonnées exactes des points support du plan afin de pouvoir utiliser des techniques de statistique algébrique, [7], pour procéder à l'étude des propriétés de ces plans. Nous indiquerons dans un prochain article comment parvenir à ce résultat en utilisant des techniques d'algèbre computationnelle et la caractérisation polynomiale que nous avons montrée au 3.5. Rappelons que l'utilisation de la statistique algébrique est d'une utilité majeure pour l'expérimentateur puisqu'elle permet par exemple de résoudre les problèmes fondamentaux suivants : quels sont les modèles identifiables ? comment déterminer complètement les confusions d'effets ?

Références

[1] F. Bertrand, Isovariance et $\mathcal{G}$-invariance faible en planification expérimentale, Prépublication de l'IRMA http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00276011/fr/, 2008.

[2] G.E.P. Box, J.S. Hunter, Multi-factor experimental designs for exploring response surfaces, Annals of Mathematical Statistics 28 (1957) 195–241.

[3] N. Gaffke, B. Heiligers, Approximate designs for polynomial regression: Invariance, admissibility and optimality, in: S. Ghosh, C.R. Rao (Eds.), Handbook of Statistics, vol. 13, Elsevier Science B.V., 1996, pp. 1149–1199, ch. 30.

[4] M. Kreuzer, L. Robiano, Computational Commutative Algebra 1, Springer, Berlin–Heidelberg, 2000.

[5] M. Kreuzer, L. Robiano, Computational Commutative Algebra 2, Springer, Berlin–Heidelberg, 2005.

[6] M. Mneimé, F. Testard, Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques, Hermann, Paris, 1986.

[7] G. Pistone, E. Riccomagno, H.P. Wynn, Algebraic Statistics: Computational Commutative Algebra in Statistics, Monographs on Statistics and Applied Probability, vol. 89, Chapman & Hall/CRC, 2000.