Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 249–252
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Logique

Les tournois partiellement critiques

Mohamed Yahia Sayar

Faculté des sciences de Sfax, département de mathématiques, route de la soukra km 4, BP 802, 3018 Sfax, Tunisie

Reçu le 17 janvier 2008 ; accepté après révision le 20 janvier 2008

Présenté par Jean-Yves Girard

Résumé

Considérons un tournoi $T=(S,A)$. À chaque partie non vide X de S est associé le *sous-tournoi* $T(X)=(X,A\cap(X\times X))$ de T induit par X. Une partie I de S est un *intervalle* de T si pour tous $a,b\in I$ et $x\in S\setminus I$, $(a,x)\in A$ si et seulement si $(b,x)\in A$. Par exemple, $\emptyset$, S et $\{x\}$, où $x\in S$, sont des intervalles de T appelés *triviaux*. Un tournoi est *indécomposable* si tous ses intervalles sont triviaux ; sinon il est *décomposable*. Soit $T=(S,A)$ un tournoi indécomposable. Le tournoi T est *critique* si $T(S\setminus\{x\})$ est décomposable pour tout $x\in S$. Il est *partiellement critique* s'il existe une partie stricte X de S telle que $|X|\geqslant 3$, $T(X)$ est indécomposable et pour tout $x\in S\setminus X$, $T(S\setminus\{x\})$ est décomposable. Les tournois critiques ont été caractérisés par Schmerl et Trotter (1993). Nous caractérisons les tournois partiellement critiques. ***Pour citer cet article : M.Y. Sayar, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abstract

Partially critical tournaments. Given a tournament $T=(V,A)$, with each subset X of V is associated the subtournament $T(X)=(X,A\cap(X\times X))$ of T induced by X. A subset I of V is an interval of T provided that for every $a,b\in I$ and $x\in V\setminus I$, $(a,x)\in A$ if and only if $(b,x)\in A$. For instance, $\emptyset$, V and $\{x\}$, where $x\in S$, are intervals of T called *trivial*. A tournament is indecomposable if all its intervals are trivial; otherwise it is decomposable. Let $T=(V,A)$ be an indecomposable tournament. The tournament T is *critical* if $T(S\setminus\{x\})$ is decomposable for every $x\in S$. It is *partially critical* if there exists a proper subset X of V such that $|X|\geqslant 3$, $T(X)$ is indecomposable and for every $x\in V\setminus X$, $T(V\setminus\{x\})$ is decomposable. The critical tournaments were characterized by Schmerl and Trotter (1993). We characterize the partially critical tournaments. ***To cite this article: M.Y. Sayar, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

1. Introduction

1.1. Généralités

Un *graphe non orienté* $G=(S,A)$ est constitué d'un ensemble fini et non vide S de sommets et d'un ensemble A de paires de sommets distincts, appelées *arêtes*. À chaque partie non vide X de S est associé le *sous-graphe* $G(X)=(X,\{\{x,y\}\in A; x\neq y\in X\})$ de G induit par X. Un graphe non orienté $G=(S,A)$ est *vide* lorsque $A=\emptyset$.

Adresse e-mail : sayar_mohamed@yahoo.fr.

1631-073X/$ – see front matter © 2008 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2008.02.002

Il est *biparti* par une partition P de S lorsque $|P|=2$ et pour tout $M \in P$, $G(M)$ est vide. À chaque graphe non orienté $G=(S,A)$ est associé son *complémentaire* $\bar{G}=(S,\bar{A})$, défini sur S comme suit : pour tous $x \neq y \in S$, $\{x,y\} \in \bar{A}$ si $\{x,y\} \notin A$. Étant donné un graphe non orienté $G=(S,A)$, une partie non vide X de S est une *composante connexe* de G lorsque pour tous $x \in X$ et $y \in S \setminus X$, $\{x,y\} \notin A$ et lorsque pour tous $x \neq y \in X$, il existe une suite $x_0=x,\dots,x_n=y$ d'éléments de X telle que $\{x_i,x_{i+1}\} \in A$ pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Un graphe G est *connexe* lorsqu'il admet une seule composante connexe. Un sommet x d'un graphe G est *isolé* lorsque $\{x\}$ est une composante connexe de G.

Un *graphe* (orienté) $G=(S,A)$ est constitué d'un ensemble fini et non vide S de *sommets* et d'un ensemble A de couples de sommets distincts, appelés *arcs*. À chaque partie non vide X de S est associé le *sous-graphe* $G(X)=(X, A \cap (X \times X))$ de G induit par X. Un graphe $G=(S,A)$ est un *tournoi* lorsque pour tous $x \neq y \in S$, on a : $(x,y) \in A$ si et seulement si $(y,x) \notin A$. Étant donnés $x,y \in S$, $x \to y$ signifie que $(x,y) \in A$ et $(y,x) \notin A$. Soient $x \in S$ et $X, Y \subset S$: $x \to Y$(resp. $Y \to x$) signifie que $x \to y$ (resp. $y \to x$) pour tout $y \in Y$ et $X \to Y$ signifie que $x \to Y$ pour tout $x \in X$. À chaque tournoi $T=(S,A)$ est associé son *dual* $T^\star=(S,A^\star)$ défini par : $(x,y) \in A^\star$ si $(y,x) \in A$ pour $x \neq y \in S$. Un tournoi $T=(S,A)$ est un *ordre total* lorsque pour tous $x,y,z \in S$, on a : si $x \to y$ et $y \to z$, alors $x \to z$. Lorsque $T=(S,A)$ est un ordre total, $x \to y$ signifie que $x<y$ modulo T pour $x,y \in S$. Étant donné $n \geqslant 2$, l'ordre total usuel sur $\{0,\dots,n-1\}$ est noté O_n.

1.2. Graphes indécomposables

Soit $G=(S,A)$ un graphe. Une partie I de S est un *intervalle* de G lorsque pour tous $a,b \in I$ et $x \in S \setminus I$, on a : $(a,x) \in A$ si et seulement si $(b,x) \in A$, et $(x,a) \in A$ si et seulement si $(x,b) \in A$. Par exemple $\emptyset$, S et $\{x\}$, où $x \in S$, sont des intervalles de G appelés intervalles *triviaux*. Le graphe G est *indécomposable* si tous ses intervalles sont triviaux ; sinon, il est *décomposable*.

Proposition 1.1. *(Sumner [4].) Soit $G=(S,A)$ un graphe indécomposable avec $|S| \geqslant 3$. Il existe une partie X de S telle que $|X|=3$ ou 4 et $G(X)$ est indécomposable.*

Soit $G=(S,A)$ un graphe et soit X une partie stricte de S telle que $|X| \geqslant 3$ et $G(X)$ est indécomposable. On considère les parties suivantes de $S \setminus X$: $\mathrm{Ext}(X)$ est l'ensemble des $x \in S \setminus X$ tels que $G(X \cup \{x\})$ est indécomposable ; $[X]$ est l'ensemble des $x \in S \setminus X$ tels que X est un intervalle de $G(X \cup \{x\})$; pour tout $u \in X$, $X(u)$ est l'ensemble des $x \in S \setminus X$ tels que $\{u,x\}$ est un intervalle de $G(X \cup \{x\})$. La famille $\{\mathrm{Ext}(X),[X]\} \cup \{X(u); u \in X\}$ est notée p_X. Dans le cas des tournois, nous affinons la famille p_X de la façon suivante. Étant donné un tournoi $T=(S,A)$, considérons une partie stricte X de S telle que $|X| \geqslant 3$ et $T(X)$ est indécomposable. L'élément $[X]$ de p_X est subdivisé comme suit : X^- est l'ensemble des $x \in [X]$ tels que $x \to X$ et X^+ est l'ensemble des $x \in [X]$ tels que $X \to x$. De même, pour tout $u \in X$, on subdivise $X(u)$ de la façon suivante : $X^-(u)$ est l'ensemble des $x \in X(u)$ tels que $x \to u$ et $X^+(u)$ est l'ensemble des $x \in X(u)$ tels que $u \to x$. On introduit alors la famille $q_X=\{\mathrm{Ext}(X), X^-, X^+\} \cup \{X^-(u), X^+(u)\}_{u \in X}$.

Proposition 1.2. *(Ehrenfeucht et Rozenberg [2].) Soit $G=(S,A)$ un graphe. Considérons une partie stricte X de S telle que $|X| \geqslant 3$ et $G(X)$ est indécomposable. La famille p_X constitue une partition de $S \setminus X$. De plus* :

(i) *étant donnés $x \in [X]$ et $y \in S \setminus (X \cup [X])$, si $G(X \cup \{x,y\})$ est décomposable, alors $X \cup \{y\}$ est un intervalle de $G(X \cup \{x,y\})$* ;
(ii) *étant donnés $x \in X(u)$ et $y \in S \setminus (X \cup X(u))$, où $u \in X$, si $G(X \cup \{x,y\})$ est décomposable, alors $\{x,u\}$ est un intervalle de $G(X \cup \{x,y\})$* ;
(iii) *étant donnés $x \neq y \in \mathrm{Ext}(X)$, si $G(X \cup \{x,y\})$ est décomposable, alors $\{x,y\}$ est un intervalle de $G(X \cup \{x,y\})$.*

Corollaire 1.3. *(Ehrenfeucht et Rozenberg [2].) Soit $G=(S,A)$ un graphe indécomposable. Considérons une partie X de S telle que $|X| \geqslant 3$, $|S \setminus X| \geqslant 2$ et $G(X)$ est indécomposable. Il existe $a \neq b \in S \setminus X$ tels que $G(X \cup \{a,b\})$ est indécomposable.*

Étant donné un graphe $G = (S, A)$, considérons une partie X de S telle que $|X| \geqslant 3$, $|S \setminus X| \geqslant 2$ et $G(X)$ est indécomposable. Le corollaire précédent nous conduit à définir le graphe non orienté $G_X = (S \setminus X, A_X)$ comme suit. Pour tous $x \neq y \in S \setminus X$, $\{x, y\} \in A_X$ si $G(X \cup \{x, y\})$ est indécomposable.

1.3. Graphes critiques et partiellement critiques

Considérons un graphe indécomposable $G = (S, A)$. Un sommet x de G est un sommet *critique* lorsque $G(S \setminus \{x\})$ est décomposable. Étant donnée une partie X de S, G est X-critique si tous les éléments de X sont des sommets critiques de G. Le graphe G est *critique* [3] s'il est S-critique. Disons alors que le graphe G est *partiellement critique* [1] lorsqu'il est $(S \setminus X)$-critique pour une partie stricte X de S telle que $|X| \geqslant 3$ et $G(X)$ est indécomposable.

Les intervalles d'un graphe non orienté sont définis d'une façon analogue. Étant donné un graphe non orienté $G = (S, A)$, une partie X de S est un intervalle de G lorsque pour tous $a, b \in S$ et $x \in S \setminus X$, on a : $\{a, x\} \in A$ si et seulement si $\{b, x\} \in A$. On définit alors de la même façon les graphes non orientés indécomposables, critiques et partiellement critiques. Afin de présenter la caractérisation des graphes non orientés critiques, nous introduisons le graphe non orienté $G_{2n} = (\{0, \ldots, 2n-1\}, A_{2n})$ défini comme suit, où $n \geqslant 2$. Pour tous $x \neq y \in \{0, \ldots, 2n-1\}$, $\{x, y\} \in A_{2n}$ s'il existe $i \leqslant j \in \{0, \ldots, n-1\}$ tels que $\{x, y\} = \{2i, 2j+1\}$.

Théorème 1.4. *(Schmerl et Trotter [3].) Étant donné un graphe non orienté indécomposable $G = (S, A)$, où $|S| \geqslant 4$, G est critique si et seulement si G est isomorphe à G_{2n} ou $\bar{G}_{2n}$.*

Breiner, Deogun et Ille [1] ont caractérisé les graphes non orientés indécomposables et partiellement critiques. Dans cette note, nous caractérisons les tournois indécomposables et partiellement critiques. Étant donné un tournoi indécomposable $T = (S, A)$, considérons une partie stricte X de S telle que $|X| \geqslant 3$ et $T(X)$ est indécomposable. Si T est $(S \setminus X)$-critique, alors on obtient les résultats préliminaires suivants.

Proposition 1.5. *Pour toute partie stricte Y de S telle que $X \subseteq Y$, si $T(Y)$ est indécomposable, alors $|S \setminus Y|$ est pair. En particulier, $|S \setminus X|$ est pair et* $\mathrm{Ext}(X) = \emptyset$. *De plus, pour tout $M \in q_X$, $T(M)$ est un ordre total. Enfin, si $X^- \neq \emptyset$ et $X^+ \neq \emptyset$, alors $X^- \to X^+$. De même, pour tout $u \in X$, si $X^-(u) \neq \emptyset$ et $X^+(u) \neq \emptyset$, alors $X^-(u) \to X^+(u)$.*

Proposition 1.6. *Le graphe non orienté T_X n'admet pas de sommets isolés et pour toute composante connexe C de T_X, il existe des éléments distincts M_C et N_C de q_X tels que $T_X(C)$ est biparti par $\{M_C, N_C\}$.*

2. Caractérisation des tournois partiellement critiques

Tout d'abord, nous étudions les tournois partiellement critiques $T = (S, A)$ en utilisant les composantes connexes du graphe non orienté T_X associé à la partie X de S telle que T est $(S \setminus X)$-critique. Nous étudions ensuite le cas où T_X est connexe.

Théorème 2.1. *Étant donné un tournoi $T = (S, A)$, considérons une partie stricte X de S telle que $|X| \geqslant 3$ et $T(X)$ est indécomposable. Le tournoi T est indécomposable et $(S \setminus X)$-critique si et seulement si les assertions suivantes sont satisfaites.*

(i) *Si $X^- \neq \emptyset$ et $X^+ \neq \emptyset$, alors $X^- \to X^+$. De même, pour tout $u \in X$, si $X^-(u) \neq \emptyset$ et $X^+(u) \neq \emptyset$, alors $X^-(u) \to X^+(u)$.*
(ii) *Pour toute composante connexe C de T_X, il existe des éléments distincts M_C et N_C de q_X tels que $T_X(C)$ est biparti par $\{M_C, N_C\}$.*
(iii) *Pour toute composante connexe C de T_X, $T(X \cup C)$ est indécomposable et C-critique.*

Théorème 2.2. *Soit $T = (S, A)$ un tournoi. Considérons une partie stricte X de S telle que $|X| \geqslant 3$, $|S \setminus X| \geqslant 3$ et $T(X)$ est indécomposable. Supposons en outre que T_X est connexe. Le tournoi T est indécomposable et $(S \setminus X)$-critique si et seulement si* $\mathrm{Ext}(X) = \emptyset$ *et il existe un isomorphisme f de G_{2n} sur T_X tel que $p_X = q_X = \{Y, Z\}$, où $Y = f(\{0, \ldots, 2n-2\})$ et $Z = f(\{1, \ldots, 2n-1\})$. De plus, la fonction $i \mapsto f(2i)$ est un isomorphisme de O_n*

sur $T(Y)$ (*resp.* $T(Y)^\star$) *lorsque* $Y = X^+$ *ou* $X^-(u)$ (*resp.* $Y = X^-$ *ou* $X^+(u)$), *où* $u \in X$. *Par contre, la fonction* $i \mapsto f(2i+1)$ *est un isomorphisme de* O_n *sur* $T(Z)$ (*resp.* $T(Z)^\star$) *lorsque* $Z = X^-$ *ou* $X^+(u)$ (*resp.* $Z = X^+$ *ou* $X^-(u)$), *où* $u \in X$.

Remarque 1. Pour tout tournoi U, on peut construire un tournoi $T = (S, A)$ indécomposable et $(S \setminus X)$-critique, où X est une partie stricte de S avec $|X| \geqslant 3$ et $T(X)$ est indécomposable, tel que $T(S \setminus X)$ contient U.

Références

[1] A. Breiner, J. Deogun, P. Ille, Partially critical indecomposable graphs, 2006, soumis à Contributions to Discrete Mathematics.
[2] A. Ehrenfeucht, G. Rozenberg, Primitivity is hereditary for 2-structures, Theoret. Comput. Sci. 3 (70) (1990) 343–358.
[3] J.H. Schmerl, W.T. Trotter, Critically indecomposable partially ordered sets, graphs, tournaments and other binary relational structures, Discrete Math. 113 (1993) 191–205.
[4] D.P. Sumner, Graphs indecomposable with respect to the X-join, Discrete Math. 6 (1973) 281–298.