Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 711–716
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Combinatorics

The centipede is determined by its Laplacian spectrum

Romain Boulet

Institut de mathématiques de Toulouse, Université de Toulouse et CNRS (UMR 5219), 31000 Toulouse, France

Received 22 February 2008; accepted after revision 24 May 2008

Available online 20 June 2008

Presented by Christophe Soulé

Abstract

A centipede is a graph obtained by appending a pendant vertex to each vertex of degree 2 of a path. In this Note we prove that the centipede is determined by its Laplacian spectrum. ***To cite this article: R. Boulet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Résumé

Le mille-pattes est déterminé par le spectre du Laplacien. Un mille-pattes est un graphe obtenu en attachant un sommet pendant à chaque sommet de degré 2 d'une chaîne. Dans cette Note nous montrons qu'un mille-pattes est déterminé par le spectre du Laplacien. ***Pour citer cet article : R. Boulet, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Version française abrégée

Le Laplacien L d'un graphe est la matrice $L = D - A$ où D est la matrice diagonale des degrés et A est la matrice d'adjacence du graphe. Le spectre du Laplacien donne des informations sur la structure du graphe, comme la connexité (voir [2,4] pour plus de détails), ces informations sont souvent insuffisantes pour reconstruire le graphe à partir du spectre et la question « Quels graphes sont déterminés par leur spectre ? » [2] demeure un problème difficile. En particulier il est connu [5] que presque aucun arbre n'est déterminé par le spectre du Laplacien et seules quelques familles d'arbres déterminés par leur spectre ont jusqu'alors été découvertes (citons par exemple [6] et [7]).

On appelle mille-pattes le graphe obtenu en attachant un sommet pendant à chaque sommet de degré 2 d'une chaîne (voir Fig. 1). Nous montrons dans cet article que le mille-pattes est déterminé par le spectre du Laplacien, enrichissant ainsi les familles connues d'arbres déterminés par le spectre du Laplacien.

On note P_k la chaîne à k sommets et T le triangle. Deux graphes sont dits A-cospectraux (resp. L-cospectraux) s'ils ont même spectre pour la matrice d'adjacence (resp. le Laplacien). Les valeurs propres de la matrice d'adjacence d'un graphe G d'ordre n sont notées $\lambda_1(G) \geqslant \lambda_2(G) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(G)$ et celles du Laplacien $\mu_1(G) \geqslant \mu_2(G) \geqslant \cdots \geqslant \mu_n(G)$. Le graphe représentatif des arêtes $\mathcal{L}(G)$ de G a pour sommets les arêtes de G et deux sommets sont adjacents si et seulement si les arêtes correspondantes dans G possèdent un sommet commun.

E-mail address: boulet@univ-tlse2.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2008.05.014

Les résultats suivants sont connus et permettent d'obtenir des informations sur la structure du graphe à partir du spectre du Laplacien :

Théorème 0.1. *[4] Soit $G = (V, E)$ un graphe et soit $d(v)$ le degré d'un sommet v. Alors* :

$$\max\{d(v), v \in V(G)\} < \mu_1(G) \leqslant \max\{d(u) + d(v),\ uv \in E(G)\}.$$

Théorème 0.2. *[2] Le nombre de sommets, d'arêtes, de composantes connexes et d'arbres couvrants d'un graphe peuvent être déduits du spectre de son Laplacien.*

Théorème 0.3. *[3,4] Soit G un arbre à n sommets, alors $\mu_i(G) = \lambda_i(\mathcal{L}(G)) + 2$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$.*

Le spectre de la matrice d'adjacence donne également des informations sur la structure du graphe ; il est en particulier connu que $\sum_i \lambda_i^k$ est égal au nombre de marches fermées de longueur k dans G.

Soit M un graphe, une marche fermée couvrante de longueur k sur M est une marche fermée de longueur k sur M parcourant *toutes* les arêtes de M au moins une fois. On note $w_k(M)$ le nombre de marches fermées couvrantes de longueur k sur M et on définit l'ensemble $\mathcal{M}_k = \{M, w_k(M) > 0\}$. Le nombre sous graphes (non nécessairement induits) de G isomorphes à M est noté $|M(G)|$.

Ainsi le nombre de marches fermées de longueur k de G est :

$$\sum_{M \in \mathcal{M}_k} w_k(M)\big|M(G)\big|.$$

Une première étape dans la démonstration consiste à étudier l'ensemble $\mathcal{T}$ des graphes définis ainsi : G est le graphe T ou G est obtenu en identifiant un sommet de degré 2 de $H \in \mathcal{T}$ et un sommet de T.

Le sous-ensemble $\mathcal{T}_n$ de $\mathcal{T}$ constitué des graphes de $\mathcal{T}$ avec exactement n triangles est en bijection avec l'ensemble $\mathcal{A}_n$ des arbres à n sommets de degré maximal inférieur ou égal à 3. Cette bijection est l'application $K : \mathcal{T}_n \to \mathcal{A}_n$ qui à un graphe G associe son graphe des cliques $K(G)$. Les sommets de $K(G)$ sont les sous-graphes complets maximaux de G et deux sommets de $K(G)$ sont adjacents si et seulement si l'intersection des sous graphes complets maximaux correspondants dans G est non vide.

Nous montrons ensuite qu'aucun graphe de $\mathcal{T}$ ne peut être A-cospectral avec $K^{-1}(P_k)$. Pour cela nous dénombrons le nombre de marches fermées de longueur 7 pour $G \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$ et nous obtenons

$$\sum_i \lambda_i^7 = 686t - 672 + 112t_3$$

où t est le nombre de sommets de $K(G)$ et t_3 le nombre de sommets de degré 3 de $K(G)$. Il reste à remarquer que $K^{-1}(P_k)$ minimise cette quantité car $K(K^{-1}(P_k)) = P_k$ ne possède aucun sommet de degré 3.

La deuxième étape de la démonstration est de déterminer la distribution des degrés d'un graphe G L-cospectral avec un mille-pattes, on note n_i le nombre de sommets de G de degré i. Le Théorème 0.1 implique que le degré maximal de G est inférieur ou égal à 5.

Proposition 0.4.

(i) *Soit G un graphe, la somme des carrés des degrés de G peut être déduite du spectre du Laplacien.*
(ii) *Soit G un graphe dont on connaît le nombre de triangles, alors la somme des cubes des degrés de G peut être déduite du spectre du Laplacien.*

Puis le Théorème 0.2 et la Proposition 0.4 nous permettent d'obtenir le système suivant que l'on résoud :

$$\begin{cases} n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = n, \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 = 2n - 2, \\ n_1 + 4n_2 + 9n_3 + 16n_4 + 25n_5 = 5n - 8, \\ n_1 + 8n_2 + 27n_3 + 64n_4 + 125n_5 = 14n - 26. \end{cases}$$

On obtient alors que G est un arbre d'ordre n avec $\frac{n+2}{2}$ sommets de degré 1 et $\frac{n-2}{2}$ sommets de degré 3. Il en découle que $\mathcal{L}(G) \in \mathcal{T}$. Or, comme G est L-cospectral avec un mille-pattes, le Théorème 0.3 implique que $\mathcal{L}(G)$ est

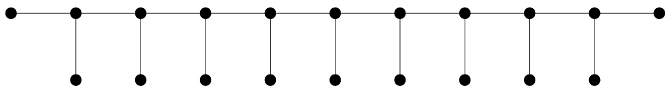

Fig. 1. A centipede.

A-cospectral avec $K^{-1}(P_{\frac{n-2}{2}})$ et donc $\mathcal{L}(G)$ est isomorphe à $K^{-1}(P_{\frac{n-2}{2}})$ (première étape de la démonstration). On conclut en remarquant qu'un arbre avec $\frac{n+2}{2}$ sommets de degré 1 et $\frac{n-2}{2}$ sommets de degré 3 dont le graphe des lignes est isomorphe à $K^{-1}(P_{\frac{n-2}{2}})$ est nécessairement un mille-pattes.

1. Introduction

The Laplacian of a graph is the matrix $L = D - A$ where A is the adjacency matrix and D is the diagonal matrix of degrees. Some structural properties of the graph such as connectivity can be determined from the Laplacian spectrum (see [2,4] for more details). However the Laplacian spectrum does generally not determine the graph and the question *"Which graphs are determined by their spectrum?"* [2] remains a difficult problem. Moreover it is known [5] that almost no trees are determined by their Laplacian spectrum and the few trees proved to be determined by their Laplacian spectrum (see for instance [6] or [7]) may be viewed in this sense as exceptional graphs.

A centipede is a tree constructed by appending a pendant vertex to each vertex of degree 2 of a path (see Fig. 1 for an example). We show in this article that a centipede is determined by its Laplacian spectrum, thus enlarging the known families of trees determined by their Laplacian spectrum.

To fix notations, the path with k vertices is denoted by P_k and the triangle by T. Two graphs are A-cospectral (resp. L-cospectral) if they have the same adjacency (resp. Laplacian) spectrum. For a graph G of order n, the eigenvalues of the adjacency matrix are denoted by $\lambda_1(G) \geqslant \lambda_2(G) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(G)$ and the eigenvalues of the Laplacian by $\mu_1(G) \geqslant \mu_2(G) \geqslant \cdots \geqslant \mu_n(G)$ (when no confusion is possible we may omit to precise the graph).

We denote by $\mathrm{Sp}(G)$ the spectrum of the adjacency matrix of G. The line graph $\mathcal{L}(G)$ of a graph G has the edges of G as its vertices and two vertices of $\mathcal{L}(G)$ are adjacent if and only if the corresponding edges in G have a common vertex. For a vertex v of a graph, $N(v)$ denotes the set of vertices adjacent to v and $d(v) = |N(v)|$ the degree of v.

Here are some known results about the Laplacian spectrum:

Theorem 1.1. *(See [4].) Let $G = (V, E)$ be a graph where V (resp. E) is the set of vertices (resp. edges). Then*:
$$\max\{d(v), v \in V\} < \mu_1(G) \leqslant \max\{d(u) + d(v),\ uv \in E\}.$$

Theorem 1.2. *(See [2].) For the Laplacian matrix, the following can be deduced from the spectrum*:

- *The number of vertices*;
- *The number of edges*;
- *The number of connected components*;
- *The number of spanning trees.*

Theorem 1.3. *(See [3,4].) Let G be a tree with n vertices, then $\mu_i(G) = \lambda_i(\mathcal{L}(G)) + 2$ for $1 \leqslant i \leqslant n-1$.*

The spectrum of the adjacency matrix also gives some informations about structural properties of the graph, for instance it is a classical result that the number of closed walks of length $k \geqslant 2$ is $\sum_i \lambda_i^k$ (see [1]).

We describe here a method to count the number of closed walks of given length in a graph.

Let M be a graph, a *k-covering closed walk* in M is a closed walk of length k in M running through *all* the edges at least once. Let G be a graph, $M(G)$ denotes the set of all distinct subgraphs (not necessarily induced) of G isomorphic to M and $|M(G)|$ is the number of elements of $M(G)$. The number of k-covering closed walks in M is denoted by $w_k(M)$ and we define the set $\mathcal{M}_k = \{M,\ w_k(M) > 0\}$. As a consequence, the number of closed walks of length k in G is:
$$\sum_{\lambda_i \in \mathrm{Sp}(G)} \lambda_i^k = \sum_{M \in \mathcal{M}_k} w_k(M)\bigl|M(G)\bigr|. \tag{1}$$

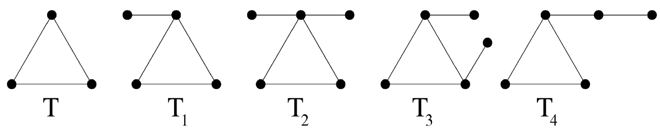

Fig. 2. Subgraphs of $G \in \mathcal{T}$ belonging to $\mathcal{M}_7$.

2. Preliminaries: definition and spectral properties of a set $\mathcal{T}$ of graphs

Let $\mathcal{T}$ be the set of graphs G defined as follow: G is the triangle T or G is formed by identifying a vertex of degree 2 of a graph $H \in \mathcal{T}$ and a vertex of the graph T.

The clique graph of G, denoted by $K(G)$, is the graph whose vertex set is the set of maximal complete subgraphs of G and two vertices of $K(G)$ are adjacent if and only if the corresponding complete subgraphs in G share at least one vertex. The set of graphs in $\mathcal{T}$ with n triangles is denoted by $\mathcal{T}_n$.

Let $\mathcal{A}_n$ be the set of trees on n vertices with maximal degree lower than or equal to 3. The following proposition is straightforward:

Proposition 2.1. *The application $K : \mathcal{T}_n \to \mathcal{A}_n$ is one-to-one.*

Eq. (1) enables us to compute the number of closed walks of length 7 of a graph $G \in \mathcal{T}$:

Lemma 2.2. *We have for $G \in \mathcal{T} \setminus \{T\}$:*

$$\sum_{\lambda_i \in \mathrm{Sp}(G)} \lambda_i^7 = 686t - 672 + 112t_3$$

where t is the number of vertices of $K(G)$ (i.e. the number of triangles in G) and t_3 is the number of vertices of degree 3 in $K(G)$.

Proof. We use the relation

$$\sum_{\lambda_i \in \mathrm{Sp}(G)} \lambda_i^7 = \sum_{M \in \mathcal{M}_7} w_7(M) \big| M(G) \big|.$$

As an odd closed walk necessarily runs through an odd cycle, it is clear that $M \in \mathcal{M}_7$ contains one and only one triangle. Only the graphs $T,\ T_1,\ T_2,\ T_3,\ T_4 \in \mathcal{M}_7$ depicted in Fig. 2 can arise as subgraphs of $G \in \mathcal{T}$.

Let t be the number of vertices of $K(G)$ and t_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, be the number of vertices of $K(G)$ of degree i. Since $K(G) \in \mathcal{A}_t$, we have $t_1 + t_2 + t_3 = t$ and $t_1 + 2t_2 + 3t_3 = 2t - 2$ (the sum of the degrees is twice the number of edges) showing $t_1 = t_3 + 2$ and $t_2 = t - 2 - 2t_3$.

For a triangle T of G (denoted by $T \subset G$), let $N(T)$ be the set of triangles of G sharing one vertex with T and $d(T) = |N(T)|$. Note that $d(T)$ is the degree of the vertex in $K(G)$ corresponding to $T \subset G$. We have:

- $|T(G)| = t$;
- $|T_1(G)| = 2\sum_{T \subset G} d(T) = 2\sum_{v \in V(K(G))} d(v) = 2(2t-2)$;
- $|T_2(G)| = \sum_{T \subset G} d(T) = \sum_{v \in V(K(G))} d(v) = 2t - 2$;
- $|T_3(G)| = 4t_2 + 12t_3 = 4(t-2) + 4t_3$;
- $|T_4(G)| = 4(2t - 3 + t_3)$, indeed let e and e' be the two bridges of T_4 such that e shares a vertex with the triangle of T_4. Let T be a triangle of G, then the number of T_4 such that e and e' belongs to T is $2d(T)$. The number of T_4 such that e belongs to T and e' does not is 4 if $d(T) = 2$ or 12 if $d(T) = 3$. This implies $|T_4(G)| = (2t_1 + 4t_2 + 6t_3) + (4t_2 + 12t_3)$, that is, $|T_4(G)| = 4(2t - 3 + t_3)$.

Let A, A_i denote the adjacency matrices of T, T_i. The resolution of the equations $\mathrm{tr}(A^7) = w_7(T)$, $\mathrm{tr}(A_1^7) = w_7(T) + w_7(T_1)$, $\mathrm{tr}(A_2^7) = w_7(T) + 2w_7(T_1) + w_7(T_2)$, $\mathrm{tr}(A_3^7) = w_7(T) + 2w_7(T_1) + w_7(T_3)$, and $\mathrm{tr}(A_4^7) = w_7(T) + w_7(T_1) + w_7(T_4)$ yields $w_7(T) = 126$, $w_7(T_1) = 84$, $w_7(T_2) = 28$, $w_7(T_3) = 14$ and $w_7(T_4) = 14$.

This implies $\sum_i \lambda_i^7 = \sum_{M \in \mathcal{M}_7} w_7(M)|M(G)| = 686t - 672 + 112t_3$. $\square$

Theorem 2.3. *The A-spectrum characterises $K^{-1}(P_k)$ in $\mathcal{T}$.*

Proof. If $G \in \mathcal{T}$ is A-cospectral with $K^{-1}(P_k)$ then G and $K^{-1}(P_k)$ have the same number of vertices and triangles. If G and $K^{-1}(P_k)$ are not isomorphic then $K(G)$ possesses a vertex of degree 3 (so G is not isomorphic to T) and the previous lemma implies $\sum_{\lambda_i \in \mathrm{Sp}(K^{-1}(P_k))} \lambda_i^7 < \sum_{\lambda_i \in \mathrm{Sp}(G)} \lambda_i^7$. This contradicts A-cospectrality of G with $K^{-1}(P_k)$. □

3. The centipede is determined by its Laplacian spectrum

Proposition 3.1.

(i) *The sum of squares of the degrees of a graph G can be deduced from its Laplacian spectrum.*
(ii) *The sum of cubes of the degrees of a graph G can be deduced from its Laplacian spectrum and from the number of triangles contained in G.*

Proof. (i) We have $\mathrm{tr}(L^2) = \mathrm{tr}(D^2) - 2\mathrm{tr}(AD) + \mathrm{tr}(A^2)$, but $\mathrm{tr}(AD) = 0$, $\mathrm{tr}(A^2) = 2m$ where m is the number of edges and $\mathrm{tr}(D^2)$ is the sum of squares of degrees of G.

(ii) We have $\mathrm{tr}(L^3) = \mathrm{tr}(D^3) - \mathrm{tr}(A^3) + 3\mathrm{tr}(A^2D)$. But $\mathrm{tr}(A^3)$ is six times the number of triangles of G, $\mathrm{tr}(A^2D)$ is the sum of squares of degrees of G and $\mathrm{tr}(D^3)$ is the sum of cubes of G. □

Proposition 3.2. *If G is a graph on n vertices L-cospectral with a centipede, then G is a tree having $\frac{n-2}{2}$ vertices of degree 3 and $\frac{n+2}{2}$ vertices of degree 1.*

Proof. Theorem 1.1 implies that the maximal degree of G is at most 5. For $i = 1, \ldots, 5$, let n_i be the number of vertices of degree i of G. The Laplacian spectrum of G determines the number of vertices, the number of edges, the sum of squares of the degrees and the sum of cubes of the degrees, that is:

$$\begin{cases} n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = n, \\ n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + 5n_5 = 2n - 2, \\ n_1 + 4n_2 + 9n_3 + 16n_4 + 25n_5 = 5n - 8, \\ n_1 + 8n_2 + 27n_3 + 64n_4 + 125n_5 = 14n - 26. \end{cases}$$

This system implies $n_2 = n_4 = -4n_5 = 2(n + 2 - 2n_1)$ showing $n_2 = n_4 = n_5 = 0$, $n_3 = \frac{n-2}{2}$, $n_2 = 0$ and $n_1 = \frac{n+2}{2}$. □

Proposition 3.3. *Let G be a tree with $\frac{n-2}{2}$ vertices of degree 3 and $\frac{n+2}{2}$ vertices of degree 1, if $\mathcal{L}(G)$ is isomorphic to $K^{-1}(P_k)$ then G is a centipede.*

Proof. If G is not a centipede then it contains the subgraph H depicted in Fig. 3. This implies that $\mathcal{L}(G)$ is not isomorphic to $K^{-1}(P_k)$. □

Theorem 3.4. *The centipede is determined by its Laplacian spectrum.*

Proof. Let G be a graph with n vertices L-cospectral with the centipede on n vertices. According to Proposition 3.2, G is a tree with $\frac{n-2}{2}$ vertices of degree 3 and $\frac{n+2}{2}$ vertices of degree 1. As G is L-cospectral with a centipede, Theorem 1.3 implies that $\mathcal{L}(G)$ is A-cospectral with the line graph of the centipede, that is, $\mathcal{L}(G)$ is A-cospectral

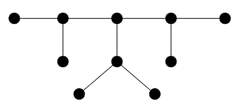

Fig. 3. Subgraph of a tree with $\frac{n-2}{2}$ vertices of degree 3 and $\frac{n+2}{2}$ vertices of degree 1 and different from a centipede.

with $K^{-1}(P_{\frac{n-2}{2}})$. Moreover $\mathcal{L}(G) \in \mathcal{T}$, so $\mathcal{L}(G)$ is isomorphic to $K^{-1}(P_{\frac{n-2}{2}})$ (Theorem 2.3) and G is a centipede by Proposition 3.3. □

Since the Laplacian eigenvalues of a graph gives the Laplacian eigenvalues of its complement [4], we have the following corollary:

Corollary 3.5. *The complement of a centipede is determined by its Laplacian spectrum.*

Remark 1. Non-uniqueness in $\mathcal{T}_n$ of graphs maximising t_3 prevents unfortunately the adaptation of our proof to graphs in $\mathcal{T}_n$ with t_3 maximal.

Acknowledgements

The author would like to thank the referee for his attentive reading and his relevant remarks.

References

[1] N. Biggs, Algebraic Graph Theory, Cambridge University Press, 1974.
[2] E.R. van Dam, W.H. Haemers, Which graphs are determined by their spectrum? Linear Algebra and its Applications 373 (2003) 241–272.
[3] M. Doob, Eigenvalues of graphs, in: L.W. Beineke, R.J. Wilson (Eds.), Topics in Algebraic Graph Theory, Cambridge University Press, 2004, pp. 30–55.
[4] B. Mohar, The Laplacian spectrum of graphs, Graph Theory, Combinatorics, and Applications 2 (1991) 871–898.
[5] M.W. Newman, The Laplacian Spectrum of Graphs, Masters Thesis, University of Manitoba, 2000.
[6] G.R. Omidi, K. Tajbakhsh, Star-like trees are determined by their Laplacian spectrum, Linear Algebra and its Applications 422 (2007) 654–658.
[7] X. Shen, Y. Hou, Y. Zhang, Graph Z_n and some graphs related to Z_n are determined by their spectrum, Linear Algebra and its Applications 404 (2005) 58–68.