Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 1159–1162
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie analytique/Analyse complexe

Caractérisation fonctionnelle de la cohomologie algébrique d'une variété projective

Michel Méo

I.E.C.N., Université de Nancy I, boulevard des Aiguillettes, BP 239, 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy, France

Reçu le 23 juin 2008 ; accepté le 23 septembre 2008

Disponible sur Internet le 15 octobre 2008

Présenté par Jean-Pierre Demailly

Résumé

On montre qu'un courant fermé dans une variété projective est cohomologue à un cycle algébrique à coefficients complexes si et seulement si il est limite faible de tels cycles. Cela nous permet de présenter deux approches fonctionnelles au problème de l'algébricité des classes de cohomologie. D'une part, en utilisant la caractérisation des courants associés aux cycles algébriques par la transformation de Chow, on obtient que les obstructions se traduisent par une orthogonalité à certaines fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur la Grassmannienne, images en général seulement de distributions par un opérateur différentiel linéaire explicite, ce qui force une convergence dans l'espace des fonctions $\mathcal{C}^k$. D'autre part, en se plaçant sur l'espace des diviseurs de la Grassmannienne, on introduit une équation différentielle scalaire dont la résolution permet l'approximation. ***Pour citer cet article : M. Méo, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Functional characterization of the algebraic cohomology of a projective manifold. We prove that a closed current on a projective manifold is cohomologous to an algebraic cycle with complex coefficients if and only if it is a weak limit of such cycles. This allows us to present two functional approaches of the problem of the algebraicity of cohomology classes. On the one hand, using the characterization of currents associated to algebraic cycles by the Chow transformation, we reduce the obstructions to an orthogonality condition with certain smooth functions on the Grassmannian, which are in general merely images of distributions by a suitable explicitly defined linear differential operator; this forces a convergence in the space of $\mathcal{C}^k$ functions. On the other hand, by going onto the space of divisors of the Grassmannian, we introduce a scalar differential equation whose resolution gives the approximation. ***To cite this article: M. Méo, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Équations différentielles caractérisant les formes de Chow de cycles algébriques de X

Soit X une sous-variété complexe fermée de dimension pure de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}_n$ et $i : X \to \mathbb{P}_n$ l'injection naturelle. Pour $e \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $p \in \mathbb{N}$ avec $p \leqslant \dim X$, on note $G(p+1, V^*)$ la Grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension $p+1$ de V^* avec V la puissance symétrique $S^e\mathbb{C}^{n+1}$. Pour T un courant

Adresse e-mail : Michel.Meo@iecn.u-nancy.fr.

1631-073X/$ – see front matter © 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2008.09.023

de bidimension (p, p) dans X, on définit $\mathcal{C}'(T) = \mathcal{C}_e(i_*T)$ avec $\mathcal{C}_e$ la transformation de Chow considérée dans [3], paragraphe 5. C'est un courant de bidegré $(1, 1)$ dans $G(p+1, V^*) = G(q, V)$ avec $q = N - p$ et $\dim V = N + 1$, obtenu en faisant agir, sur l'image directe de i_*T par le plongement de Veronese $\mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_N$, la transformation de Chow $\mathcal{C}$ des courants définis sur $\mathbb{P}_N$. Rappelons que $\mathcal{C}$ est définie en considérant la sous-variété d'incidence Γ dans $G(q, V) \times \mathbb{P}_N$, formée des couples $(s, [x])$ vérifiant $s \ni x$. Les restrictions à Γ des projections canoniques étant notées $\alpha : \Gamma \to G(q, V)$ et $\beta : \Gamma \to \mathbb{P}_N$, on a alors $\mathcal{C} = \alpha_*\beta^*$.

Pour des $d_\nu \in \mathbb{N}^*$ et des $f_\nu \in V^{d_\nu, q}$ les espaces de polynômes considérés dans [3], paragraphe 1, on détermine les conditions sur $\sum_\nu c_\nu \log \|f_\nu\|$ où les $c_\nu \in \mathbb{R}$, pour que le diviseur Σ associé dans $G(q, V)$ soit la forme de Chow d'un cycle algébrique Z de X de dimension p, à coefficients réels. La méthode utilisée ici permet de traiter le cas où X est quelconque, alors que dans [3] la mise en équation ne concernait que l'espace projectif.

Proposition 1. *Il existe une famille finie d'opérateurs différentiels linéaires $(\mathcal{P}_j)_{1 \leqslant j \leqslant j_0}$ sur $G(q, V)$ et des fonctions $(\psi_j)_{1 \leqslant j \leqslant j_0}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $G(q, V)$ tels que Σ est la forme de Chow d'un cycle algébrique de X si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ vérifiant $\mathcal{P}_j(\sum_\nu c_\nu \log \|f_\nu\|) = t\psi_j$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant j_0$.*

Démonstration. On note υ la composée de i avec le plongement de Veronese et on suppose que l'image $\upsilon(X)$ de X dans $\mathbb{P}_N$ est définie par $Q_1 = \cdots = Q_{k_0} = 0$ avec les Q_k des polynômes homogènes de degrés b_k engendrant l'idéal de $\upsilon(X)$. La formule (4.10) de [3] est une condition nécessaire et suffisante pour que Σ s'écrive $\mathcal{C}(\theta)$ pour θ un courant de bidegré (q, q) dans $P(V)$. Il s'agit de voir à quelles conditions θ s'écrit υ_*T. Comme θ est fermé et X est lisse, cela équivaut à ce que les produits $Q_k\theta_{IJ}$ soient $= 0$ dans $V - \{0\}$ puis à ce que $\frac{\partial^{b_k}}{\partial x_0^{i_0} \cdots \partial x_N^{i_N}}(Q_k\theta_{IJ}) = 0$ pour $i_0 + \cdots + i_N = b_k$ par une propriété d'homogénéité, donc à ce que $(\frac{\partial^{b_k}}{\partial x_0^{i_0} \cdots \partial x_N^{i_N}}(Q_k\theta_{IJ}))\tilde{} = 0$. D'après la démonstration du lemme (5.1) de [3] et avec une récurrence, ces dernières conditions sont de la forme $\mathcal{Q}\tilde{\theta}_{IJ} = 0$ où $\mathcal{Q}$ parcourt un ensemble fini d'opérateurs différentiels linéaires holomorphes à coefficients polynômiaux. Comme les $\tilde{\theta}_{IJ}$ sont $= \partial_I \bar{\partial}_J(\sum_\nu c_\nu \log|f_\nu|)$ à des coefficients près, on obtient des conditions de la forme $\mathcal{Q}\partial_I \bar{\partial}_J(\tau^*(\sum_\nu c_\nu \log\|f_\nu\|) + (\sum_\nu c_\nu d_\nu)\log|z^1 \wedge \cdots \wedge z^q|) = 0$ avec $\tau : V^q \to G(q, V)$ définie par $\tau(z^1, \ldots, z^q) = \mathrm{vect}(z^1, \ldots, z^q)$. Elles équivalent à des conditions de la forme $\mathcal{P}_j(\sum_\nu c_\nu \log\|f_\nu\|) = (\sum_\nu c_\nu d_\nu)\psi_j$. Comme $\partial_I \bar{\partial}_J \log|f_\nu|$ est à support dans $f_\nu^{-1}(0)$, elles équivalent encore à l'existence d'un $t \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{P}_j(\sum_\nu c_\nu \log\|f_\nu\|) = t\psi_j$ pour tout j. Pour conclure, comme $e \geqslant 2$ et d'après [3], paragraphe 5, le courant T est un cycle algébrique réel de X. $\square$

Remarquons qu'on a un résultat analogue en prenant les $c_\nu \in \mathbb{C}$ et que pour U une distribution sur $G(q, V)$ et Ω la $(1, 1)$-forme fondamentale de la métrique sur $G(q, V)$, $\mathrm{dd^c}U + t\Omega$ est l'image par $\mathcal{C}'$ d'un courant T de bidimension (p, p) nécessairement fermé dans X si et seulement si $\mathcal{P}_j(U) = t\psi_j$ pour tout j.

2. Approximation par des cycles algébriques de X

Pour T un courant fermé de bidimension (p, p) dans X, on cherche les conditions pour que T soit adhérent pour la topologie faible au sous-espace vectoriel des cycles algébriques à coefficients dans $\mathbb{C}$.

On considère le sous-espace vectoriel $\mathcal{F} = \{\sum_\nu c_\nu \log\|f_\nu\|\}$ de l'espace $\mathcal{D}'(G(q, V))$ des distributions sur $G(q, V)$ à valeurs complexes, l'opérateur $\mathcal{P} = (\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_{j_0}) : \mathcal{D}'(G(q, V)) \to \mathcal{D}'(G(q, V))^{\oplus j_0}$ et l'application linéaire canonique $\Lambda : \mathcal{D}'(G(q, V))^{\oplus j_0} \to \mathcal{D}'(G(q, V))^{\oplus j_0}/\mathbb{C}\Psi$ avec $\Psi = (\psi_j)_{1 \leqslant j \leqslant j_0}$.

Munissons $\mathcal{F}$ de la topologie induite par la topologie faible sur $\mathcal{D}'(G(q, V))$ et écrivons $(\Lambda\mathcal{P})_{|\mathcal{F}} = \Lambda\mathcal{P}\mathcal{I}$ où $\mathcal{I} : \mathcal{F} \to \mathcal{D}'(G(q, V))$ est l'injection canonique. D'après le théorème d'approximation de Demailly (cf. [1]), $\mathcal{F}$ est dense dans $\mathcal{D}'(G(q, V))$ donc la transposée ${}^t\mathcal{I}$ est injective. Comme $\mathcal{D}'(G(q, V))$ est un espace vectoriel topologique localement convexe, par le théorème de Hahn–Banach, ${}^t\mathcal{I}$ est aussi surjective et permet d'identifier $\mathcal{D}(G(q, V))$ au dual topologique $\mathcal{F}'$.

Comme sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(G(q, V))$, $\mathcal{F}$ est localement convexe séparé et on peut donc écrire (cf. [4], Proposition 35.4) que $\mathrm{Ker}((\Lambda\mathcal{P})_{|\mathcal{F}})^\perp$ est l'adhérence dans $\mathcal{D}(G(q, V))$ pour la topologie faible $\sigma(\mathcal{D}(G(q, V)), \mathcal{F})$ de $\mathrm{Im}^t((\Lambda\mathcal{P})_{|\mathcal{F}}) = \mathrm{Im}({}^t(\Lambda\mathcal{P})) = \{\sum_j ({}^t\mathcal{P}_j)(\phi_j)$ avec $\phi_j \in \mathcal{D}(G(q, V))$ et $\sum_j \int \phi_j \psi_j = 0\}$. On note cette adhérence $\overline{\mathrm{Im}({}^t(\Lambda\mathcal{P}))}^{\mathcal{F}} \subset \mathcal{D}(G(q, V))$. On note aussi $\deg T$ le degré de T calculé par rapport à la métrique induite dans X par la métrique de Fubini–Study ω dans $\mathbb{P}_N$.

Proposition 2. *T est adhérent à $\{$cycle algébrique de $X\}$ si et seulement si U défini par l'égalité $\mathcal{C}'(T) = (\deg T)\Omega + \mathrm{dd^c} U$ est orthogonal à $\overline{\mathrm{Im}({}^t(\Lambda\mathcal{P}))}^{\mathcal{F}}$.*

Démonstration. Si T est adhérent à $\{$cycle algébrique de $X\}$, $\mathcal{C}'(T)$ est adhérent à $\{\mathcal{C}'(Z)$ où Z cycle algébrique de $X\}$. Or il existe $W : \{(1,1)$-courant fermé sur $G(q,V)\} \to \mathcal{D}'(G(q,V))$ application linéaire continue telle que $\Theta = (\deg\Theta)\Omega + \mathrm{dd^c} W(\Theta)$ pour tout Θ. Alors $W(\mathcal{C}'(T))$ est adhérent à $\{W(\mathcal{C}'(Z))$ où Z cycle algébrique de $X\}$ donc $U + \mathrm{Cste}$ est adhérent à $\mathcal{F} \cap \mathrm{Ker}(\Lambda\mathcal{P})$. Réciproquement si U est adhérent à $\mathcal{F} \cap \mathrm{Ker}(\Lambda\mathcal{P})$, alors $\mathcal{C}'(T) - (\deg T)\Omega$ est adhérent à $\{\mathcal{C}'(Z) - (\deg Z)\Omega$ où Z cycle algébrique de $X\}$. Mais comme Ω est transformée de Chow d'une puissance de la forme de Fubini–Study qui n'est pas à support dans la sous-variété de Veronese, $T \to \mathcal{C}'(T) - (\deg T)\Omega$ est injective et la formule d'inversion pour la transformation de Chow permet d'en déduire que T est adhérent à $\{$cycle algébrique de $X\}$. Maintenant U est adhérent à $\mathcal{F} \cap \mathrm{Ker}(\Lambda\mathcal{P})$ si et seulement si U est orthogonal à l'orthogonal dans $\mathcal{D}(G(q,V)) = \mathcal{F}'$ de $\mathcal{F} \cap \mathrm{Ker}(\Lambda\mathcal{P})$ c'est-à-dire U est orthogonal à $\overline{\mathrm{Im}({}^t(\Lambda\mathcal{P}))}^{\mathcal{F}}$. $\square$

D'après la remarque qui suit la Proposition 1, U appartient à $\mathrm{Ker}(\Lambda\mathcal{P})$ c'est-à-dire est orthogonal à $\overline{\mathrm{Im}({}^t(\Lambda\mathcal{P}))}^{\mathcal{D}'}$ qui est l'adhérence de $\mathrm{Im}({}^t(\Lambda\mathcal{P}))$ dans $\mathcal{D}(G(q,V))$.

Proposition 3. *Un courant T fermé de bidimension (p,p) dans X est adhérent à $\{$cycle algébrique de $X\}$ si et seulement si sa classe de cohomologie $\{T\}$ est algébrique.*

Démonstration. L'application $T \to \{T\}$ est continue pour la topologie faible, donc si T est adhérent à $\{$cycle algébrique de $X\}$, alors $\{T\}$ est adhérente à $\{$classe de cohomologie algébrique de $X\}$ qui est fermé puisque c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie. Pour la réciproque, on suppose après régularisation que T est d'ordre 0. On considère $C_p(X)$ l'espace des cycles algébriques de dimension p de X, à coefficients > 0 et $\mathcal{C}'' : \{$forme différentielle continue θ de bidegré (p,p) dans $X\} \to \{$fonction continue dans $C_p(X)\}$ la transformation de Chow obtenue par intégration sur les cycles. Etant donné un cycle $\sum_\nu c_\nu Z_\nu$ avec des Z_ν irréductibles, on a donc $\langle \sum_\nu c_\nu [Z_\nu], \theta\rangle = \langle \mathcal{C}''(\theta), \sum_\nu c_\nu \delta_{Z_\nu}\rangle$ avec δ_{Z_ν} la masse de Dirac en $Z_\nu \in C_p(X)$, d'où on déduit que $\sum_\nu c_\nu [Z_\nu] = ({}^t\mathcal{C}'')(\sum_\nu c_\nu \delta_{Z_\nu})$. Donc T est adhérent à $\{$cycle algébrique de $X\}$ faiblement pour les θ continues si et seulement si $T \in \overline{\mathrm{Im}({}^t\mathcal{C}'')}^{\mathrm{cont.}}$ puisque les combinaisons linéaires de masses de Dirac forment une partie dense de l'espace des mesures à supports compacts sur $C_p(X)$. Encore d'après [4], Proposition 35.4, cela signifie que T est orthogonal au noyau de $\mathcal{C}''$ qu'on va maintenant déterminer. Si $\mathcal{C}''(\theta) = 0$, alors comme pour $P(s)$ un sous-espace projectif de $\mathbb{P}_n$ de codimension $\dim X - p$, $\mathcal{C}''(\theta)(X \cap P(s)) = \int_{P(s)} i_*\theta = \mathcal{C}_1(i_*\theta)$, on a $\mathcal{C}_1(i_*\mathrm{dd^c}\theta) = 0$ qui est de bidegré $(1,1)$ et par injectivité de la transformation de Chow dans ce cas-là, on a ensuite $\mathrm{dd^c}\theta = 0$. Grâce aux propriétés des variétés kähleriennes compactes, on peut écrire $\theta = h + \partial u + \bar\partial v$ avec h harmonique, u de classe $\mathcal{C}^1$ de bidegré $(p-1,p)$ et v de classe $\mathcal{C}^1$ de bidegré $(p,p-1)$. Alors $\mathcal{C}''(\theta) = \mathcal{C}''(h)$ et donc $\{h\}\{Z\} = 0$ pour tout Z. Ainsi $\langle T,\theta\rangle = \langle T,h\rangle = \{T\}\{h\} = 0$. $\square$

Proposition 4. *On a l'inclusion $\overline{\mathrm{Im}({}^t(\Lambda\mathcal{P}))}^{\mathcal{F}} \subset {}^t(\Lambda\mathcal{P})(\mathcal{D}'(G(q,V))^{\oplus j_0})$.*

Démonstration. On considère $\mathrm{Div}(G(q,V))$ l'espace des diviseurs de $G(q,V)$ à coefficients > 0 qui n'est autre que $\bigcup_{d\geqslant 1} P(V^{d,q})$ et $\mathcal{R}$: $\{$forme différentielle $\mathcal{C}^\infty$ de bidimension $(1,1)$ dans $G(q,V)\} \to \{$fonction $\mathcal{C}^0$ dans $\mathrm{Div}(G(q,V))\}$ la transformation de Radon obtenue par intégration sur les diviseurs. De même que dans la démonstration de la Proposition 3, on voit que $\mathrm{Ker}\,\mathcal{R} = \mathrm{Im}\,\partial + \mathrm{Im}\,\bar\partial$. Une fonction ϕ de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $G(q,V)$ appartient à $\overline{\mathrm{Im}({}^t(\Lambda\mathcal{P}))}^{\mathcal{F}}$ si et seulement si $\int_{G(q,V)} \phi \log\|f\| = 0$ pour toute $[f] \in C_p(X) \hookrightarrow \mathrm{Div}(G(q,V))$. Remplaçant f par tf avec $t \in \mathbb{C}^*$, on a $\int_{G(q,V)} \phi = 0$ et donc ϕ identifiée à une forme différentielle de degré maximum est $= \mathrm{dd^c}\Phi$ avec Φ qu'on peut choisir telle que $\int_{G(q,V)} \Phi \wedge \Omega = 0$. D'après la formule de Lelong–Poincaré, la condition s'écrit alors $\mathcal{R}(\Phi)(H) = 0$ pour tout $H \in C_p(X)$. Soit I l'idéal de $\mathcal{C}^0(\mathrm{Div}(G(q,V)))$ formé des fonctions nulles sur $C_p(X)$ (cf. [2]). Comme $\bigcap_{v\in I} v^{-1}(0) = C_p(X)$ est égale, d'après la caractérisation des courants associés aux cycles algébriques par la transformation de Chow de [3], à $\{[f] \in \mathrm{Div}(G(q,V)), (\Lambda\mathcal{P})(\log\|f\|) = 0\}$, on peut exprimer une fonction v dans I sous la forme $v = \sum_j \int_{G(q,V)} \mathcal{P}_j(\log\|f\|) B_j([f],\cdot)$. Si de plus $v \in \mathrm{Im}\,\mathcal{R}$, en utilisant la linéarité par rapport à $\log\|f\|$, on a $v = \sum_j \int_{G(q,V)} \mathcal{P}_j(\log\|f\|)\beta_j$. Ainsi il existe des distributions β_j sur $G(q,V)$ telles que $\sum_j \int_{G(q,V)} \beta_j \psi_j = 0$ et $v = \mathcal{R}(\Phi_1)$ où Φ_1 vérifie $\int_{G(q,V)} \Phi_1 \wedge \Omega = 0$ et $\mathrm{dd^c}\Phi_1 = \sum_j {}^t\mathcal{P}_j(\beta_j)$. $\square$

Les obstructions proviennent du fait que les β_j ne sont pas $\mathcal{C}^\infty$ en général, mais d'ordre $\leqslant k$. Il résulte de la Proposition 4 que s'il existe une suite $(U_m)_m$ de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dans $G(q,V)$ convergeant faiblement vers U telle que $\mathcal{P}(U_m) \to (\deg T)\Psi$ dans $\mathcal{D}^k(G(q,V))^{\oplus j_0}$, alors $\{T\}$ est algébrique.

Intrinsèquement, avec T de plus $\mathcal{C}^\infty$, on considère le transformé de Chow $\hat{\mathcal{C}}(T)$ qui est un $(1,1)$-courant fermé sur l'espace des cycles $C_{\dim X-p-1}(X)$. Pour tout tel cycle c, il y a un voisinage ouvert W de son support tel que $T_{|W} = \mathrm{dd^c} S$ avec S qui est $\mathcal{C}^\infty$ dans W. Soit $\mathcal{W}$ un voisinage ouvert de c tel que tout élément de $\mathcal{W}$ a son support dans W. Alors $\hat{\mathcal{C}}(T)_{|\mathcal{W}} = \mathrm{dd^c} u$ avec $u(c') = \int_{c'} S$, le problème étant que u est seulement continue.

Par la Proposition (2.5) de [3], on peut alors prendre $U(s) = \int_X T \wedge v^*\gamma_s$ avec γ_s une forme de Green explicite de $P(s)$ dans $\mathbb{P}_N$. Dans la définition de γ_s, remplaçant ρ_s par $\rho_s + \frac{1}{m}$, on obtient une régularisation $(\gamma_{s,m})_m$ de γ_s. On pose $U_m(s) = \int_X T \wedge v^*\gamma_{s,m}$ et il s'agit de discuter la nature de la convergence de $\mathcal{P}_j(U_m)(s) = \int_X T \wedge \mathcal{P}_j(v^*\gamma_{s,m})$ vers $(\deg T)\psi_j(s)$ pour tout j. Écrivant ensuite $\mathcal{P}_j(v^*\gamma_s) = \psi_j(s)\omega^p_{|X} + \partial(\rho^{1-L}_{s|X} a_{j,s}) + \bar\partial(\rho^{1-L}_{s|X} b_{j,s})$ avec $a_{j,s}$ de bidegré $(p-1,p)$ et $b_{j,s}$ de bidegré $(p,p-1)$, la convergence ponctuelle signifie l'orthogonalité $\int_X T \wedge \Delta_{j,s} = 0$ avec $\Delta_{j,s} = \lim_{\lambda\to 0}(\lambda\rho^{\lambda-L}_{s|X}(\partial\rho_{s|X} \wedge a_{j,s} + \bar\partial\rho_{s|X} \wedge b_{j,s}))$ et se pose la question de la connexité de $\{\int_X T \wedge \Delta_{j,s}/\psi_j(s)\}$ qui est une partie de $\mathbb{C}$ contenant 0.

3. Équation différentielle caractéristique sur Div$(G(q,V))$

Donnons un autre point de vue pour la caractérisation des classes algébriques, avec T d'ordre 0.

Avec $\mathcal{R}$ définie dans la démonstration de la Proposition 4, l'application transposée ${}^t\mathcal{R}$ à valeurs dans $\{(1,1)$-courant d'ordre 0 fermé dans $G(q,V)\}$ est surjective. Soit donc λ un courant d'ordre 0 de degré maximum sur chaque composante de $\mathrm{Div}(G(q,V))$ tel que $\mathcal{C}'(T) = ({}^t\mathcal{R})(\lambda)$, ce qui s'écrit encore $\mathcal{C}'(T) = \int_{H\in \mathrm{Div}(G(q,V))} \lambda(H)[H]$. Comme $[H] = ({}^t\mathcal{R})(\delta_H)$, $\{T\}$ est algébrique si et seulement si $({}^t\mathcal{R})(\lambda)$ est adhérent faiblement pour les formes différentielles continues à $({}^t\mathcal{R})j_*(\{$courant d'ordre 0 de degré maximum sur chaque composante de $C_p(X)\})$ où $j : C_p(X) \to \mathrm{Div}(G(q,V))$ désigne l'injection naturelle. Cela résulte de même que la Proposition 3 de la densité des combinaisons linéaires de masses de Dirac dans l'espace des mesures. Comme en fait $\mathrm{Im}({}^t\mathcal{C}'')$ peut être décrite comme le noyau d'un opérateur différentiel linéaire, elle est faiblement fermée et donc $\{T\}$ est algébrique si et seulement si il existe une mesure μ sur $C_p(X)$ telle que $T = ({}^t\mathcal{C}'')(\mu)$. Alors $\mathcal{C}'(T) = ({}^t\mathcal{R})j_*\mu$ de sorte que $\lambda - j_*\mu \in \mathrm{Ker}({}^t\mathcal{R})$.

D'autre part de même que dans 1, il y a un opérateur différentiel linéaire

$$E : \mathcal{D}'\big(\mathrm{Div}\big(G(q,V)\big)\big) \to \mathcal{D}'\big(\mathrm{Div}\big(G(q,V)\big)\big)^{\oplus r}$$

ultra-hyperbolique explicite tel que $\mathrm{Im}\,\mathcal{R} = \mathrm{Ker}\,E$ et $\mathrm{Ker}({}^t\mathcal{R}) = \mathrm{Im}({}^tE)$. D'où

Proposition 5. $\{T\}$ *est algébrique si et seulement si il existe des distributions* $g_1,\dots,g_r$ *sur* $\mathrm{Div}(G(q,V))$ *et une mesure* μ *sur* $C_p(X)$ *telles que l'équation* $\lambda = ({}^tE)(g_1,\dots,g_r) + j_*\mu$ *soit vérifiée.*

Références

[1] J.-P. Demailly, Regularization of closed positive currents and intersection theory, J. Algebraic Geometry 1 (1992) 361–409.

[2] B. Malgrange, Sur les fonctions différentiables et les ensembles analytiques, Bull. Soc. Math. France 91 (1963) 113–127.

[3] M. Meo, Caractérisation des courants associés aux cycles algébriques par leur transformé de Chow, J. Math. Pures Appl. (9) 79 (1) (2000) 21–56.

[4] F. Trèves, Topological Spaces, Distributions and Kernels, Academic Press, 1967.