Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 667–670
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Topologie différentielle

Filtration de Johnson et groupe de Torelli modulo p, p premier

Bernard Perron

Université de Bourgogne, institut de mathématiques de Bourgogne, U.M.R. du C.N.R.S., U.F.R. sciences et techniques, 9, avenue Alain-Savary, B.P. 47 870, 21078 Dijon cedex, France

Reçu le 3 mars 2008 ; accepté après révision le 22 avril 2008

Disponible sur Internet le 21 mai 2008

Présenté par Étienne Ghys

Résumé

Soit $S(g,1)$ une surface connexe, compacte, orientée, de genre g, avec une composante de bord et $\mathrm{Mod}(g,1)$ son groupe modulaire. Soit p un entier, ou bien égal à 0, ou bien premier $\geqslant 2$. On construit une p-filtration centrale de $\mathrm{Mod}(g,1)$, notée $\{M(k,p)\colon\ k \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}\}$, généralisant la filtration de Johnson (qui correspond à $p=0$) telle que $M(1,p) = \mathrm{Mod}(g,1)$, $M(k,p)/M(k+1,p)$ $(k \geqslant 2)$ est un $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espace vectoriel de dimension finie et $M(2,p)$ est le groupe de Torelli modulo p (e.g. le sous-groupe de $\mathrm{Mod}(g,1)$ des homéomorphismes induisant l'identité sur $H_1(S(g,1);\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$). On annonce les résultats suivants : le groupe de Torelli (mod p) est engendré par le groupe de Torelli usuel et les puissances p-ième des twists de Dehn. On détermine ensuite l'abélianisé du groupe de Torelli mod p (à 2-torsion finie pres). Toute sphère d'homologie rationnelle Σ de dimension trois s'obtient en recollant deux corps d'anses par un élément du groupe de Torelli (mod p), où p est un entier premier $\geqslant 3$ divisant $(n-1)$, n étant le cardinal de $H_1(\Sigma;\mathbb{Z})$. On propose enfin un invariant conjectural de ces sphères d'homologie rationnelle. ***Pour citer cet article : B. Perron, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Johnson filtration and Torelli group, modulo *p*, *p* a prime. Let $S(g,1)$ be a connected, compact, oriented surface of genus g, with one boundary component and $\mathrm{Mod}(g,1)$ its mapping class group. Let p be an integer, either equal to 0, or a prime $\geqslant 2$. We construct a central p-filtration of $\mathrm{Mod}(g,1)$, denoted $\{M(k,p)\colon\ k \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}\}$, generalizing the Johnson filtration (which corresponds to $p=0$) such that $M(1,g) = \mathrm{Mod}(g,1)$, $M(k,p)M(k+1,p)$ $(k \geqslant 2)$ is a finite dimensional $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-vector space and $M(2,p)$ is the Torelli group (mod p) (e.g. the subgroup of $\mathrm{Mod}(g,1)$ of homeomorphisms which induce identity on $H_1(S(g,1);\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$). We announce the following results: the Torelli group (mod p) is generated by the usual Torelli group and the p-th powers of all Dehn twists. We compute the abelianization of the Torelli group (mod p), up to finite 2-torsion. Any $\mathbb{Q}$-homology sphere Σ^3 is obtained by gluing two handlebodies by an element of the Torelli group (mod p), for any prime $p \geqslant 3$ dividing $(n-1)$, where n is the cardinal of $H_1(\Sigma^3;\mathbb{Z})$. Finally we propose a conjectural invariant for these $\mathbb{Q}$-homology spheres. ***To cite this article: B. Perron, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Adresse e-mail : perron@topolog.u-bourgogne.fr.

1631-073X/$ – see front matter © 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2008.04.015

1. La matrice de Fox (mod p) d'un homéomorphisme de surface

Soit $S(g,1)$ une surface connexe, compacte, orientée, de genre g, avec une composante de bord. On note $\mathrm{Mod}(g,1)$ son groupe modulaire, c'est-à-dire le groupe des homéomorphismes de $S(g,1)$ fixant point par point le bord, à isotopie près (fixant le bord). On fixe un point de base $*$ sur $\partial S(g,1)$ et on pose $\Gamma = \Pi_1(S(g,1),*)$. Le groupe Γ est libre, de rang $2g$ et on désigne par $\{x_i, y_i; i = 1,2,\dots,g\}$ la base de Γ définie par la figure 0.1 de [9]. Dans la suite, on posera $z_i = x_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant g$ et $z_i = y_{i-g}$ pour $g < i \leqslant 2g$. On pose encore $H = H_1(S(g,1);\mathbb{Z})$ et on désigne par $\{a_i, b_i; i = 1,2,\dots,g\}$ la base (symplectique) correspondant à $\{x_i, y_i; 1 = 1,2,\dots,g\}$.

Dans la suite, p désigne un entier égal à 0, ou un nombre premier $\geqslant 2$. On note $\mathbb{F}_p[\Gamma]$ l'anneau de groupe de Γ à coefficients dans $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ($\mathbb{F}_o = \mathbb{Z}$) et $\bar{()} : \mathbb{F}_p[\Gamma] \to \mathbb{F}_p[\Gamma]$ l'isomorphisme d'anneaux défini par $\bar{x} = x^{-1}$ pour tout $x \in \Gamma$.

On désigne par $\hat{A}^{(p)}(Z_1,\dots,Z_{2g})$ (resp. $\hat{A}^{(p)}_m(Z_1,\dots,Z_{2g})$) l'anneau des séries formelles à coefficients dans $\mathbb{F}_p$, dans les variables non-commutatives $Z_1,\dots,Z_{2g}$ (resp. le sous-groupe additif engendré par les monômes de degré m).

La représentation de Magnus est l'homomorphisme d'anneaux :

$$\gamma : \mathbb{F}_p[\Gamma] \to \hat{A}^{(p)}(Z_1,\dots,Z_{2g}) = \hat{A}^{(p)}(Z)$$

défini par $\gamma(z_i) = 1 + Z_i$ et $\gamma(z_i^{-1}) = 1 - Z_i + Z_i^2 + \cdots + (-1)^k Z_i^k + \cdots$, pour tout $i = 1,2,\dots,2g$. Dans la suite, on identifiera un homéomorphisme f de $\mathrm{Mod}(g,1)$ avec l'isomorphisme induit sur Γ. On note $\partial_p/\partial z_i : \mathbb{F}_p[\Gamma] \to \mathbb{F}_p[\Gamma]$ la dérivée partielle de Fox (voir [3]).

Définition. On appelle matrice de Fox (mod p) de $f \in \mathrm{Mod}(g,1)$, la $2g \times 2g$ matrice à coefficients dans $\mathbb{F}_p[\Gamma]$:

$$B^{(p)}(f) = \begin{array}{c c} & j \\ i & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \overline{\partial_p f(z_j)/\partial z_i} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}.$$

On peut montrer [8] que $B^{(p)}(f \circ h) = B^{(p)}(f) \times {}^f B^{(p)}(h)$ (où ${}^f(a_{ij}) = (f(a_{ij}))$, si bien que $B^{(p)}(f)$ appartient à $\mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{F}_p[\Gamma])$.

On notera encore $B^{(p)}(f)$ son image dans $\mathrm{GL}_{2g}(\hat{A}^{(p)}(Z))$ par γ. Puisque $\hat{A}^{(p)}(Z)$ est un anneau gradué (par le degré), on peut écrire $B^{(p)}(f)$ comme une somme formelle :

$$B^{(p)}(f) = B_0^{(p)}(f) + B_1^{(p)}(f) + \cdots + B_k^{(p)}(f) + \cdots$$

où $B_k^{(p)}(f) \in \mathrm{Mat}_{2g}(\hat{A}_k^{(p)}(Z))$ (Mat_{2g} désignant l'ensemble des matrices $2g \times 2g$).

Remarque 1. Il est bien connu que $B_0^{(p)}(f)$ appartient à $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{F}_p)$, le groupe symplectique à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ et $B_0^{(p)}(f)$ est en fait la matrice de l'isomorphisme induit par f sur $H_1(S(g,1);\mathbb{F}_p)$, dans la base symplectique $\{a_i, b_i; i = 1,2,\dots,g\}$ définie plus haut. De plus, l'homomorphisme $B_0^{(p)} : \mathrm{Mod}(g,1) \to \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{F}_p)$ est surjectif.

2. La filtration de Johnson modulo p de Mod(g, 1)

On définit la filtration de Johnson (mod p) de $\mathrm{Mod}(g,1)$ par :

(a) $M(1,p) = \mathrm{Mod}(g,1)$,
(b) $M(2,p) = \{f \in \mathrm{Mod}(g,1);\ B_0^{(p)}(f) = I_{2g}\}$,
(c) $M(k,p) = \{f \in \mathrm{Mod}(g,1);\ B_0^{(p)}(f) = I_{2g},\ B_i^{(p)}(f) = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant k-2\}$ pour $k \geqslant 3$.

Remarque 2. Compte-tenu de la Remarque 1, $M(2,p)$ est le sous-groupe (normal) des homéomorphismes de $S(g,1)$ induisant l'identité sur $H_1(S(g,1);\mathbb{F}_p)$. On l'appelera groupe de Torelli mod p et on le notera $I^{(p)}(g,1)$. Pour $p = 0$, c'est le groupe de Torelli usuel, noté $I(g,1)$.

Remarque 3. On a démontré dans [9], que la filtration ci-dessus, pour $p = 0$, coincide avec la filtration définie par Johnson [6].

Proposition 1.

(a) *Pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$, $M(k, p)$ *est un sous-groupe normal de* $\mathrm{Mod}(g, 1)$.
(b) *La filtration* $\{M(k, p); k \in \mathbb{N}^*\}$ *est séparante, c'est-à-dire que* $\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} M(k, p) = \{1\}$.
(c) *La filtration* $\{M(k, p); k \geqslant 2\}$ *est* p*-linéaire, signifiant que* $M(k, p)/M(k + 1, p)$ *est un* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *espace vectoriel de dimension finie, pour tout* $k \geqslant 2$.
(d) *La filtration est centrale, c'est-à-dire que* $[M(k, p), M(h, p)] \subset M(k + h - 1, p)$, *pour tout* $h, k \geqslant 1$ (*où* $[,]$ *désigne le sous-groupe des commutateurs*).

3. Le groupe de Torelli (mod *p*)

La proposition suivante donne la structure du groupe de Torelli mod p :

Proposition 2. *Le groupe de Torelli* (mod p), $I^{(p)}(g, 1)$ *est le sous-groupe* (*normal*) *de* $\mathrm{Mod}(g, 1)$ *engendré par le groupe de Torelli usuel* $I(g, 1)$ *et les puissances* p*-ième de tous les twists de Dehn.*

Corollaire 3. *Tout élément* φ *de* $I^{(p)}(g, 1)$ *s'écrit* $\varphi = f \circ m$ *où* $f \in I(g, 1)$ *et* $m \in D^{(p)}(g, 1)$, *le sous-groupe engendré par les puissances* p*-ième des twists de Dehn.*

Pour un groupe G, on note G_{ab} son abélianisé. Poursuivant le parallèle avec les travaux de Johnson [5], on a la proposition suivante :

Proposition 4. *Soit* p *premier* $\geqslant 3$. *Alors* :
$I^{(p)}(g, 1)_{ab} \simeq \wedge^3 H_p \oplus \Gamma(2g, \mathbb{Z}, p)_{ab} \oplus T$ *où* :

– $H_p = H_1(S(g, 1); \mathbb{F}_p)$;
– $\wedge^3 H_p$ *désigne la troisième puissance extérieure de* H_p ;
– $\Gamma(2g, \mathbb{Z}, p)$ *désigne le groupe de congruence* $\mathrm{Ker}(\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z}) \to \mathrm{Sp}(2g, \mathbb{F}_p))$;
– T *est un groupe fini de* 2*-torsion.*

Dans [5], Johnson a montré que $I(g, 1)_{ab}$ est isomorphe, à 2-torsion finie près, à $\wedge^3 H$.

Proposition 5. *Soit* p *premier* $\geqslant 3$.

(1) $\Gamma(2g, \mathbb{Z}, p)_{ab} \simeq \Gamma(2g, \mathbb{Z}, p) / \Gamma(2g, \mathbb{Z}, p^2)$.
(2) $\Gamma(2g, \mathbb{Z}, p)/\Gamma(2g, \mathbb{Z}, p^2)$ *est isomorphe au sous-groupe des matrices* $2g \times 2g$ *à coefficients dans* $\mathbb{F}_p$ *du type* $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha^t \end{smallmatrix}\right)$ *où* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathrm{Mat}_g(\mathbb{F}_p)$ *et* β, γ *sont symétriques.*

4. Sphères d'homologie rationnelle et groupe de Torelli (mod *p*)

Soit Σ^3 une sphère d'homologie rationnelle de dimension 3, c'est-à-dire telle que $H_1(\Sigma^3; \mathbb{Z})$ est fini. On note n le cardinal de $H_1(\Sigma^3; \mathbb{Z})$. On a alors la :

Proposition 6. *Soit* p *un nombre premier* $\geqslant 2$ *divisant* $n - 1$. *Alors* Σ^3 *est homéomorphe à la variété* M_φ *obtenue en recollant deux corps d'anses de genre* g, *le long d'un élément* φ *du groupe de Torelli* mod p, $I^{(p)}(g, 1)$, *pour un certain* $g \in \mathbb{N}^*$.

D'après la Corollaire 3, un tel $\varphi \in I^{(p)}(g,1)$ s'écrit : $\varphi = f \circ m$, où $f \in I(g,1)$ et $m \in D^{(p)}(g,1)$. La 3-variété M_f est une sphère d'homologie entière ; on peut donc définir son invariant de Casson $\lambda(M_f) \in \mathbb{Z}$ (voir [2], ou [4]).

Conjecture $*$. *Pour $f \in I(g,1) \cap D^{(p)}(g,1)$, $\lambda(M_f) \equiv 0 \pmod p$, pour p premier > 3 et $g \geqslant 3$.*

Proposition 7. *Supposons la conjecture $*$ vraie et soit Σ^3 une sphère d'homologie rationnelle telle que $n =$ cardinal $H_1(\Sigma^3; \mathbb{Z})$. Soit p un nombre premier > 3 divisant $n-1$ et $\varphi = f \circ m \in I^{(p)}(g,1)$ donné par la Proposition 6.*
Alors $\gamma_p(\varphi) \equiv \lambda(M_f) \pmod p$ est un invariant de Σ^3.

Remarque 4. Généralisant un résultat de Morita [7], on a donné dans [10] une expression de $\lambda(M_f)$, pour $f \in I(g,1)$, qui ne dépend que de $B_i(f) = B_i^{(0)}(f)$, $i = 1, 2$, et d'une application $d : \mathrm{Mod}(g,1) \to \mathbb{Z}$, définie algébriquement dans [7].

5. Quelques ingrédients utilisés dans les preuves

La construction de la filtration de Johnson à l'aide du calcul de Fox a été faite dans [9] pour $p = 0$. La construction $(\mathrm{mod}\, p)$ est formellement la même.

Les démonstrations des résultats des Sections 3 et 4 reposent de façon essentielle sur des résultats profonds de Bass–Milnor–Serre [1], donnant la structure des groupes de congruence de $\mathrm{SL}(g,\mathbb{Z})$ et $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$.

Les résultats et méthodes des travaux fondamentaux de Johnson et Morita [5–8] sont utilisés de façon constante dans cette Note.

Additif 1. L'auteur a appris (fin mars 2008) que A. Putman a obtenu indépendamment les Propositions 4 et 5 (ArXiv : 0803.0539).

Additif 2. Les résultats de cette note restent valides, sans aucune modification de preuves, pour une classe beaucoup plus large d'entiers p. Plus précisément : les définitions et résultats des paragraphes 1 et 2 ainsi que la Proposition 2 et son corollaire, sont valables pour tout entier naturel $p \neq 1$. ; les Propositions 4 et 5 sont valides pour tout entier impair $\neq 1$. ; la Proposition 6 est vraie pour tout entier $\geqslant 2$. La conjecture * du paragraphe 4 peut s'énoncer pour tout entier $(\neq 1)$ premier avec 6 ; la Proposition 7 est alors vraie pour un tel entier.

Remerciements

Je veux enfin remercier L. Paris qui a attiré mon attention sur les problèmes $(\mathrm{mod}\, p)$ et avec qui j'ai eu de fructueuses conversations. Les preuves completes sont dans [11].

Références

[1] H. Bass, J. Milnor, J.-P. Serre, Solution of the congruence subgroup problem for SL_n $(n \geqslant 3)$ and Sp_{2n} $(n \geqslant 2)$, Inst. Hautes Études Sc. Publ. Math. 33 (1967) 59–137.
[2] A. Casson, Lectures at MSRI, 1985.
[3] R. Fox, Free differential calculus I, Ann. of Math. 57 (1953) 547–560.
[4] L. Guillou, A. Marin, Notes sur l'invariant de Casson des sphères d'homologie de dimension 3, Enseign. Math. 38 (1992) 233–290.
[5] D. Johnson, An abelian quotient of the mapping class group I_g, Math. Ann. 249 (1980) 225–242.
[6] D. Johnson, A survey of the Torelli group, Contemp. Math. 20 (1983) 165–179.
[7] S. Morita, Casson's invariant for homology 3-spheres and characteristic classes of surface bundles I, Topology 28 (1989) 305–323.
[8] S. Morita, Abelian quotients of subgroups of the mapping class group of surfaces, Duke Math. J. 70 (1993) 699–726.
[9] B. Perron, Homomorphic extensions of Johnson homomorphisms via Fox calculus, Ann. Inst. Fourier 54 (2004) 1073–1106.
[10] B. Perron, Mapping class group and the Casson invariant, Ann. Inst. Fourier 54 (2004) 1107–1138.
[11] B. Perron, Johnson filtration and Torelli group (mod p), Notes manuscriptes, Université de Bourgogne, Février 2008.