Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 707–710
Comptes Rendus Mathematique
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Logique/Combinatoire

La ($\leqslant k$)-demi-reconstructibilité des graphes pour $k \in \{11, 12\}$

Nadia El Amri

Faculté des sciences de Sfax, BP 802, 3018 Sfax, Tunisie

Reçu le 27 mars 2008 ; accepté après révision le 14 avril 2008

Disponible sur Internet le 27 mai 2008

Présenté par Jean-Yves Girard

Résumé

Soit un graphe $G = (S, A)$. Pour toute partie X de S est associé le sous-graphe $G(X) = (X, A \cap (X \times X))$ de G induit par X. Le dual de G est le graphe $G^* = (S, A^*)$ où, $A^* = \{(x, y)\colon (y, x) \in A\}$. Un graphe G' est demi-isomorphe à G, s'il est isomorphe à G ou à G^*. Soit un entier $k \geqslant 1$. Un graphe G', ayant le même ensemble de sommets S que G, est ($\leqslant k$)-demi-isomorphe à G lorsque pour toute partie X de S ayant au plus k sommets, les sous-graphes $G(X)$ et $G'(X)$ sont demi-isomorphes. Le graphe G est ($\leqslant k$)-demi-reconstructible lorsque tout graphe ($\leqslant k$)-demi-isomorphe à G lui est demi-isomorphe. J. G. Hagendorf élargit ainsi, en 1993, la problématique de la reconstruction à la demi-reconstruction. J. G. Hagendorf et G. Lopez ont montré que les graphes finis sont ($\leqslant 12$)-demi-reconstructibles. Ensuite, en 2003, J. Dammak a caractérisé les graphes finis ($\leqslant 11$)-demi-reconstructibles. Dans cette Note nous étudions le cas général des graphes (finis et infinis). Nous caractérisons les graphes infinis ($\leqslant 12$)-demi-reconstructibles. Ensuite, nous étendons l'étude de J. Dammak aux graphes infinis en caractérisant les graphes ($\leqslant 11$)-demi-reconstructibles. ***Pour citer cet article : N. El Amri, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abstract

The ($\leqslant k$)-half-reconstructibility of graphs for $k \in \{11, 12\}$ Let $G = (V, A)$ be a graph. For every subset X of V is associated the subgraph $G(X) = (X, A \cap (X \times X))$ of G induced by X. The dual of G is the graph $G^* = (V, A^*)$ such that, $A^* = \{(x, y)\colon (y, x) \in A\}$. A graph G' is half-isomorphic to G if it is isomorphic to G or G^*. Let k be a non negative integer. A graph G' defined on the same vertex set V of G is ($\leqslant k$)-half-isomorphic to G if for all subset X of V on at most k elements, the subgraphs $G(X)$ and $G'(X)$ are half-isomorphic. G is called ($\leqslant k$)-half-reconstructible provided that every graph G' which is ($\leqslant k$)-half-isomorphic to G is half-isomorphic to G. In 1993 J. G. Hagendorf expanded the reconstruction problematic to the half-reconstruction. J. G. Hagendorf and G. Lopez showed that the finite graphs are ($\leqslant 12$)-half-reconstructible. After that, in 2003, J. Dammak characterized the ($\leqslant 11$)-half-reconstructible finite graphs. In this Note we study the general case of graphs (finite and infinite). We characterize the ($\leqslant 12$)-half-reconstructible infinite graphs. Then, we extend the study made by J. Dammak to infinite graphs by characterizing the ($\leqslant 11$)-half-reconstructible infinite graphs. ***To cite this article: N. El Amri, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Adresse e-mail : nadia.math@yahoo.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2008.04.012

1. Introduction

1.1. Généralités

Un *graphe orienté* (ou tout simplement graphe) est un couple $G = (S, A)$ dans lequel S est un ensemble appelé ensemble des *sommets* de G, et A est un ensemble de couples d'éléments distincts de S, appelé ensemble des *arcs* de G. Une paire $\{x, y\}$ de sommets distincts de G est dite *arête neutre* de G si elle est pleine ou vide, elle est dite *pleine* (resp. *vide*) si $(x, y), (y, x) \in A$ (resp. $(x, y), (y, x) \notin A$). La paire $\{x, y\}$ est dite *arête orientée* de G, si elle n'est pas une arête neutre de G. Par exemple, un *tournoi* est un graphe dont toutes les arêtes sont orientées.

Soit $G = (S, A)$ un graphe. *Le dual* de G est le graphe $G^* = (S, A^*)$ où, $A^* = \{(x, y)\colon (y, x) \in A\}$. À chaque partie X de S est associé le *sous-graphe* $G(X)$ de G (induit par X) défini par : $G(X) = (X, A \cap (X \times X))$. On dit qu'une partie X de S vérifie une propriété $\mathcal{P}$, si le sous-graphe $G(X)$ vérifie $\mathcal{P}$. Une partie I de S, est un *intervalle* de G si pour tous éléments a, b de I et x de $S - I$, $(a, x) \in A$ si et seulement si $(b, x) \in A$, et $(x, a) \in A$ si et seulement si $(x, b) \in A$. Par ailleurs, définissons sur S une relation notée $\Re$ comme suit : pour tout élément x de S, $x \Re x$ et pour tous éléments distincts x, y de S, $x \Re y$ s'il existe une séquence $x = x_0, \ldots, x_n = y$ telle que : pour tout i élément de $\{0, \ldots, n-1\}$, la paire $\{x_i, x_{i+1}\}$ est une arête orientée. Cette relation est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence de cette relation sont les *composantes connexes orientées* de G.

1.2. Isomorphie, demi-isomorphie, reconstruction, demi-reconstruction

Soient deux graphes $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$. Une bijection f de S sur S' est un *isomorphisme* de G sur G' lorsque pour $x, y \in S$, $(x, y) \in A$ si et seulement si $(f(x), f(y)) \in A'$. Lorsqu'un tel isomorphisme existe, on dit que G et G' sont isomorphes et on note $G \sim G'$. Si le graphe G est isomorphe à son dual, on dit que G est *autodual*. Un *demi-isomorphisme* de G sur G' est soit un isomorphisme de G sur G' soit un isomorphisme de G^* sur G'.

Soient un graphe G et un entier $k \geqslant 1$. Un graphe G', ayant le même ensemble de sommets S que G, est $(\leqslant k)$-isomorphe (resp. $(\leqslant k)$-demi-isomorphe) à G lorsque pour toute partie X de S ayant au plus k sommets, les sous-graphes $G(X)$ et $G'(X)$ sont isomorphes (resp. demi-isomorphes). Le graphe G est $(\leqslant k)$-reconstructible (resp. $(\leqslant k)$-demi-reconstructible) lorsque tout graphe $(\leqslant k)$-isomorphe (resp. $(\leqslant k)$-demi-isomorphe) à G lui est isomorphe (resp. demi-isomorphe). Rappelons que le problème de la $(\leqslant k)$-reconstruction (resp. la $(\leqslant k)$-demi-reconstruction) des graphes a été posé par R. Fraïssé en 1970 [4] (resp. J.G. Hagendorf en 1993 [5]). Ensuite, dans [6] (resp. [5]) G. Lopez a (resp. J.G. Hagendorf et G. Lopez ont) montré que les graphes finis sont $(\leqslant 6)$-reconstructibles (resp. $(\leqslant 12)$-demi-reconstructibles).

1.3. Graphes particuliers

Tout tournoi transitif est appelé un *ordre total* ou une *chaîne*. Un *cycle* à 3 éléments est un tournoi non transitif à 3 sommets. On note ω (resp. ω^*) le type d'isomorphie de l' ordre usuel sur les entiers positifs (resp. négatifs). D'autre part, on appelle *consécutivité infinie à une seule extrémité* tout graphe isomorphe à l'un des quatre graphes obtenus à partir d'un ordre total de type ω ou ω^* en rendant toutes pleines ou toutes vides les arêtes reliant deux sommets non consécutifs. Un *pic* est un graphe à 3 sommets non autodual et contenant une seule arête neutre. Un *diamant* est un tournoi à 4 sommets contenant un et un seul cycle à 3 éléments. Comme dans [1], nous appelons *préchaîne* tout graphe qui n'abrite ni pic ni diamant et tel que deux arêtes neutres quelconques ne sont jamais adjacentes. Par exemple, un tournoi est une préchaîne si et seulement si aucun de ses sous-graphes n'est un diamant. Il est à noter que la morphologie des préchaînes a été obtenue en 1992 par G. Lopez et C. Rauzy [8] dans le cas fini et celle du cas infini, a été obtenue en 2007 par Y. Boudabbous et C. Delhommé [1].

2. Caractérisation des graphes $(\leqslant 12)$-demi-reconstructibles

Comme les graphes finis sont $(\leqslant 12)$-demi-reconstructibles [5], nous caractérisons dans cette section les graphes infinis $(\leqslant 12)$-demi-reconstructibles.

Définition 2.1. Soient $G = (S, A)$ un graphe et I un intervalle propre de G. On appelle *contracté de G en I*, le graphe $G_I = ((S - I) \cup \{I\}, A_I)$ où, A_I est défini comme suit :

$(x, y) \in A_I$ si $((x, y) \in A \cap [(S - I) \times (S - I)]$ ou $(x = I,\ y \notin I$ et $\exists z \in I/(z, y) \in A)$ ou $(x \notin I,\ y = I$ et $\exists z \in I/(x, z) \in A)$.

Théorème 2.2. *Un graphe infini G est non* $(\leqslant 12)$*-demi-reconstructible si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite* :

(i) *G admet au moins un intervalle infini qui est une chaîne.*
(ii) *G admet au moins deux intervalles dont chacun est une consécutivité infinie à une seule extrémité.*
(iii) *G admet un seul intervalle I qui est une consécutivité infinie à une seule extrémité et il n'existe pas d'isomorphisme g de G_I sur $(G_I)^*$ tel que $g(I) = I$.*

La notion suivante de *classe de différence* introduite par G. Lopez en 1972 [6] joue un rôle essentiel dans la preuve de la condition nécessaire.

Définition 2.3. [6] Soient $G = (S, A)$ et $G' = (S, A')$ deux graphes $(\leqslant 2)$-demi-isomorphes. La relation de différence de G et G' est la relation d'équivalence $D_{G,G'}$ définie sur S comme suit : pour tout élément x de S, $x D_{G,G'} x$ et pour tous éléments distincts x, y de S, $x D_{G,G'} y$ s'il existe une séquence $x_0 = x, \ldots, x_n = y$ d'éléments de S telle que pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $(x_i, x_{i+1}) \in A$ si et seulement si $(x_i, x_{i+1}) \notin A'$. Les classes d'équivalence de $D_{G,G'}$ sont appelées les classes de différence de G et G'.

La condition nécessaire du Théorème 2.2 découle directement des trois résultats suivants :

Théorème 2.4. *[6,7] Les graphes finis sont* $(\leqslant 6)$*-reconstructibles.*

Théorème 2.5. *[5] Si $G = (S, A)$ et $G' = (S, A')$ sont deux graphes finis* $(\leqslant 12)$*-demi-isomorphes, alors G et G' ou G^* et G' sont* $(\leqslant 6)$*-isomorphes.*

Lemme 2.6. *Soient G un graphe infini et G' un graphe* $(\leqslant 6)$*-isomorphe à G. Si G' est non demi-isomorphe à G, alors G vérifie l'une des conditions* (i)–(iii).

Pour la condition suffisante, nous construisons un graphe qui est $(\leqslant 12)$-demi-isomorphe à G et ne lui est pas demi-isomorphe. Comme dans un graphe G, les intervalles maximaux qui sont des chaînes infinies (resp. les intervalles qui sont des consécutivités infinies à une seule extrémité) sont deux à deux disjoints [2], alors si (i) est vérifiée, nous considérons un intervalle maximal I_0 de G qui est une chaîne infinie. L'ensemble des types d'isomorphie des chaînes infinies qui sont équipotentes à I_0 admet au moins 2 types c_0 et c_1 qui ne sont pas demi-isomorphes. Ainsi, nous considérons le graphe G' (resp. G'') obtenu à partir de G en changeant le type d'isomorphie des intervalles maximaux équipotents à I_0 qui sont des chaînes infinies par c_0 (resp. c_1). Ainsi, au moins l'un des graphes G' ou G'' est $(\leqslant 12)$-demi-isomorphe à G et ne lui est pas demi-isomorphe. Si (ii) est vérifiée, dans ce cas s'il existe un type d'isomorphie t d'une consécutivité infinie à une seule extrémité tel que G admet un intervalle I_1 isomorphe à t et au moins un autre intervalle demi-isomorphe à t, nous considérons le graphe G' (resp. G'') obtenu à partir de G en remplaçant, pour tout éventuel intervalle J de G autre que I_1 qui est isomorphe à t (resp. t^*), le sous-graphe $G(J)$ par $G^*(J)$. Ainsi, au moins l'un des graphes G' ou G'' est $(\leqslant 12)$-demi-isomorphe à G et ne lui est pas demi-isomorphe. Sinon, dans ce cas G admet deux intervalles J_1 et J_2 qui sont des consécutivités infinies à une seule extrémité et qui ne sont pas demi-isomorphes. Ainsi, nous considérons le graphe G' obtenu à partir de G en remplaçant $G(J_1)$ par $G^*(J_1)$. Enfin, si (iii) est vérifiée, nous considérons le graphe G' obtenu à partir de G en remplaçant le sous-graphe $G(I)$ par $G^*(I)$.

3. Caractérisation des graphes $(\leqslant 11)$-demi-reconstructibles

Comme tout graphe non $(\leqslant 12)$-demi-reconstructible est non $(\leqslant 11)$-demi-reconstructible, nous caractérisons dans ce paragraphe les graphes qui sont $(\leqslant 12)$-demi-reconstructibles et non $(\leqslant 11)$-demi-reconstructibles.

Théorème 3.1. *Soit G un graphe $(\leqslant 12)$-demi-reconstructible. Le graphe G est non $(\leqslant 11)$-demi-reconstructible si et seulement si tout sous-graphe de G à au plus 5 sommets est autodual et G admet au moins deux composantes connexes orientées qui sont des tournois sans diamant non autoduaux.*

Notons que dans le Théorème 3.1, comme G est $(\leqslant 12)$-demi-reconstructible, alors les tournois sans diamant de la condition suffisante n'ont aucun intervalle propre infini.

Notation 3.2. Étant donné un graphe G admettant au moins un sous-graphe fini non autodual, on note $\mathcal{C}_{n.a}(G)$ le plus petit cardinal des sous-graphes non autoduaux de G. D'après le Théorème 2.4, pour un tel graphe G, $\mathcal{C}_{n.a}(G) \in \{3, 4, 5, 6\}$. Lorsque le graphe G n'admet aucun sous-graphe fini non autodual, on convient de dire que $\mathcal{C}_{n.a}(G)$ est infini.

Pour la preuve du Théorème 3.1, nous utilisons les Théorèmes 2.2 et 2.4, le Lemme 2.6 et les deux lemmes suivants qui étendent aux graphes infinis des résultats de J. Dammak [3] sur les graphes finis :

Lemme 3.3. *Soient $G = (S, A)$ un graphe tel que $\mathcal{C}_{n.a}(G)$ est fini, $G' = (S, A')$ un graphe $(\leqslant 11)$-demi-isomorphe à G et C une classe de l'équivalence $D_{G,G'}$.*

(i) *Si I_0 est une partie de C telle que $|I_0| = \mathcal{C}_{n.a}(G)$ et $G(I_0)$ est non autodual, alors $G'(I_0) \sim G^*(I_0)$.*
(ii) *Si I_0 est une partie de S telle que $|I_0| = \mathcal{C}_{n.a}(G)$, $G(I_0)$ est non autodual et $G(I_0) \sim G'(I_0)$, alors C est un intervalle de G et G', $G(C)$ et $G'(C)$ sont ($\leqslant$ max ($\mathcal{C}_{n.a}(G)$-1,11-$\mathcal{C}_{n.a}(G)$))-isomorphes.*

Lemme 3.4. *Soient G un graphe $(\leqslant 12)$-demi-reconstructible et G' un graphe $(\leqslant 11)$-demi-isomorphe à G. Si $\mathcal{C}_{n.a}(G) = 6$ et G admet au plus une composante connexe orientée qui est un tournoi sans diamant non autodual, alors G' est demi-isomorphe à G.*

Références

[1] Y. Boudabbous, C. Delhommé, Prechains and k-selfduality, preprint, 2008.
[2] Y. Boudabbous, C. Delhommé, k-reconstructible binary relations, preprint, 2008.
[3] J. Dammak, Caractérisation des relations binaires finies d-demi-reconstructibles, Proyecciones 22 (1) (2003) 31–61.
[4] R. Fraïssé, Abritement entre relations et spécialement entre chaînes, Symposi. Math., Instituto Nazionale di Alta Matematica 5 (1970) 203–251.
[5] J.G. Hagendorf, G. Lopez, La demi-reconstructibilité des relations binaires d'au moins 13 éléments, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 317 (1993) 7–12.
[6] G. Lopez, Deux résultats concernant la détermination d'une relation par les types d'isomorphie de ses restrictions, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A 274 (1972) 1525–1528.
[7] G. Lopez, L'indéformabilité des relations et multirelations binaires, Z. Math. Logik Grundlag. Math. 24 (1978) 303–317.
[8] G. Lopez, C. Rauzy, Reconstruction of binary relations from their restrictions of cardinality 2, 3, 4 and $(n-1)$. I, Z. Math. Logik Grundlag. Math. 38 (1992) 27–37.