Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 753–756

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie algébrique

Un cas de majoration affine pour la fonction d'approximation d'Artin

Michel Hickel

Institut de mathématiques de Bordeaux, Université Bordeaux 1, 351, cours de la libération, 33405 Talence cedex France

Reçu le 9 avril 2008 ; accepté après révision le 13 mai 2008

Disponible sur Internet le 24 juin 2008

Présenté par Michel Raynaud

Résumé

Soient $(A, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local noethérien intègre, excellent hensélien d'égale caractéristique et I un idéal homogène de $A[X, Y]$. Nous montrons que I possède une fonction d'approximation d'Artin bornée par une fonction affine, étendant les résultats précédemment connus (notamment ceux de G. Rond (2006)). ***Pour citer cet article : M. Hickel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abstract

A case of affine bound for the Artin approximation function. Let $(A, \mathfrak{m}, k)$ be an henselian excellent local domain of equal characteristic and I be an homogenous ideal in $A[X, Y]$. We show that I has an Artin approximation function bounded by an affine function, extending the previously known results. ***To cite this article: M. Hickel, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

1. Introduction

Soit $(A, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local noethérien d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps résiduel $k = \frac{A}{\mathfrak{m}}$. On notera $\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}$ l'ordre $\mathfrak{m}$-adique, c'est-à-dire :

$$\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(f) = \mathrm{Sup}\{k \in \mathbb{N} \mid f \in \mathfrak{m}^k\} \quad \text{si } f \neq 0 \text{ et } \mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(0) = +\infty.$$

Le but de cette Note est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 1.1. *Soit $(A, \mathfrak{m}, k)$ un anneau local noethérien intègre, excellent hensélien d'égale caractéristique. Considérons deux indéterminées X et Y et $I \subset A[X, Y]$ un idéal homogène. Alors il existe deux constantes $a, b \in \mathbb{R}^+$ possédant la propriété suivante* :

Adresse e-mail : michel.hickel@math.u-bordeaux1.fr.

1631-073X/$ – see front matter © 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2008.05.010

$$\forall (f,g)\in A^2,\ \big(\forall P\in I,\ \mathrm{ord}_{\mathfrak m}\big(P(f,g)\big)>ai+b\big)\Longrightarrow\left(\begin{array}{l}\exists (f',g')\in A^2/\forall P\in I,\ P(f',g')=0\\ \wedge\\ \mathrm{Min}\big(\mathrm{ord}_{\mathfrak m}(f-f'),\mathrm{ord}_{\mathfrak m}(g-g')\big)>i\end{array}\right).$$

Ce résultat s'inscrit dans l'étude des fonctions d'approximation d'Artin [1,7,8,13] et fournit une généralisation à des résultats précédents de G. Rond [11], répondant par l'affirmative à une question de l'auteur de cette Note, dans le cas des idéaux principaux cf. [11] p. 301 Th. 1.2. Nous généralisons en fait les résultats de G. Rond dans deux directions [11] : l'anneau des coefficients est plus général et nous obtenons le résultat pour des idéaux arbitraires au lieu de principaux. Cependant nous utilisons de manière importante la technique de G. Rond. La preuve utilise aussi de façon centrale la caractérisation des anneaux locaux analytiquement irréductibles, due à D. Rees [9] généralisant un résultat de S. Izumi [6], et le théorème de M.J. Greenberg [2] premier cas de fonction d'approximation majorée par une fonction affine connue. Pour des études concernant ce cas nous renvoyons à [3,4]. Le lien entre le théorème de S. Izumi et les majorations affines des fonctions d'approximation d'Artin a été communiqué à G. Rond par l'auteur de cette note [12] p. 274. Nous rappelons d'abord quelques éléments concernant la caractérisation des anneaux locaux noethériens analytiquement irréductibles, caractérisation due à D. Rees [9]. En général un idéal de $A[X,Y,Z]$ n'a pas une fonction d'approximation majorée par une fonction affine [10].

2. Préliminaires

Soit $(A,\mathfrak m,k)$ un anneau local noethérien analytiquement irréductible[1] i.e. dont la completion $\hat A$ pour la topologie $\mathfrak m$-adique soit intègre. Posons $K=\mathrm{Frac}(A)$. Nous noterons $\bar v_{\mathfrak m}$ la fonction asymptotique de Samuel (cf. [5] 6.9 p. 138), c'est à dire pour tout $x\in A-(0)$, on a : $\bar v_{\mathfrak m}(x)=\mathrm{Lim}_{l\to+\infty}\frac{\mathrm{ord}_{\mathfrak m}(x^l)}{l}$. Considérons R l'algèbre de Rees associée à A et $\mathfrak m$, c'est-à-dire $R=A[\mathfrak m.t]=\bigoplus_{l\in\mathbb N}\mathfrak m^l.t^l$ et soit S la clôture intégrale de R dans son corps des fractions. Notons $\mathfrak p_1,\dots,\mathfrak p_m$ les idéaux premiers minimaux parmi ceux contenant $\mathfrak m.S$. On considère encore les anneaux $S_i=S_{\mathfrak p_i}\cap K$. Chacun des anneaux S_i est un anneau de valuation discrète dont on désignera par v_i la valuation. L'ensemble de ces valuations $v_1,\dots,v_m$ est appelée l'ensemble des valutations de Rees de $\mathfrak m$. Nous renvoyons le lecteur à [5] Chap. 10 notamment 10.7. p. 208 pour plus d'informations. On peut alors résumer quelques faits majeurs dont l'essentiel est du à D. Rees et S. Izumi :

– 1) $\exists C>0/\forall x\in A,\ \mathrm{ord}_{\mathfrak m}(x)\leqslant\bar v_{\mathfrak m}(x)\leqslant\mathrm{ord}_{\mathfrak m}(x)+C$;
– 2) $\bar v_{\mathfrak m}(x)=\mathrm{Min}_{1\leqslant i\leqslant s}\frac{v_i(x)}{v_i(\mathfrak m)}$;
– 3) $\forall i,j\ \exists c_{i,j}>0/\forall x\in A,\ v_i(x)\leqslant c_{i,j}v_j(x)$;
– 4) $\exists k_1,k_2>0,\ \forall x,y\in A,\ \mathrm{ord}_{\mathfrak m}(xy)\leqslant k_1(\mathrm{ord}_{\mathfrak m}(x)+\mathrm{ord}_{\mathfrak m}(y))+k_2$;
– 5) $\forall i,\exists c_i,d_i>0/\forall x\in A,\ c_iv_i(x)\leqslant\mathrm{ord}_{\mathfrak m}(x)\leqslant d_iv_i(x)$.

Les points 4) et 5) sont une généralisation due à D. Rees [9] d'un théorème de S. Izumi [6] obtenu en premier lieu dans la catégorie des $\mathbb C$ ou $\mathbb R$-algèbres analytiques. Nous renvoyons le lecteur à [5,9].

3. Éléments de preuve de Théorème 1.1

Tout d'abord quelques réductions sont nécessaires. En premier lieu puisque nous supposons que A est hensélien et excellent, A possède la propriété d'approximation (P.A) [8]. Il en résulte élémentairement que A est analytiquement irréductible i.e. $\hat A$ est intègre. D'autre part, puisque A possède la propriété d'approximation, si l'on prouve 1.1 pour tout idéal homogène I de $\hat A[X,Y]$, il en résultera automatiquement le résultat pour tout idéal homogène de $A[X,Y]$. On peut donc supposer, ce que nous ferons désormais, que A est un anneau noethérien local complet intègre. D'autre part soient $a\in A-(0)$ et I un idéal homogène de $A[X,Y]$. Alors, on peut vérifier à l'aide de 2.4 (caractérisation des anneaux locaux analytiquement irréductibles) que I a une fonction d'approximation majorée par une fonction affine si et seulement si $a.I$ a une fonction d'approximation majorée par une fonction affine. Nous utiliserons de telles

[1] Il serait plus satisfaisant d'employer le terme *analytiquement intègre* au lieu d'analytiquement irréductible mais celui-ci est en usage en algèbre commutative

substitutions au cours de la preuve. Soient I un idéal de $A[X,Y]$ et $\mathcal{S}: P_1,\dots,P_m$ un système de générateurs de I, on notera $d_{\mathcal{S}}$ le nombre $\mathrm{Max}_{1\leqslant i\leqslant m}\deg(P_i)$. Enfin on notera $d_I=\mathrm{Min}(d_{\mathcal{S}})$ lorsque $\mathcal{S}$ parcourt l'ensemble des systèmes de générateurs de I. La preuve se fait par récurrence sur d_I, le résultat étant trivial si $d_I=0$, c'est à dire si $I\subset A$. Nous supposerons donc donné un idéal I tel que $d_I=d>0$ et le résultat établi pour tout idéal J tel que $d_J<d$. On distingue alors deux cas :

(•) Soit les éléments de I on un zéro commun non trivial dans A^2, c'est à dire il existe $(a,b)\in A^2$, $(a,b)\neq(0,0)$ tel que $\forall P\in I,\ P(a,b)=0$. Si par exemple $a\neq 0$, il est élémentaire de vérifier que si P est homogène et $P(a,b)=0$, si $m=\deg(P)$ alors $a^m.P(X,Y)=(bX-aY)Q(X,Y)$ où $Q(X,Y)\in A[X,Y]$ est homogène et $\deg(Q)=\deg(P)-1$. Ainsi, si $P_1,\dots,P_m$ est un système de générateurs de I qui calcule d_I on a pour tout i, $1\leqslant l\leqslant m$, $a^{d_I}.P_l(X,Y)=(bX-aY)Q_l(X,Y)$ où Q_l est homogène de degré $\deg(P)-1$. Notons J l'idéal engendré par les Q_l. Par hypothèse de récurrence celui-ci possède une fonction d'approximation majorée disons par $i\to c_1.i+c_2$. Notons $\mathfrak{a}$ l'idéal de A, $a.A+b.A$ et soit i_0 vérifiant les conclusions du lemme d'Artin–Rees pour $\mathfrak{a}$ i.e. : $\forall k\in\mathbb{N}$, $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{m}^{i_0+k+1}\subset\mathfrak{m}^{k+1}.\mathfrak{a}$. Alors si k_1,k_2 sont deux constantes qui vérifient le point 2.4., il est élémentaire de vérifier que $k_1(c_1+1)i+k_1c_2+k_1.i_0+k_2$ majore la fonction d'approximation de $a^{d_I}.I$. On en conclut que I a une fonction d'approximation majorée par une fonction affine.

(••) Les éléments de I n'ont pas de zéro commun dans A^2 autre que $(0,0)$. Nous traitons d'abord le cas où I est engendré par un seul polynôme homogène $P(X,Y)$ sans autre zéro que $(0,0)$ dans A^2. C'est le cas central traité dans [11] sous l'hypothèse $A=k[[Z_1,\dots,Z_n]]$ à la demande de l'auteur de cette Note. Il s'agit de voir qu'il existe des constantes $a,b\in\mathbb{R}^+$, $\forall(x,y)\in A^2$, $\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}P(x,y)\leqslant a\,\mathrm{Min}(\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(x),\mathrm{ord}_{\mathfrak{m}}(y))+b$. Comme d'après les résultats rappelés en 2) chacune des valuations de Rees v_i est équivalente à l'ordre $\mathfrak{m}$-adique, on peut remplacer celui-ci par v_1. Quitte à permuter les variables on peut supposer que $\mathrm{Min}(v_1(x),v_1(y))=v_1(y)$. À un changement de constante près, il s'agit donc de voir qu'il existe $a,b\in\mathbb{R}^+$ tel que : $v_1(P(\frac{x}{y},1))\leqslant av_1(y)+b$. Soient alors $Q(Z)=P(Z,1)$ et $\hat{S}_1$ le complété $\mathfrak{m}_{S_1}$-adique de S_1. Puisque A est d'égale caractéristique, il en est de même de $\hat{S}_1$ qui est donc isomorphe d'après le théorème de structure de Cohen à $\frac{S_1}{\mathfrak{m}_{S_1}}[[T]]$. On peut donc appliquer le théorème de Greenberg [2] aux systèmes d'équations polynomiaux à coefficients dans $\hat{S}_1$ et donc en particulier à $Q(Z)$. Il en découle qu'il existe deux constantes $a,b\in\mathbb{R}^+$ telles que $v_1(Q(\frac{x}{y}))\leqslant av_1(\frac{x}{y}-z)+b$ où $z\in\hat{S}_1$ est un plus proche zéros de Q dans $\hat{S}_1$ (si Q n'a pas de zéros dans $\hat{S}_1$ le résultat est clair). On est donc amené à voir comme dans [11] que si $z\in\mathrm{Frac}(\hat{S}_1)-\mathrm{Frac}(A)$ est algébrique sur $K=\mathrm{Frac}(A)$, alors il existe deux constantes $a',b'\in\mathbb{R}^+$ telles que $\forall x,y\in A$, $v_1(z-\frac{x}{y})\leqslant a'v_1(y)+b'$. Soit $A'=A[z]$ la sous-algèbre de $\mathrm{Frac}(\hat{S}_1)$ engendrée par A et z. Soit $R(Z)=a_0+a_1Z+\cdots+a_dZ^d$ un polynôme de $A[Z]$ annulé par z et de degré minimal. Quitte à remplacer z par z/u où u est un élément convenable de A d'ordre $\mathfrak{m}$-adique assez grand, on n'affecte pas l'existence de constantes a',b' comme recherchées et comme z/u annule en degré minimal $R_u(Z)=u^da_d^{d-1}Q(Z/ua_d)\in A[Z]$, on pourra supposer que $R(Z)$ est un polynôme distingué de $A[Z]$ (cf. [11] pour plus de détails). On a alors $A'=A[z]\simeq B=A[Z]/(R(Z))$ est intègre puisque sous-anneau de $\mathrm{Frac}(\hat{S}_1)$ (donc (R) premier dans $A[Z]$). A' est un anneau local d'idéal maximal la classe de $(\mathfrak{m},Z)$ dans B. Comme A est complet, le théorème de division formel permet de voir que $A[[Z]]/(R(Z))$ est intègre, donc A' est analytiquement irréductible. On conclut alors mutatis-mutandis exactement comme dans [11] en appliquant la caractérisation des anneaux locaux analytiquement irréductibles rappelée en 2) à A'.

Retournons au cas d'un idéal I homogène sans zéro commun dans A^2 autre que $(0,0)$, cette fois non nécessairement principal. Soit $\mathcal{S}: P_1,\dots,P_m$ un système de générateurs de I qui calcule d_I. Si l'un des P_i n'a pas de zéros autre que $(0,0)$ dans A^2, on conclut facilement par le cas précédent. On peut donc supposer que pour chaque l, $1\leqslant l\leqslant m$, on peut trouver $Q_l(X,Y)$ homogène dans $A[X,Y]$ $\deg(Q_l)\leqslant\deg(P_l)-1$, des éléments $(a_l,b_l)\in A^2$, $(a_l,b_l)\neq(0,0)$, et un élément $\alpha_l\in A-(0)$ tels que :

$$\alpha_1P_1(X,Y)=(b_1X-a_1Y)Q_1(X,Y)\quad\cdots\quad\alpha_mP_m(X,Y)=(b_mX-a_mY)Q_m(X,Y).$$

Comme un idéal I a une fonction d'approximation bornée par une fonction affine si et seulement si il en est de même pour $a.I$, quitte à remplacer I par $\alpha_1\dots\alpha_m.I$, on pourra supposer que I est engendré par des éléments de la forme de droite de l'égalité précédente. L'hypothèse de récurrence nous permet d'affirmer que l'idéal J engendré par les Q_l a une fonction d'approximation majorée par $i\to c_1i+c_2$. Soit alors M le sous-module de A^m engendré par

$(a_1, \dots, a_m)$ et $(b_1, \dots, b_m)$, M est libre puisque I n'a pas d'autre zéro dans A^2 que $(0,0)$. Il existe alors i_0 tel que $M \cap \mathfrak{m}^{k+i_0+1}.A^m \subset \mathfrak{m}^{k+1}.A^m$, $\forall k \in \mathbb{N}$. On vérifie alors élémentairement que si k_1, k_2 sont deux constantes vérifiant 2.4 alors $i \to k_1((c_1+1)i + c_2 + i_0) + k_2$ majore la fonction d'approximation de I.

Références

[1] M. Artin, Algebraic approximation of structures over complete local rings, Publ. Math. IHES 36 (1969) 23–58.
[2] M.J. Greenberg, Rational points in henselian discrete valuations rings, Publ. Math. IHES 31 (1966) 59–64.
[3] M. Hickel, Fonction de Artin et germes de courbes tracées sur un germe d'espace analytique, Amer. J. Math. 115 (1993) 1299–1334.
[4] M. Hickel, Calcul de la fonction de Artin d'une branche plane, Pacific J. Math. 213 (2004) 37–47.
[5] C. Huneke, I. Swanson, Integral Closure of Ideals, Rings and Modules, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 336, Cambridge University Press, 2006.
[6] S. Izumi, A measure of integrity for local analytic algebra, Publ. RIMS Kyoto Univ. 21 (1985) 719–735.
[7] G. Pfister, D. Popescu, Die strenge Approximationeigenschaft lokaler Ringe, Invent. Math. 30 (1975) 145–174.
[8] D. Popescu, Artin approximation, in: Hazelwinkel (Ed.), Handbook of Algebra, vol. 2, North-Holland, Amsterdam, 2000, pp. 321–356.
[9] D. Rees, Izumi's theorem, in: Commutative Algebra, Berkeley, CA, 1987, in: Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 15, Springer, 1989, pp. 407–416.
[10] G. Rond, Sur la linéarité de la fonction de Artin, Ann. Sci. École Norm. Sup. 38 (2005) 979–988.
[11] G. Rond, Approximation diophantienne dans les corps des séries en plusieurs variables, Ann. Inst. Fourier 56 (2) (2006) 299–308.
[12] G. Rond, Lemme d'Artin–Rees, théorème d'Izumi et fonction de Artin, J. Algebra 299 (2006) 245–275.
[13] J.J. Wavrick, A theorem on solutions of analytic equations with applications to deformations of complex structures, Math. Ann. 216 (1975) 127–142.