Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 533–538

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations aux dérivées partielles

Une borne inférieure pour la constante de la condition inf-sup sur l'opérateur de divergence

Stéphane Del Pino [a], Ulrich Razafison [b], Driss Yakoubi [b]

[a] *CEA/DAM-île-de-France, département des sciences de la simulation et de l'information, Bruyère-le-Châtel, 91297 Arpajon Cedex, France*
[b] *UPMC Univ Paris 06, UMR 7598, Laboratoire Jacques-Louis Lions, F-75005, Paris, France*

Reçu le 12 juillet 2007 ; accepté après révision le 12 mars 2008

Disponible sur Internet le 15 avril 2008

Présenté par Olivier Pironneau

Résumé

La condition inf-sup joue un rôle important dans de nombreux problèmes issus de la mécanique des fluides. Le but de cette Note est de donner, pour tout ouvert borné connexe de frontière lipschitzienne ω une borne inférieure pour la constante de la condition inf-sup qui ne dépend que de la norme du relèvement harmonique sur ω et du $\sup_{\Omega\supset\overline{\omega}} \beta(\Omega)/c_P(\Omega)$ où $c_P(\Omega) > 1$ est la constante définie par $\|v\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_P(\Omega)|v|_{H^1(\Omega)}$. ***Pour citer cet article : S. Del Pino et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***
© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

A lower bound for the inf-sup condition's constant for the divergence operator. The inf-sup condition plays an important role in problems from fluid mechanics. The purpose of this Note is to give, for any connected bounded open set ω with a Lipschitz-continuous boundary, a lower bound for the inf-sup condition's constant that only depends on the norm of the harmonic trace lifting on ω and on the $\sup_{\Omega\supset\overline{\omega}} \beta(\Omega)/c_P(\Omega)$ where $c_P(\Omega) > 1$ is a constant defined by $\|v\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_P(\Omega)|v|_{H^1(\Omega)}$. ***To cite this article: S. Del Pino et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***
© 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

Let ω be a bounded open set of $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, with a Lipschitz-continuous boundary. We denote by $b_\omega(\cdot,\cdot)$ the bilinear form

$$\forall(\boldsymbol{u}, p) \in H^1(\omega)^d \times L^2(\omega) \quad b_\omega(\boldsymbol{u}, p) = -\int_\omega \operatorname{div} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\, p(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

We will use the notation $L^2_0(\omega) = \{q \in L^2(\omega),\ \int_\omega q(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0\}$. We recall the inf-sup condition, which was first introduced, independently by I. Babuška [1] and F. Brezzi [2] in an abstract framework (see also [3]).

Adresses e-mail : stephane.delpino@cea.fr (S. Del Pino), razafison@ann.jussieu.fr (U. Razafison), yakoubi@ann.jussieu.fr (D. Yakoubi).

1631-073X/$ – see front matter © 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2008.03.009

Theorem 0.1 *(Inf-sup condition). Let $\omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, be a connected bounded open set with a Lipschitz-continuous boundary. Then there exists a constant $\beta = \beta(\omega) > 0$ that only depends on the domain ω, such that*

$$\inf_{q \in L_0^2(\omega)} \sup_{\boldsymbol{v} \in H_0^1(\omega)^d} \frac{b_\omega(\boldsymbol{v}, q)}{\|q\|_{L^2(\omega)} |\boldsymbol{v}|_{H^1(\omega)^d}} = \beta,$$

where $|\cdot|_{H^1(\omega)^d}$ is the semi-norm of $H^1(\omega)^d$.

The purpose of this Note is to give a lower bound for the constant $\beta(\omega)$. More precisely, we establish the following result:

Theorem 0.2 *(Lower bound). Let ω be a connected bounded open set of $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, with a Lipschitz-continuous boundary. Then for all $\Omega \supset \overline{\omega}$ connected bounded open set of $\mathbb{R}^d$ with a Lipschitz-continuous boundary, one has*

$$\beta(\omega) \geqslant \frac{\beta(\Omega)}{c_p(\Omega)(1 + \|R_h\|)},$$

where R_h is the harmonic trace lifting on ω and $c_p(\Omega) > 1$ is the constant defined by (3).

Proof. (Sketch.) Let first $q_\omega \in L_0^2(\omega)$. Then, to prove the previous lower bound of $\beta(\omega)$, it is enough to show (5). Next, let $\boldsymbol{v}_\Omega \in H_0^1(\Omega)^d$ and $\boldsymbol{v}_\omega = \boldsymbol{v}_\Omega|_\omega \in H^1(\omega)^d$ and consider $q_\Omega \in L^2(\Omega)$ defined by (6). The proof of (5) is made of three steps:

- In the first step, we compute $b_\Omega(\boldsymbol{v}_\Omega, q_\Omega)$ and we show inequality (12).
- In the second step, using (12), we prove the first lower bound (14), where $c = \|\gamma\|\|R\|$, γ is the trace operator from $H^1(\omega)^d$ to $H^{1/2}(\partial\omega)^d$ and R is a linear and continuous trace lifting operator from $H^{1/2}(\partial\omega)^d$ into $H^1(\omega)^d$.
- In the third step, we give a characterisation of the constant c: choosing $\|\gamma \boldsymbol{v}\|_{H^{1/2}(\partial\omega)^d} = \inf\{\|\boldsymbol{w}\|_{H^1(\omega)^d}, \gamma\boldsymbol{w} = \gamma\boldsymbol{v} \text{ on } \partial\omega\}$, we naturally have $c = \|R\|$. Then the smallest c is given by choosing the harmonic trace lifting R_h. $\square$

Observe now that if $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ is a vector of $\mathbb{R}^d$, λ is a real number and $\Phi_{\lambda,\boldsymbol{a}}$ is the mapping defined by (15), then one can easily show that $\beta(\Omega_{\lambda,\boldsymbol{a}}) = \beta(\Omega)$. This property of the inf-sup constant $\beta(\omega)$ together with Theorem 0.2 allow one to have the following result:

Corollary 0.3. *Let ω be a connected bounded open set of $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, with a Lipschitz-continuous boundary. Then for all connected bounded open set Ω of $\mathbb{R}^d$ with a Lipschitz-continuous boundary, we have*

$$c_p(\omega)\big(1 + \|\tilde{R}_h\|\big)\beta(\Omega) \geqslant \beta(\omega) \geqslant \frac{\beta(\Omega)}{c_p(\Omega)(1 + \|R_h\|)},$$

where R_h and $\tilde{R}_h$ are respectively the harmonic trace lifting operators on ω and Ω.

Note that if in the definition of the inf-sup constant $\beta(\omega)$ we choose the full norm of $H^1(\omega)^d$ (see (16)), then the lower bound is reduced to (17).

1. Introduction

On considère un ouvert ω borné de $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, de frontière lipschitzienne. Nous noterons $b_\omega(\cdot,\cdot)$ la forme bilinéaire qui à tout couple $(\boldsymbol{u}, p) \in H^1(\Omega)^d \times L^2(\Omega)$ associe le réel

$$b_\omega(\boldsymbol{u}, p) = -\int_\omega \operatorname{div} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\, p(\boldsymbol{x})\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{1}$$

Nous rappelons la condition inf-sup qui a été établie indépendemment par I. Babuška [1] et par F. Brezzi [2] dans un cadre abstrait (voir aussi [3]) :

Théorème 1.1 *(Condition inf-sup). Soit ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$, $d=2,3$, de frontière lipschitzienne. Il existe une constante $\beta=\beta(\omega)>0$ qui ne dépend que du domaine ω, telle que*

$$\inf_{q\in L_0^2(\omega)}\ \sup_{\boldsymbol{v}\in H_0^1(\omega)^d} \frac{b_\omega(\boldsymbol{v},q)}{\|q\|_{L^2(\omega)}|\boldsymbol{v}|_{H^1(\omega)^d}}=\beta. \tag{2}$$

Ici $L_0^2(\omega)$ désigne l'espace $\{q\in L^2(\omega),\ \int_\omega q(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0\}$ et $|\cdot|_{H^1(\omega)}$ la semi-norme de $H^1(\omega)^d$.

Supposons que Ω soit un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$ de frontière lipschitzienne. Pour $v\in H_0^1(\Omega)$, on introduit la plus petite constante $c_p(\Omega)>1$ vérifiant

$$\|v\|_{H^1(\Omega)}\leqslant c_p(\Omega)|v|_{H^1(\Omega)}. \tag{3}$$

Le but de cette Note est de donner une borne inférieure pour la constante $\beta(\omega)$, qui ne dépend que de la norme du relèvement harmonique sur ω et du $\sup_{\Omega\supset\overline{\omega}}\beta(\Omega)/c_p(\Omega)$.

2. Une borne inférieure pour la constante de la condition inf-sup

Nous allons maintenant énoncer le résultat principal de cette Note :

Théorème 2.1 *(Borne inférieure). Soit ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$, $d=2,3$, de frontière lipschitzienne. Alors, pour tout Ω ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$ de frontière lipschitzienne tel que $\Omega\supset\overline{\omega}$, on a*

$$\beta(\omega)\geqslant\frac{\beta(\Omega)}{c_p(\Omega)(1+\|R_h\|)}, \tag{4}$$

où R_h est l'opérateur de relèvement harmonique sur ω.

Nous allons à present prouver cette minoration de $\beta(\omega)$. Soit tout d'abord $q_\omega\in L_0^2(\omega)$. D'après la définition de $\beta(\omega)$, pour établir (4), il suffit de montrer que

$$\sup_{\boldsymbol{v}\in H_0^1(\omega)}\frac{b_\omega(\boldsymbol{v},q_\omega)}{|\boldsymbol{v}|_{H^1(\omega)}\|q_\omega\|_{L^2(\omega)}}\geqslant\frac{\beta(\Omega)}{c_p(\Omega)(1+\|R_h\|)}. \tag{5}$$

Soient maintenant $\boldsymbol{v}_\Omega\in H_0^1(\Omega)^d$ et $\boldsymbol{v}_\omega$ sa restriction sur ω : $\boldsymbol{v}_\omega=\boldsymbol{v}_\Omega|_\omega$ ($\boldsymbol{v}_\omega=\boldsymbol{v}_\Omega$ presque partout dans ω). Par construction, on a $\boldsymbol{v}_\omega\in H^1(\omega)^d$. Nous considérons par ailleurs la fonction q_Ω définie de la façon suivante :

$$q_\Omega=\begin{cases}\alpha q_\omega & \text{sur } \omega,\\ 0 & \text{sur } \Omega\setminus\omega,\end{cases} \tag{6}$$

où α est une constante réelle que nous choisirons ultérieurement. Notons que, par construction, q_Ω appartient à $L_0^2(\Omega)$ et

$$\|q_\Omega\|_{L^2(\Omega)}=|\alpha|\|q_\omega\|_{L^2(\omega)}. \tag{7}$$

La preuve de (5) est composée de trois étapes.

2.1. *Première étape : calcul de $b_\Omega(\boldsymbol{v}_\Omega,q_\Omega)$*

Nous distinguons ici deux cas : selon que $\boldsymbol{v}_\omega$ est nul ou non sur ω.

2.1.1. *Le cas $\boldsymbol{v}_\Omega|_\omega=\boldsymbol{v}_\omega\neq\boldsymbol{0}$*

Soit R un opérateur de relèvement linéaire continu de $H^{1/2}(\partial\omega)^d$ dans $H^1(\omega)^d$ de norme égale à c_R. On a alors

$$\|R\gamma\boldsymbol{v}_\omega\|_{H^1(\omega)^d}\leqslant c_R\|\gamma\boldsymbol{v}_\omega\|_{H^{1/2}(\partial\omega)^d}\leqslant c_Rc_\gamma\|\boldsymbol{v}_\omega\|_{H^1(\omega)^d},$$

où c_γ est la norme de l'opérateur de trace γ de $H^1(\omega)^d$ dans $H^{1/2}(\partial\omega)^d$. On note $c=c_Rc_\gamma$ et on pose $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_\omega-R\gamma\boldsymbol{v}_\omega$. Par construction $\boldsymbol{v}\in H_0^1(\omega)^d$ et on a

$$|\boldsymbol{v}|_{H^1(\omega)^d}\leqslant|\boldsymbol{v}_\omega|_{H^1(\omega)^d}+|R\gamma\boldsymbol{v}_\omega|_{H^1(\omega)^d}\leqslant(1+c)\|\boldsymbol{v}_\omega\|_{H^1(\omega)^d}. \tag{8}$$

De plus, comme $\boldsymbol{v}_\omega$ est la restriction de $\boldsymbol{v}_\Omega$ sur ω, il est clair que $\|\boldsymbol{v}_\omega\|_{H^1(\omega)^d} \leqslant \|\boldsymbol{v}_\Omega\|_{H^1(\Omega)^d}$, et en utilisant (3) et (8), on obtient donc

$$|\boldsymbol{v}|_{H^1(\omega)^d} \leqslant c_p(\Omega)(1+c)|\boldsymbol{v}_\Omega|_{H^1(\Omega)^d}. \tag{9}$$

Estimons maintenant $b_\Omega(\boldsymbol{v}_\Omega, q_\Omega)$. D'après (1), on peut écrire

$$b_\Omega(\boldsymbol{v}_\Omega, q_\Omega) = -\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{v}_\Omega\, q_\Omega \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_\omega \operatorname{div} \boldsymbol{v}_\Omega\, q_\Omega \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\Omega\setminus\omega} \operatorname{div} \boldsymbol{v}_\Omega\, q_\Omega \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Grâce à la définition (6), on a

$$b_\Omega(\boldsymbol{v}_\Omega, q_\Omega) = -\int_\omega \operatorname{div} \boldsymbol{v}_\omega\, \alpha q_\omega \,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

$$b_\Omega(\boldsymbol{v}_\Omega, q_\Omega) = -\alpha \int_\omega \operatorname{div}(\boldsymbol{v} + R\gamma \boldsymbol{v}_\omega)\, q_\omega \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Finalement, on obtient

$$b_\Omega(\boldsymbol{v}_\Omega, q_\Omega) = \alpha b_\omega(\boldsymbol{v}, q_\omega) - \alpha \int_\omega \operatorname{div} R\gamma \boldsymbol{v}_\omega\, q_\omega \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

Nous choisissons à présent α pour que la quantité $b_\Omega(\boldsymbol{v}_\Omega, q_\Omega)$ soit inférieure à la quantité $\alpha b_\omega(\boldsymbol{v}, q_\omega)$. Pour cela, il suffit de prendre

$$\textbf{si} \int_\omega \operatorname{div} R\gamma \boldsymbol{v}_\omega\, q_\omega \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \neq 0, \quad \alpha = \frac{\int_\omega \operatorname{div} R\gamma \boldsymbol{v}_\omega\, q_\omega \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{|\int_\omega \operatorname{div} R\gamma \boldsymbol{v}_\omega\, q_\omega \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}|}, \quad \text{et}$$

$$\textbf{si} \int_\omega \operatorname{div} R\gamma \boldsymbol{v}_\omega\, q_\omega \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0, \quad \alpha = 1.$$

Notons que dans les deux cas, la constante α vérifie $|\alpha| = 1$, et on a

$$\frac{b_\Omega(\boldsymbol{v}_\Omega, q_\Omega)}{|\boldsymbol{v}_\Omega|_{H^1(\Omega)^d}} \leqslant \alpha \frac{b_\omega(\boldsymbol{v}, q_\omega)}{|\boldsymbol{v}_\Omega|_{H^1(\Omega)^d}} \leqslant \frac{|b_\omega(\boldsymbol{v}, q_\omega)|}{|\boldsymbol{v}_\Omega|_{H^1(\Omega)^d}}.$$

D'après la relation (9), on obtient

$$\frac{b_\Omega(\boldsymbol{v}_\Omega, q_\Omega)}{|\boldsymbol{v}_\Omega|_{H^1(\Omega)^d}} \leqslant c_p(\Omega)(1+c) \frac{|b_\omega(\boldsymbol{v}, q_\omega)|}{|\boldsymbol{v}|_{H^1(\omega)^d}}.$$

Cette dernière inégalité étant vérifiée pout tout $\boldsymbol{v}_\Omega \in H_0^1(\Omega)^d$, avec $\boldsymbol{v}_\Omega|_\omega \neq \mathbf{0}$, on en déduit que

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{v}_\Omega \in H_0^1(\Omega)^d \\ \boldsymbol{v}_\Omega|_\omega \neq \mathbf{0}}} \frac{b_\Omega(\boldsymbol{v}_\Omega, q_\Omega)}{|\boldsymbol{v}_\Omega|_{H^1(\Omega)^d}} \leqslant c_p(\Omega)(1+c) \sup_{\boldsymbol{v} \in H_0^1(\omega)^d} \frac{|b_\omega(\boldsymbol{v}, q_\omega)|}{|\boldsymbol{v}|_{H^1(\omega)^d}},$$

c'est-à-dire

$$\sup_{\substack{\boldsymbol{v}_\Omega \in H_0^1(\Omega)^d \\ \boldsymbol{v}_\Omega|_\omega \neq \mathbf{0}}} \frac{b_\Omega(\boldsymbol{v}_\Omega, q_\Omega)}{|\boldsymbol{v}_\Omega|_{H^1(\Omega)^d}} \leqslant c_p(\Omega)(1+c) \sup_{\boldsymbol{v} \in H_0^1(\omega)^d} \frac{b_\omega(\boldsymbol{v}, q_\omega)}{|\boldsymbol{v}|_{H^1(\omega)^d}}. \tag{10}$$

Nous traitons maintenant le cas $\boldsymbol{v}_\omega = \mathbf{0}$.

2.1.2. Le cas : $\boldsymbol{v}_\Omega|_\omega = \boldsymbol{v}_\omega = \mathbf{0}$

Le calcul de b_Ω donne :

$$b_\Omega(\boldsymbol{v}_\Omega, q_\Omega) = -\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{v}_\Omega\, q_\Omega \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\int_\omega \operatorname{div} \boldsymbol{v}_\Omega\, q_\Omega \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \int_{\Omega\setminus\omega} \operatorname{div} \boldsymbol{v}_\Omega\, q_\Omega \,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

D'après la définition (6) et comme $\boldsymbol{v}_\omega = \mathbf{0}$, on a

$$b_\Omega(\boldsymbol{v}_\Omega, q_\Omega) = -\int_\omega \operatorname{div} \boldsymbol{v}_\omega\, \alpha q_\omega \,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0.$$

On obtient donc

$$0 = \sup_{\substack{\boldsymbol{v}_\Omega \in H_0^1(\Omega)^d \\ \boldsymbol{v}_\Omega|_\omega \neq \mathbf{0}}} \frac{b_\Omega(\boldsymbol{v}_\Omega, q_\Omega)}{|\boldsymbol{v}_\Omega|_{H^1(\Omega)^d}} \leqslant c_p(\Omega)(1+c) \sup_{\boldsymbol{v} \in H_0^1(\omega)^d} \frac{|b_\omega(\boldsymbol{v}, q_\omega)|}{|\boldsymbol{v}|_{H^1(\omega)^d}}. \tag{11}$$

Les relations (10) et (11) donnent l'inégalité suivante :

$$\sup_{\boldsymbol{v}_\Omega \in H_0^1(\Omega)^d} \frac{b_\Omega(\boldsymbol{v}_\Omega, q_\Omega)}{|\boldsymbol{v}_\Omega|_{H^1(\Omega)^d}} \leqslant c_p(\Omega)(1+c) \sup_{\boldsymbol{v} \in H_0^1(\omega)^d} \frac{|b_\omega(\boldsymbol{v}, q_\omega)|}{|\boldsymbol{v}|_{H^1(\omega)^d}}. \tag{12}$$

2.2. Deuxième étape : minoration de $\beta(\omega)$

D'après la définition de $\beta(\Omega)$, on a

$$\sup_{\boldsymbol{v}_\Omega \in H_0^1(\Omega)^d} \frac{b_\Omega(\boldsymbol{v}_\Omega, q_\Omega)}{|\boldsymbol{v}_\Omega|_{H^1(\Omega)^d}} \geqslant \beta(\Omega)\|q_\Omega\|_{L^2(\Omega)}.$$

Grâce à l'inégalité (12), on obtient donc

$$\sup_{\boldsymbol{v} \in H_0^1(\omega)^d} \frac{b_\omega(\boldsymbol{v}, q_\omega)}{|\boldsymbol{v}|_{H^1(\omega)^d}} \geqslant \frac{\beta(\Omega)}{c_p(\Omega)(1+c)}\|q_\Omega\|_{L^2(\Omega)}. \tag{13}$$

En utilisant (13) et (7), et comme $|\alpha| = 1$, on en déduit la minoration de $\beta(\omega)$ suivante :

$$\sup_{\boldsymbol{v} \in H_0^1(\omega)^d} \frac{b_\omega(\boldsymbol{v}, q_\omega)}{|\boldsymbol{v}|_{H^1(\omega)^d}\|q_\omega\|_{L^2(\omega)}} \geqslant \frac{\beta(\Omega)}{c_p(\Omega)(1+c)}, \tag{14}$$

où $c = c_R c_\gamma = \|\gamma\|\|R\|$ ne dépend que du domaine ω. Il reste maintenant à caractériser la constante c.

2.3. Troisisième étape : caractérisation de la constante c

Comme dans ce qui précède, l'opérateur de relèvement est quelconque, afin de choisir le plus petit c possible, on peut prendre $c = \|\gamma\| \inf_{R\in H} \|R\|$, où

$$\|\gamma\| = \sup_{\boldsymbol{v}\in H^1(\omega)^d} \frac{\|\gamma \boldsymbol{v}\|_{H^{1/2}(\partial\omega)^d}}{\|\boldsymbol{v}\|_{H^1(\omega)^d}}, \qquad \|R\| = \sup_{\boldsymbol{v}\in H^{1/2}(\partial\omega)^d} \frac{\|R\boldsymbol{v}\|_{H^1(\omega)^d}}{\|\boldsymbol{v}\|_{H^{1/2}(\partial\omega)^d}},$$

et $H = \{R\text{: relèvement linéaire continu de } H^{1/2}(\partial\omega)^d \text{ dans } H^1(\omega)^d\}$.

Si on prend $\|\gamma \boldsymbol{v}\|_{H^{1/2}(\partial\omega)^d} = \inf\{\|\boldsymbol{w}\|_{H^1(\Omega)^d}, \gamma\boldsymbol{w} = \gamma\boldsymbol{v} \text{ sur } \partial\Omega\}$, alors $c = \inf_{R\in H}\|R\|$. De plus, on a $\inf_{R\in H}\|R\| = \|R_h\|$, où R_h est le relèvement harmonique, donc le plus petit c est $c = \|R_h\|$. Ceci termine la preuve de (5). □

Remarque 1. Soient $\boldsymbol{a}$ un vecteur quelconque non nul de $\mathbb{R}^d$, λ un réel et $\Phi_{\lambda,\boldsymbol{a}}$ l'application suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_{\lambda,\boldsymbol{a}} : \Omega &\to \Omega_{\lambda,\boldsymbol{a}}, \\ \boldsymbol{x} &\to \Phi_{\lambda,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} + \lambda\boldsymbol{x}. \end{aligned} \tag{15}$$

On a alors

$$\beta(\Omega_{\lambda,\boldsymbol{a}}) = \beta(\Omega).$$

Autrement dit, la constante $\beta(\Omega)$ vérifiant la condition inf-sup est invariante par translation et par homothétie du domaine Ω.

Grâce à la propriété ci-dessus et au Théorème 2.1, on peut facilement obtenir un encadrement de la constante $\beta(\omega)$:

Corollaire 2.2. *Soit ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, de frontière lipschitzienne. Alors pour tout Ω ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$ de frontière lipschitzienne, on a*

$$c_p(\omega)\big(1 + \|\tilde{R}_h\|\big)\beta(\Omega) \geqslant \beta(\omega) \geqslant \frac{\beta(\Omega)}{c_p(\Omega)(1 + \|R_h\|)},$$

où R_h et $\tilde{R}_h$ sont respectivement les opérateurs de relèvement harmonique sur ω et Ω.

Remarque 2. Soit ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ de frontière lipschitzienne. Si la constante $\beta(\omega)$ vérifiant la condition inf-sup est definie en choisissant la norme complète de $H^1(\omega)^d$:

$$\beta(\omega) = \inf_{q \in L^2_0(\omega)} \sup_{\boldsymbol{v} \in H^1_0(\omega)^d} \frac{b_\omega(\boldsymbol{v}, q)}{\|q\|_{L^2(\omega)} \|\boldsymbol{v}\|_{H^1(\omega)^d}}, \tag{16}$$

alors on peut montrer la minoration suivante :

$$\beta(\omega) \geqslant \frac{\sup_{\Omega \supset \overline{\omega}} \beta(\Omega)}{1 + \|R_h\|}. \tag{17}$$

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier C. Bernardi, T. Chacón Rebollo, V. Girault et F. Lagoutière pour leurs précieux conseils et nombreuses remarques.

Références

[1] I. Babuška, The finite element method with Lagrangian multipliers, Numer. Math. 20 (1973) 179–192.
[2] F. Brezzi, On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers, RAIRO. Anal. Numer. R2 (1974) 129–151.
[3] V. Girault, P.-A. Raviart, Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations,Theory and Algorithms, Springer-Verlag, 1986.