Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 985–988

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie différentielle

Un analogue conforme des applications harmoniques

Vincent Bérard [1]

IRMA, CNRS et Université Louis-Pasteur, 7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France

Reçu le 9 mai 2008 ; accepté après révision le 26 juin 2008

Disponible sur Internet le 15 août 2008

Présenté par Étienne Ghys

Résumé

Sur une surface de Riemann, l'énergie d'une application à valeurs dans une variété riemannienne est une fonctionnelle invariante conforme, ses points critiques sont les applications harmoniques. Nous proposons ici un analogue en dimension supérieure, en construisant une fonctionnelle invariante conforme pour les applications entre deux variétés riemanniennes, dont la source est de dimension n paire. Ses points critiques satisfont une EDP elliptique d'ordre n non linéaire qui est invariante conforme sur la source, on les appelle les applications C-harmoniques. Dans le cas des fonctions, on retrouve l'opérateur GJMS, dont le terme principal est une puissance $n/2$ du laplacien. ***Pour citer cet article : V. Bérard, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abstract

A conformal analogue of harmonic maps. On a Riemannian surface, the energy of a map into a Riemannian manifold is a conformal invariant functional, and its critical points are the harmonic maps. Our main result is a generalization of this theorem when the starting manifold is even dimensional. We then build a conformal invariant functional for the maps between two Riemannian manifolds. Its critical points then called C-harmonic are the solutions of a nonlinear elliptic PDE of order n, which is conformal invariant with respect to the start manifold. For the trivial case of real or complex functions of M, we find again the GJMS operator, with a leading part power to the $n/2$ of the Laplacian. ***To cite this article: V. Bérard, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

1. Introduction

Soit (M^n, g) une variété riemannienne de dimension paire, Graham, Jenne, Mason et Sparling ont démontré en 1987 l'existence d'un opérateur différentiel invariant conforme de terme principal $\Delta^{n/2}$ sur les fonctions C^∞ de M [5]. Nous généralisons l'équation du noyau de cet opérateur sur des fonctions, en une EDP elliptique non linéaire d'ordre n sur des applications de (M^n, g) dans (N, h), qui est invariante conforme par rapport à g.

Soit φ une application C^∞ de (M, g) dans (N, h), on note $T\varphi$ son application tangente qui est une section du fibré $\Omega^1(M) \otimes \varphi^* TN$. On définit ensuite la divergence δ^g sur ce fibré en munissant $\varphi^* TN$ de la connexion de Levi-Civita de TN tirée en arrière par φ.

Adresse e-mail : berard@math.u-strasbg.fr.
[1] L'auteur est soutenu par le contrat 06-BLAN60154-01 de l'ANR.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2008.06.008

Théorème 1.1. *Soient (M^n, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes avec n pair, alors il existe une fonctionnelle invariante conforme par rapport à g sur l'espace des applications C^∞ de (M, g) dans (N, h), dont les points critiques satisfont une équation aux dérivées partielles non linéaire d'ordre n invariante conforme, dont le terme principal est $(\delta^g d)^{n/2-1}\delta^g T$.*

Définition 1.2. On note $\mathcal{E}_n^g$ la fonctionnelle du Théorème 1.1 et on appelle ses points critiques, les applications conformes–harmoniques, qu'on abrège en C-harmoniques.

Formules explicites :

En dimension 2, la fonctionnelle $\mathcal{E}_2^g$ est l'énergie des applications de (M^2, g) dans (N, h) et les applications C-harmoniques sont simplement les applications harmoniques.

Quand $n = 4$, la fonctionnelle $\mathcal{E}_4^g$ s'écrit facilement en terme de courbures de g :

$$\mathcal{E}_4^g(\varphi) = \int_M \left(|\delta^g T\varphi|_h^2 + \frac{2}{3}\operatorname{Scal}^g |T\varphi|_{g,h}^2 - 2(\operatorname{Ric}^g \otimes h)(T\varphi, T\varphi) \right) \mathrm{d}\,\mathrm{vol}_g,$$

où Scal^g et Ric^g désignent respectivement la courbure scalaire et le tenseur de Ricci de g. Soient $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une base orthonormale de TM par rapport à g et R^h le tenseur de courbure de h, l'équation de ses points critiques s'écrit :

$$\delta^g\,\mathrm{d}\delta^g T\varphi + \delta^g\left(\frac{2}{3}\operatorname{Scal}^g - 2\operatorname{Ric}^g \otimes h\right)T\varphi - \sum_{i=1}^n \mathrm{R}^h_{\delta^g T\varphi, T\varphi(e_i)} T\varphi(e_i) = 0.$$

On peut trouver dans la littérature (voir [2,8] et les références citées) une autre généralisation des applications harmoniques qui est non conforme, ce sont les applications biharmoniques, qui sont définies comme étant les points critiques de la biénergie $\varphi \to \int_M |\delta^g T\varphi|_g^2 \,\mathrm{d}\,\mathrm{vol}_g$. Quand (M, g) est conformément plate, les applications C-harmoniques sont biharmoniques pour le bon changement conforme de métrique.

Quand (M, g) est une variété d'Einstein, on a la proposition suivante :

Proposition 1.3. *Soit (M^n, g) une variété d'Einstein de dimension paire et (N, h) une variété riemannienne, alors* :

(i) *Les applications harmoniques de (M, g) dans (N, h) sont C-harmoniques.*
(ii) *Pour $n = 4$, si (M, g) est compacte, de courbure scalaire positive ou nulle et que la courbure sectionnelle de h est négative ou nulle, alors les applications C-harmoniques de (M, g) dans (N, h) sont exactement les applications harmoniques.*

Les points critiques de notre fonctionnelle sont obtenues comme une obstruction à résoudre un problème de Cauchy dégénéré sur une certaine variété riemannienne de dimension $n + 1$ qui admet un bord à l'infini qui est M, c'est la métrique de Poincaré de (M, g). Cette notion généralise le modèle du disque de Poincaré, quand on considère la sphère $\mathbb{S}^n$ munie de sa métrique canonique, comme le bord à l'infini de la boule unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ munie de la métrique hyperbolique. Si n est pair, on a la proposition suivante :

Proposition 1.4. *Soit n un nombre pair, on munit la boule unité ouverte B de $\mathbb{R}^{n+1}$ de la métrique hyperbolique g_{hyp} et on se donne φ une application C^n de $\bar{B}$ dans une variété riemannienne (N, h) qui est harmonique de (B, g_{hyp}) dans (N, h), alors sa restriction à $\partial\bar{B}$ est C-harmonique.*

Dans le cas général, la construction de notre variété X admet une obstruction qui n'intervient pas dans la construction de la fonctionnelle et de ses points critiques, et qui est mesurée par le tenseur d'obstruction (voir [6]). Par exemple en dimension 2 le tenseur d'obstruction est nul et en dimension 4 il s'agit du tenseur de Bach. On peut généraliser la proposition précédente quand (M, g) est une variété qui admet un tenseur d'obstruction nul.

On se contentera dans cette Note de donner une idée des preuves des résultats annoncés, on pourra consulter [1] pour les détails et trouver des exemples d'applications C-harmoniques non harmoniques.

2. Un problème à bord

Soit X^{n+1} l'intérieur d'une variété riemannienne à bord $\partial X = M$, on se donne une fonction r de $\bar{X}$ qui vérifie : $r > 0$ sur X, $r = 0$ sur M et $\mathrm{d}r \neq 0$ sur M. On dit que (X, g_+) est une variété riemannienne conformément compacte, si $r^2 g_+$ se prolonge en une métrique $\bar{g}$ sur $\bar{X}$, ce qui est indépendant du choix de r. De même la classe conforme $g = \bar{g}_{|TM}$ est aussi indépendante du choix de la fonction r, on l'appelle l'infini conforme de (X, g_+) et on la note $(M, [g])$.

Soit (M^n, g) une variété riemannienne de dimension paire, Fefferman et Graham [3] ont montré qu'il existe une unique fonction r de $M \times [0, \varepsilon[$ et une unique famille à un paramètre g_r mod $\mathrm{O}(r^n)$ de métriques sur M avec $g_0 = g$, qui vérifient que la métrique $g_+ = r^{-2}(\mathrm{d}r^2 + g_r)$ définie sur $X = M \times]0, \varepsilon[$ satisfait l'équation $\mathrm{Ric}^{g_+} + n g_+ = \mathrm{O}(r^{n-1} \log r)$, où O est pris par rapport à g quand r tend vers 0. La variété (X, g_+) admet $(M, [g])$ comme infini conforme et on l'appelle la métrique de Poincaré de (M, g). Dans ces conditions, g_r admet un développement asymptotique en $r = 0$ qui ne contient que des termes en puissances paires de r jusqu'à un terme en $r^n \log r$, qui sont entièrement détérminés par des termes de courbure de g.

Soit φ une application C^∞ de (M, g) dans une variété riemannienne (N, h), notre problème à bord est de déterminer les obstructions à prolonger φ en une application $\tilde{\varphi}$ de $\bar{X}$ dans N, qui vérifie $\delta^{g_+} \mathrm{d}\tilde{\varphi} = \mathrm{O}(r^\infty)$, où O est pris par rapport à g quand r tend vers 0 et δ^{g_+} est la divergence définie sur le fibré $\Omega^1(M) \otimes \tilde{\varphi}^* TN$ par la connexion de Levi-Civita de M et celle de N tirée en arrière par $\tilde{\varphi}$. Il faut remarquer içi que cette divergence dépend de g, h et $\tilde{\varphi}$.

Soit $p \in M$, l'exponentielle détermine un isomorphisme entre une petite boule de N centrée en $\varphi(p)$ et un ouvert de $T_{\varphi(p)}N$, ainsi il existe, pour r suffisamment petit, $Y(p, r) \in T_{\varphi(p)}N$ tel que $\tilde{\varphi}(p, r) = \exp_{\varphi(p)} Y(p, r)$. Notons Pr_M la projection de $M \times [0, \varepsilon[$ sur M, nous avons le théorème suivant :

Théorème 2.1. *Il existe un unique section Y de $\mathrm{Pr}_M^* \varphi^* TN$ mod $\mathrm{O}(r^n)$ tel que $\tilde{\varphi} = \exp_{\varphi \circ \mathrm{Pr}_M} Y$ vérifie $\delta^{g_+} T\tilde{\varphi} = \mathrm{O}(r^{n+1} \log r)$ dans un voisinage de $M \times \{0\}$ dans X. La solution $Y(p, r)$ admet le développement asymptotique en r suivant :*

$$Y(p, r) = Y_0(p) + \cdots + Y_{n-2}(p) r^{n-2} + H_n^g(p) r^n \log r + \mathrm{O}(r^n), \tag{1}$$

où les points désignent des puissances de r qui sont entièrement déterminés par φ et des termes de courbures de g. Le terme H_n^g ne dépend que de φ et de $[g]$, et l'équation $H_n^g(\varphi) = 0$ est une EDP elliptique non linéaire d'ordre n sur des applications de (M^n, g) dans (N, h), qui est invariante conforme par rapport à g.

Dans le cas des fonctions, notre terme H_n^g est simplement l'opérateur GJMS de terme principal $\Delta^{n/2}$. Dans ce cas particulier notre construction en terme de métrique de Poincaré se réduit à celle de Graham et Zworski [7].

On peut remarquer que dans la suite du développement de $Y(p, r)$, le terme en r^n est indéterminé pour les même raisons qui font que la partie sans trace de $g^{(n)}$ est indéterminé.

3. La fonctionnelle

Soit φ une application de (M, g) dans (N, h) et $\tilde{\varphi}$ son prolongement construit par le Théorème 2.1 (les termes indéterminés de $\tilde{\varphi}$ n'interviennent pas dans la suite), on note $E(\tilde{\varphi}, \rho) = \int_{M \times [\rho; \varepsilon]} |T\tilde{\varphi}|^2_{g_+} \, \mathrm{d}\,\mathrm{vol}_{g_+}$ l'énergie de $\tilde{\varphi}$ dans le ruban $M \times [\rho; \varepsilon]$. De manière analogue à la renormalisation du volume obtenue par Graham dans [4], nous renormalisons cette énergie et nous obtenons le théorème suivant qui précise le Théorème 1.1 :

Théorème 3.1. *Le développement asymptotique de $E(\tilde{\varphi}, \rho)$ en ρ est de la forme suivante :*

$$E(\tilde{\varphi}, \rho) = E_0(\tilde{\varphi}) \rho^{2-n} + E_2(\tilde{\varphi}) \rho^{4-n} + \cdots + E_{n-4}(\tilde{\varphi}) \rho^{-2} + F(\tilde{\varphi}) \log \frac{1}{\rho} + \mathrm{O}(1),$$

où $F(\tilde{\varphi})$ ne dépend que de φ et de l'infini conforme de (X, g_+), ainsi la fonctionnelle $\mathcal{E}_g : \varphi \to F^g(\tilde{\varphi})$ est bien définie et elle est invariante conforme. De plus en notant $\overrightarrow{\mathrm{grad}^g}(\mathcal{E}_g)$, le gradient de $\mathcal{E}_g$ associé à g, on obtient finalement :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}^g}(\mathcal{E}_g) = 2n H_n^g.$$

On obtient directement de ce qui précède, que l'équation des points critiques est invariante conforme, en notant $\bar{g} = \mathrm{e}^{2\omega} g$, on a :

$$H_n^{\bar{g}}(\varphi) = \mathrm{e}^{-n\omega} H_n^{g}(\varphi).$$

Remerciements

Cette Note (1) fait partie de mon travail de thèse, et j'en profite ici pour remercier chaleureusement mon directeur de thèse Olivier Biquard, pour sa disponibilité et son aide précieuse.

Références

[1] V. Bérard, Thèse, en préparation.
[2] S.Y. Chang, L. Wang, P. Yang, A regularity theory of biharmonic maps, Commun. Pure Appl. Math. (9) 52 (1999) 1113–1137.
[3] C. Fefferman, C.R. Graham, Conformal Invariants, The Mathematical Heritage of Élie Cartan, Lyon, 1984, Astérisque, 1985, Numéro Hors Serie, pp. 95–116.
[4] C.R. Graham, Volume and area renormalizations for conformally compact Einstein metrics, Rend. Circ. Mat. Palermo, Ser. II 63 (Suppl.) (2000) 31–42.
[5] C.R. Graham, R. Jenne, L.J. Mason, G.A. Sparling, Conformally invariant powers of the Laplacian, I: Existence, J. London Math. Soc. (2) 46 (1987) 557–565.
[6] C.R. Graham, K. Hirachi, The ambient obstruction tensor and Q-curvature, in: AdS/CFT Correspondence: Einstein Metrics and Their Conformal Boundaries, in: IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, vol. 8, 2005, pp. 59–71.
[7] C.R. Graham, M. Zworski, Scattering matrix in conformal geometry, Invent. Math. 152 (2003) 89–118.
[8] S. Montaldo, C. Oniciuc, A short survey on biharmonic maps between Riemannian manifolds, Rev. Un. Mat. Argentina 47 (2006) 21–22.