Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 261–265
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse mathématique/Probabilités

Une généralisation de l'intégrale stochastique de Wick–Itô

Daniel Alpay [a,1], Haim Attia [a,b], David Levanony [c]

[a] *Department of Mathematics, Ben-Gurion University of the Negev, Beer-Sheva 84105, Israel*
[b] *Department of Mathematics, Shamoon College of Engineering, Beer-Sheva, Israel*
[c] *Department of Electrical Engineering, Ben-Gurion University of the Negev, Beer-Sheva 84105, Israel*

Reçu le 20 septembre 2007 ; accepté le 29 janvier 2008

Présenté par Jean-Pierre Kahane

Résumé

La fonction de covariance du mouvement brownien fractionnaire appartient à une famille de covariances introduite par Schoenberg dans les années 1930. Nous définissons une intégrale stochastique pour les processus gaussiens associés à une sous famille de ces covariances. ***Pour citer cet article : D. Alpay et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abstract

A generalization of the Wick–Itô stochastic integral. The covariance of the fractional Brownian motion belongs to a family of positive functions introduced by Schoenberg in the 1930s. We show that one can define a stochastic integral for a large sub-family of the corresponding Gaussian second order stochastic processes. ***To cite this article: D. Alpay et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abridged English version

In 1934, Paul Lévy introduced in his study of infinitely divisible probability laws and Gaussian processes with stationary and independent increments, functions of the form

$$r(t) = r_0 + \mathrm{i}\gamma t - \int_{\mathbb{R}} \left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}tu} - 1 - \frac{\mathrm{i}tu}{u^2+1} \right\} \frac{\mathrm{d}\sigma(u)}{u^2} \tag{1}$$

where $r_0 = r(0)$ and γ are real numbers and where σ is a positive measure on $\mathbb{R}$ such that $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\sigma(u)/(u^2+1) < \infty$; see [12]. For such a function, we note the formula

$$K_r(t,s) \stackrel{\text{def.}}{=} r(t) + r(s)^* - r(t-s) - r(0) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tu}-1}{u} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}su}-1}{u} \, \mathrm{d}\sigma(u),$$

Adresses e-mail : dany@math.bgu.ac.il (D. Alpay), atyah@math.bgu.ac.il (H. Attia), levanony@ee.bgu.ac.il (D. Levanony).
[1] Earl Katz Family chair in algebraic system theory.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2008.01.023

which expresses that $K_r(t,s)$ is a positive kernel on the real line, and allows one, when t,s are restricted to a symmetric finite interval, to express the associated reproducing kernel Hilbert space in terms of de Branges spaces of entire functions; see [5] for these spaces. Conversely, a function r such that K_r is positive has the form (1); for the real case, see the paper of von Neumann and Schoenberg [15, Theorem 1, p. 229]. Positive kernels of the form $K_r(t,s)$ have a long history; they seem to first appear in Schoenberg's 1935 paper [15]. When restricted to a finite symmetric interval they play an important role in Krein's work, see [11], and [10]. They also appear in the work of Beurling and Deny on Dirichlet spaces, see [3]. The kernels $K_r(t,s)$ may assume the role of covariance functions of stochastic Gaussian processes. The purpose of this note is to define a stochastic integral associated with these processes, when the function r is real and when σ is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure, with some appropriate hypothesis on σ'. The case $r(t)=(V_H/2)|t|^{2H}$ where $V_H=(\Gamma(2-2H)\cos(\pi H))/\pi(1-2H)H)$ is of paramount importance, and corresponds to $\sigma'(u)=|u|^{1-2H}/2\pi$. The corresponding de Branges spaces are then called the homogeneous de Branges spaces, whose reproducing kernel is expressed in terms of the Bessel functions; see [5, p. 180]. When $H\neq 1/2$, the associated process is the fractional Brownian motion, first introduced by Kolmogorov. It is the classical Brownian motion when $H=1/2$. The authors of [8] and [4] use the white noise probability space and Hida distributions to define a stochastic integral with respect to the fractional Brownian motion. We follow these arguments, and show that they still hold for the covariances K_r for a large family of absolutely continuous σ. The novelty in this Note is therefore not the method itself, but the fact that the given method applies to a wide range of stochastic processes, whose covariance functions play a key role in analysis and extension problems.

For other approaches to stochastic analysis of the fractional Brownian motion, we refer to [6]. We refer to [1] for stochastic analysis of another wide class of Gaussian stochastic processes, which contains the fractional Brownian motion as a special case.

1. L'espace de probabilité du bruit blanc et le produit de Wick

Soit $\mathcal{S}$ l'espace des fonctions à décroissance rapide, et soit $\mathcal{S}'$ son dual. Notons $\mathcal{F}$ la tribu des boréliens de $\mathcal{S}'$. La fonction $K(s_1-s_2)=\exp(-\|s_1-s_2\|^2_{\mathbf{L}_2(\mathbb{R})}/2)$ est positive pour $s_1,s_2\in\mathcal{S}$, et $\mathcal{S}$ est nucléaire ; utilisant [9, Théorème 2, p. 342] nous voyons qu'il existe une mesure de probabilité P sur $(\mathcal{S}',\mathcal{F})$ telle que pour tout $s\in\mathcal{S}$,

$$E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}Q_s})=\mathrm{e}^{-\frac{\|s\|^2_{\mathbf{L}_2(\mathbb{R})}}{2}},$$

où Q_s dénote la forme $Q_s(s')=\langle s,s'\rangle_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}$. Rappelons (voir [8, (2.3) p. 303]) que cette équation implique

$$E(Q_s)=0 \quad \text{et} \quad E(Q_s^2)=\|s\|^2_{\mathbf{L}_2(\mathbb{R})}. \tag{2}$$

On appelle $\mathbf{L}_2(\mathcal{S}',\mathcal{F},P)$ l'espace de probabilité du bruit blanc. On peut écrire chaque élément $F\in\mathbf{L}_2(\mathcal{S}',\mathcal{F},P)$ comme $F=\sum_{\alpha\in\ell}c_\alpha H_\alpha$, où les H_α forment une base orthogonale indexée par l'espace ℓ des suites finies de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, et les coefficients c_α sont tels que $\sum_{\alpha\in\ell}c_\alpha^2\alpha!<\infty$. Nous ne rappelons pas la définition des H_α ici, mais notons qu'on les exprime en termes des fonctions de Hermite $\widetilde{h_n}$; voir [8, p. 305] pour la définition de ces dernières. Les H_α sont munis du produit de Wick

$$H_\alpha\lozenge H_\beta=H_{\alpha+\beta},$$

qui n'est pas sans rappeler le produit de Cauchy–Kovalesvkaya utilisé pour définir des fonctions hyperholomorphes rationnelles ; voir [2].

Rappelons que l'utilisation du produit de Wick pour définir une intégrale stochastique a pour origine le travail [7].

2. L'opérateur T_m

Soit m une fonction positive et mesurable, telle que

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{m(u)\,\mathrm{d}u}{u^2+1}<\infty. \tag{3}$$

Nous dénoterons la transformée de Fourier par $\hat{f}(y)=\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy}f(x)\,\mathrm{d}x$. L'opérateur T_m donné par la formule

$$\widehat{T_m f}=\sqrt{m}\,\hat{f} \tag{4}$$

est bien défini pour $f \in \mathcal{S}$, comme on le voit en utilisant (3) et le fait que la transformée de Fourier laisse invariant l'espace $\mathcal{S}$. De plus, T_m peut être étendu à un opérateur auto-adjoint, en général non continu, de domaine les fonctions mesurables f telles que

$$\int_{\mathbb{R}} m(u)|\hat{f}|^2(u)\,\mathrm{d}u < \infty.$$

Cet espace est en général différent de $\mathbf{L}_2(\mathbb{R})$; voir [13, Theorem 3.1, p. 258] pour le cas du mouvement brownien fractionnaire. Toujours pour $m(u) = |u|^{1-2H}/2\pi$, l'opérateur T_m coïncide avec l'opérateur M introduit dans [8] et [4].

3. Le processus gaussien associé

Nous supposerons dans la suite de cette Note que la fonction $r(t)$ est réelle et considérons seulement $t \geqslant 0$. Nous avons alors

$$r(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1-\cos(tu)}{u^2} m(u)\,\mathrm{d}u.$$

Cela sera le cas en particulier lorsque $m(u)$ est paire. La fonction $1_{[0,t]}(x)$ appartient au domaine de l'opérateur étendu T_m. Soit (s_n) une suite d'éléments de $\mathcal{S}$ telle que $\lim_{n\to\infty} \|T_m(1_{[0,t]}) - s_n\|_{\mathbf{L}_2(\mathbb{R})} = 0$. Nous déduisons de (2) que (Q_{s_n}) est une suite de Cauchy dans $\mathbf{L}_2(\mathcal{S}', \mathcal{F}, P)$. Nous dénotons par $\widetilde{B_m}(t)$ sa limite. Utilisant la continuité des produits scalaires, et en polarisant la seconde formule de (2) nous obtenons :

$$E\big\{\widetilde{B_m(t)}\widetilde{B_m(s)}\big\} = \int_{\mathbb{R}} \big(T_m(1_{[0,t]})\big)\big(T_m(1_{[0,s]})\big)\,\mathrm{d}x = K_r(t,s),$$

et donc

$$E\big(\widetilde{B_m}(t) - \widetilde{B_m}(s)\big)^2 = 2r(t-s).$$

Supposons que la fonction m satisfasse les majorations :

$$m(u) \leqslant K|u|^{-b}, \quad |u| \leqslant 1 \quad \text{et} \quad m(u) \leqslant K', \quad |u| \geqslant 1, \tag{5}$$

avec $b < 1$ et $K, K' < \infty$. Notons que ces majorations sont satisfaites par le mouvement brownien fractionnaire. On montre alors que

$$r(t) \leqslant C_1|t|^2 + C_2|t|,$$

et un corollaire du lemme de Kolmogorov (voir par exemple [14, Corollary 25.6, p. 61]) implique que le processus $\widetilde{B_m}(t)$ a une version continue, que nous noterons $B_m(t)$.

4. L'intégrale stochastique pour des fonctions déterministes

Soit f dans le domaine de T_m. La définition [4, (3.15) p. 355] devient maintenant

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}B_m(t) \overset{\text{déf.}}{=} \int_{\mathbb{R}} (T_m f)(t)\,\mathrm{d}B(t)$$

où $B(t)$ est le processus de Wiener, qui correspond à $m(u) \equiv 1/2\pi$. L'intégrale stochastique est un élément de $\mathbf{L}_2(\mathcal{S}', \mathcal{F}, P)$, et nous avons

$$\left\|\int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}B_m(t)\right\|^2_{\mathbf{L}_2(\mathcal{S}',\mathcal{F},P)} = \int_{\mathbb{R}} m(u)|\hat{f}|^2(u)\,\mathrm{d}u.$$

5. Décomposition du processus $B_m(t)$

Utilisant l'égalité dans $\mathbf{L}_2(\mathbb{R})$

$$T_m(1_{[0,t]}) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle T_m(1_{[0,t]}), \widetilde{h_k} \rangle_{\mathbf{L}_2(\mathbb{R})} \widetilde{h_k},$$

nous obtenons la décomposition dans $\mathbf{L}_2(\mathcal{S}', \mathcal{F}, P)$

$$B_m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^t T_m \widetilde{h_k}(s)\, \mathrm{d}s \right) H_{e^{(k)}},$$

où $e^{(k)}$ dénote la suite dont toutes les composantes sont nulles, à l'exception de la k-ième, qui est égale à 1. Nous avons utilisé le fait que

$$H_{e^{(k)}}(s') = \langle \widetilde{h_k}, s' \rangle_{\mathcal{S},\mathcal{S}'}.$$

Voir [8, (3.3) p. 306]. Lorsque $m(u) = |u|^{1-2H}/2\pi$ (c'est-à-dire dans le cas du mouvement brownien fractionnaire), les auteurs de [8] montrent (voir [8, p. 309–310]) que pour tout t la formule

$$W_m(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (T_m \widetilde{h_k})(t) H_{e^{(k)}}$$

définit un élément de l'espace des distributions de Hida. Pour cela, ils utilisent des majorations classiques des fonctions de Hermite (voir [8, p. 309]) et le fait que les fonctions de Hermite sont des valeurs propres de la transformée de Fourier et obtiennent une majoration de la forme

$$\left| (T_m \widetilde{h_n})(t) \right| \leqslant K n^u, \tag{6}$$

où $u \in \mathbb{R}_+$ est un exposant qui ne dépend pas de n ; voir [8, p. 310]. La remarque suivante est simple, mais nous permet d'étendre les résultats de [8] et [4] au cas de certaines covariances de la forme K_r.

Lemme 1. *On a une majoration de la forme* (6) *lorsque la fonction m satisfait une majoration de la forme* (5)*, avec $u = 1 - 1/12$.*

6. Intégrale stochastique

Lorsque m est tel que $W_m(t)$ appartient à l'espace de Hida des distributions stochastiques, nous pouvons définir l'intégrale stochastique pour des fonctions Y à valeurs dans l'espace des distributions de Hida comme dans [8] et [4, (3.23) p. 357] par la formule :

$$\int_{\mathbb{R}} Y(t)\, \mathrm{d}B_m(t) = \int_{\mathbb{R}} Y(t) \lozenge W_m(t)\, \mathrm{d}t,$$

où on suppose que la fonction $Y(t) \lozenge W_m(t)$, qui est à valeurs dans l'espace des distributions de Hida, est intégrable.

Nous avons en particulier :

$$\int_0^t B_m(u)\, \mathrm{d}B_m(u) = \frac{B_m^2(t) - r(t)}{2}, \quad t \geqslant 0,$$

mais, contrairement à [1], nous n'avons pas de formule de Itô générale à ce stade.

7. Conclusions

L'idée directrice de cette note est que l'on peut étendre les résultats de [8] et [4] au cas des covariances K_r lorsque l'on considère l'opérateur T_m. Même dans le cas où la fonction $m(u)$ satisfait une majoration de la forme $0 < m_1 \leqslant m(u) \leqslant m_2 < \infty$, nous avons le début d'un calcul stochastique pour une classe de processus qui n'a pas été considérée jusqu'à présent. L'étape suivante dans notre programme est de développer le calcul de Malliavin dans le cadre des processus B_m.

Références

[1] E. Alos, O. Mazet, D. Nualart, Stochastic calculus with respect to gaussian processes, Ann. Probab. 29 (2) (2001) 766–801.
[2] D. Alpay, B. Schneider, M. Shapiro, D. Volok, Fonctions rationnelles et théorie de la réalisation : le cas hyper-analytique, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 336 (2003) 975–980.
[3] A. Beurling, J. Deny, Dirichlet spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 45 (1959) 208–215.
[4] F. Biagini, B. Øksendal, A. Sulem, N. Wallner, An introduction to white-noise theory and Malliavin calculus for fractional Brownian motion, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 460 (2041) (2004) 347–372.
[5] L. de Branges, Espaces hilbertiens de fonctions entières, Masson, Paris, 1972.
[6] L. Decreusefond, A.S. Üstünel, Stochastic analysis of the fractional Brownian motion, Potential Anal. 18 (1999) 177–214.
[7] T. Duncan, Y. Hu, B. Pasik-Duncan, Stochastic calculus for fractional Brownian motion. I. Theory, SIAM J. Control Optim. 38 (2) (2000) 582–612, (electronic).
[8] R.J. Elliott, J. van der Hoek, A general fractional white noise theory and applications to finance, Math. Finance 13 (2) (2003) 301–330.
[9] I.M. Guelfand, N.Y. Vilenkin, Les distributions. Tome 4 : Applications de l'analyse harmonique, Collection Universitaire de Mathématiques, vol. 23, Dunod, Paris, 1967.
[10] M.G. Krein, On the logarithm of an infinitely decomposible Hermite-positive function, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.) 45 (1944) 91–94.
[11] M.G. Krein, On the problem of continuation of helical arcs in Hilbert space, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.) 45 (1944) 139–142.
[12] P. Lévy, Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (2) 3 (3–4) (1934) 337–366.
[13] V. Pipiras, M.S. Taqqu, Integration questions related to fractional Brownian motion, Probab. Theory Related Fields 118 (2) (2000) 251–291.
[14] L.C.G. Rogers, D. Williams, Diffusions, Markov Processes, and Martingales. Vol. 1, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 2000, Foundations, Reprint of the second 1994 edition.
[15] I.J. Schoenberg, Remarks to Maurice Fréchet's article "Sur la définition axiomatique d'une classe d'espace distanciés vectoriellement applicable sur l'espace de Hilbert", Ann. of Math. (2) 36 (3) (1935) 724–732, MR1503246.