Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 347–350

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Statistique

Estimation du paramètre des moyennes mobiles hilbertiennes

Céline Turbillon [a,b,c], Denis Bosq [a], Jean-Marie Marion [b], Besnik Pumo [c]

[a] *LSTA, Université de Paris VI, 175, rue du Chevaleret, 75013 Paris, France*
[b] *IMA, UCO, 44, rue Rabelais, 49000 Angers, France*
[c] *UMR LAREMA / INH, 2, rue le Nôtre, 49000 Angers, France*

Reçu le 20 juin 2007 ; accepté après révision le 14 janvier 2008

Disponible sur Internet le 31 janvier 2008

Présenté par Paul Deheuvels

Résumé

Une moyenne mobile d'ordre un dans un espace de Hilbert H séparable de dimension infinie, notée $MAH(1)$, est un processus $(X_t, t \in Z)$ à valeurs dans H admettant la représentation $X_t = \epsilon_t + l(\epsilon_{t-1})$ où l est un opérateur compact dans H et (ϵ_t) un H-bruit blanc fort. Nous présentons dans cette Note deux méthodes d'estimation de l basées sur l'équation des moments du processus. ***Pour citer cet article : C. Turbillon et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abstract

Moving averages in Hilbert spaces. The moving average processes in a separable infinite-dimensional Hilbert space H, denoted by $MAH(1)$, is a H valued process $(X_t, t \in Z)$ satisfying the equation $X_t = \epsilon_t + l(\epsilon_{t-1})$ where l is a compact operator in H and (ϵ_t) a H valued strong white noise. In this Note we propose two estimators for l based on the moment equation of the process. ***To cite this article: C. Turbillon et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

1. Introduction

Différents auteurs ont utilisé les processus linéaires hilbertiens pour les séries temporelles à temps continu afin de faire de la prévision (Bosq [5], Merlevède [7] entre autres). Nous étudions ici les processus $MAH(1)$, $(X_t, t \in Z)$ à valeurs dans un espace de Hilbert séparable admettant la représentation

$$X_t = \epsilon_t + l(\epsilon_{t-1}) \tag{1}$$

où $l \in \mathcal{C}_H$, l'espace des opérateurs linéaires compacts de H dans H, est un opérateur linéaire de norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}} < 1$ et (ϵ_t) est un H-bruit blanc fort, c'est-à-dire $(\epsilon_t, t \in Z)$ sont des variables aléatoires centrées i.i.d. non dégénérées à valeurs dans H. Un $MAH(1)$ est strictement stationnaire et inversible. La condition $\|l\|_{\mathcal{L}} < 1$ peut être remplacée par la condition moins restrictive

H1 : $\exists j_0 \geqslant 1$ tel que $\|l^{j_0}\| < 1$.

Adresse e-mail : cturbillon@yahoo.fr (C. Turbillon).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2008.01.008

L'existence de ce processus est conséquence directe des résultats généraux sur les processus linéaires Hilbertiens (voir par exemple Bosq [4] ou Merlevède [6]). Pour $x, y \in H$ on pose $x \otimes y = \langle x, \cdot\rangle y$, $C = E(X_0 \otimes X_0)$, $D = E(X_0 \otimes X_1)$, $D^* = E(X_1 \otimes X_0)$, tous des opérateurs de $\mathcal{C}_H$. De façon analogue au cas des processus moyenne mobile réelles inversibles $\xi = (\xi_i, i \in Z)$ de paramètre scalaire θ nous supposerons que

$$\mathbf{H2}: \|DC^{-1}\| < \frac{1}{2}, \ \|D^*C^{-1}\| < \frac{1}{2}.$$

En effet l'équation des moments $\theta^2 E(\xi_0\xi_1) - \theta E(\xi_0^2) + E(\xi_1\xi_0) = 0$ associée au processus ξ admet une solution unique de module inférieur à un si et seulement si $|E(\xi_0\xi_1)|/E(\xi_0^2) < 1/2$.

De l'équation (1) on déduit $C = C_\epsilon + lC_\epsilon l^*$, $D = lC_\epsilon$ où $C_\epsilon = E(\epsilon_0 \otimes \epsilon_0)$. On en déduit l'équation de second degré dont les termes sont des opérateurs

$$l^2 D^* - lC + D = 0 \tag{2}$$

qui servira de base pour l'estimation de l.

On considère les observations $X_1, \ldots, X_n$ et on définit les opérateurs de covariance empirique en posant

$$C_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \otimes X_i, \qquad D_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} X_i \otimes X_{i+1}, \qquad D_n^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} X_{i+1} \otimes X_i.$$

Sous l'hypothèse

$$\mathbf{H3}: E\big(\|X_0\|^4\big) < \infty$$

on obtient facilement les résultats suivants $E\|C_n - C\|_{\mathcal{L}}^2 = \mathrm{O}(\frac{1}{n})$, $E\|D_n - D\|_{\mathcal{L}}^2 = E\|D_n^* - D^*\|_{\mathcal{L}}^2 = \mathrm{O}(\frac{1}{n})$.

En effet sous **H3** Bosq ([4] Théorème 7.4) obtient $E(\|\bar{X}\|^2) = \mathrm{O}(\frac{1}{n})$ pour les processus linéaires hilbertiens inversibles. Le premier résultat est alors conséquence du Corollaire 4.1 de [5] puisque $(X_i \otimes X_i - C)$ est un $MA\mathcal{S}(1)$ où $\mathcal{S}$ est l'espace des opérateurs de Hilbert–Schmidt. On peut obtenir les deux autres résultats en appliquant la Proposition 4.1 de [5] puisque $(X_i \otimes X_{i+1} - D)$ admet une représentation $MA\mathcal{S}(2)$.

Nous présentons dans cette Note deux méthodes d'estimation de l basées sur l'équation des moments (2). Contrairement au processus $ARH(1)$ cette dernière est une équation opératorielle de second degré et à notre connaissance la solution est un problème complexe en général. Dans la section 2 nous présentons une méthode basée sur la projection des observations dans un sous-espace de dimension finie. Pour des raisons techniques nous supposerons que l et C_ϵ commutent. Dans la section 3 nous présentons une méthode itérative pour l'estimation de l inspirée d'une idée de Riesz–Nagy [10]. Nous montrons des résultats de convergence en probabilité pour les deux types d'estimateur.

2. Estimation par projection de *l*

Dans ce paragraphe nous nous plaçons dans le cas où les vecteurs propres $(v_j, j \geqslant 1)$ de C sont connus. Soient $(c_j, j \geqslant 1)$ les valeurs propres associées dans un ordre décroissant. Afin de transformer le problème de l'estimation de l en un problème d'estimation de coefficients réels de la décomposition de l dans la base des vecteurs propres v_j on fera l'hypothèse simplificatrice

H4 : l et C_ϵ commutent.

Sous cette hypothèse **H2** implique **H1**, conséquence du résultat suivant :

Lemme 2.1. *Sous* **H4** *les opérateurs l et D sont symétriques. De plus les vecteurs propres de D, C_ϵ et l sont les mêmes que ceux de C.*

Soient λ_j et d_j les valeurs propres de l et D associées à v_j. D étant symétrique l'équation (2) s'écrit $l^2 D - lC + D = 0$. On obtient pour chaque $j \geqslant 1$ une équation de second degré à coefficients réels

$$\lambda_j^2 d_j - \lambda_j c_j + d_j = 0. \tag{3}$$

Pour j fixé la solution unique de (3) satisfaisant **H2** est $\lambda_j = \frac{c_j - \mathrm{sign}(d_j)\sqrt{\Delta}}{2d_j}$ où $\Delta = c_j^2 - 4d_j^2 > 0$ et $\mathrm{sign}(a) = 1$ si $a \geqslant 0$, $\mathrm{sign}(a) = -1$ si $a < 0$.

L'estimateur par projection est défini à partir de la décomposition $l = \sum_{j \geqslant 1} \lambda_j v_j \otimes v_j$ de l. Un estimateur de l sur les k_n premiers vecteurs propres de C est $\sum_{j \leqslant k_n} \hat{\lambda}_{j,n} v_j \otimes v_j$. Pour $j \leqslant k_n$, $\hat{\lambda}_{j,n}$ est un estimateur de λ_j obtenu à partir de l'équation (3) où $\hat{c}_{j,n}$ et $\hat{d}_{j,n}$ sont les estimateurs de c_j et d_j vérifiant $|\hat{d}_{j,n}|/\hat{c}_{j,n} < 1/2$ que nous définissons maintenant. Puisque $c_j = E(\langle X_0, v_j \rangle^2)$ et $d_j = E(\langle X_0, v_j \rangle \langle X_1, v_j \rangle)$ des estimateurs naturels de c_j et d_j pour $j \geqslant 1$ sont

$$c_{j,n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \langle X_i, v_j \rangle^2 \quad \text{et} \quad d_{j,n} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle X_i, v_j \rangle \langle X_{i+1}, v_j \rangle.$$

Finalement soient $\hat{d}_{j,n} = \operatorname{sign}(d_{j,n}) \max(\alpha_n, |d_{j,n}|)$, $\hat{c}_{j,n} = \max(c_{j,n}, 2|\hat{d}_{j,n}|)$ où $0 < \alpha_n < 1$ est une suite de réels que nous allons préciser dans l'énoncé du Théorème 2.2. L'estimateur « par projection » est :

$$\hat{l}_{k,n} = \sum_{j=1}^{k_n} \hat{\lambda}_{j,n} v_j \otimes v_j. \tag{4}$$

Ce type d'estimateur a été proposé d'abord par Bosq [3] puis par Antoniadis [1], Besse et Cardot [2] et Pumo [9] entre autres pour les processus $ARH(1)$. Son existence est assurée sous

H5 : $P\big(\langle X_0, v_j \rangle = 0\big) = 0$.

Théorème 2.2. *Sous les hypothèses* **H2** *à* **H5** *et si* $\alpha_n < |d_{k_n,n}|/2$:

$$E\|\hat{l}_{k_n,n} - l\|_{\mathcal{S}}^2 \leqslant \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k_n} \frac{2}{d_j^2} + \sum_{j > k_n} \frac{d_j^2}{c_j^2}.$$

En particulier si pour tout $j \geqslant 1$, $c_j = r^j$, $d_j = r'^j$ *avec* $0 < r' < r < 1$, $b = 2\log r - 4 \log r'$ *et* $k_n = b \log n$ *on a* $E\|\hat{l}_{k_n,n} - l\|_{\mathcal{S}}^2 = \mathrm{O}(n^{-1/2})$.

3. Une méthode itérative pour l'estimation de *l*

Cette méthode a été proposée par plusieurs auteurs pour estimer le paramètre inconnu d'une moyenne mobile à valeurs dans R^p (voir par exemple Monti [8]).

L'estimateur que nous proposons dans cette section est basé sur une idée de Riesz et Nagy [10] pour la résolution de l'équation opératorielle $A^2 - 2A + R = 0$ avec $A, R \in \mathcal{C}_H$, A inconnu et R symétrique positif de norme inférieure à un. Il est défini à partir des estimateurs $\hat{\rho}_{n,k_n} = \hat{\pi}_{k_n} D_n C_n^{-1} \hat{\pi}_{k_n}$ et $\hat{\rho}'_{n,k_n} = \hat{\pi}_{k_n} D_n^* C_n^{-1} \hat{\pi}_{k_n}$ respectivement de $\rho = DC^{-1}$ et $\rho' = D^* C^{-1}$ définis sur

$$C(H) = \left\{ h \in H\colon \sum_{j=1,\infty} \frac{\langle h, v_j \rangle^2}{c_j^2} < \infty \right\}$$

où $\hat{\pi}_{k_n}$ est l'opérateur de projection orthogonale sur les k_n premiers vecteurs propres de C_n. Leur existence est assurée sous l'hypothèse :

H5′ : $c_{k_n,n} > 0$.

Dans le cadre des processus $ARH(1)$ Bosq ([4], §8.3) a démontré la convergence presque sûre de $\hat{\rho}_{n,k_n}$ vers ρ sous la condition supplémentaire

$(*)$ Il existe $\beta > 1$ tel que $c_{k_n}^{-1} \sum_{j=1}^{k_n} b_j = \mathrm{O}\big(n^{1/4} (\log n)^{-\beta}\big)$

où $b_1 = 2\sqrt{2}(c_1 - c_2)^{-1}$, $b_j = 2\sqrt{2} \max[(c_{j-1} - c_j)^{-1}, (c_j - c_{j+1})^{-1}]$ pour $j \geqslant 2$.

Contrairement à le section précédente l'estimateur « récursif » est défini à partir des vecteurs propres de C_n. De plus l'hypothèse technique **H4** n'est pas utile pour établir le résultat de convergence. Rappelons que l'équation des moments d'un $MAH(1)$ s'écrit $l^2 D^* - lC + D = 0$.

Il est facile de montrer que $l = \lim_{r\to\infty} l_r$ où l_r est défini par récurrence :

$$\begin{cases} l_0 = 0, \\ l_{r+1} = l_r^2 D^* C^{-1} + DC^{-1} \quad \text{pour } r \geqslant 0. \end{cases} \tag{5}$$

C'est à partir de ces équations que nous allons définir l'estimateur « récursif » $\tilde{l}_{n,k_n}$ de l. Pour n, k_n donnés soit $(\tilde{l}_{r,n,k_n}, r \geqslant 0)$ la suite définie par récurrence :

$$\begin{cases} \tilde{l}_{0,n,k_n} = 0, \\ \tilde{l}_{r+1,n,k_n} = \tilde{l}^2_{r,n,k_n} \hat{\rho}'_{n,k_n} + \hat{\rho}_{n,k_n} \quad \text{pour } r \geqslant 0. \end{cases} \tag{6}$$

L'estimateur « récursif » $\tilde{l}_{n,k_n}$ pour n, k_n donnés est $\tilde{l}_{n,k_n} = \lim_{r\to\infty} \tilde{l}_{r+1,n,k_n}$.

Théorème 3.1. *Si ρ est de Hilbert–Schmidt, $\|l\| < 1$ et sous les hypothèses* **H2**, **H3**, **H5′** *et* $(*)$ *alors* $\tilde{l}_{n,k_n} \xrightarrow{\text{p.s.}} l$ *quand* $n, k_n \to \infty$. *En particulier la condition* $(*)$ *est satisfaite quand* $c_j \sim q^j$ $(0 < q < 1)$ *et* $k_n = \mathrm{o}(\log n)$.

Références

[1] A. Antoniadis, T. Sapatinas, Wavelet methods for continuous-time prediction using representations of autoregressive processes in Hilbert spaces, J. Multivariate Anal. 87 (2003) 133–158.

[2] P. Besse, H. Cardot, Approximation spline de la prévision d'un processus fonctionnel autorégressif d'ordre 1, Canadian J. Statist. 24 (1996) 467–487.

[3] D. Bosq, Modelization, non-parametric estimation and prediction for continuous time processes, in: G. Roussas (Ed.), NATO ASI Ser., 1991, pp. 509–529.

[4] D. Bosq, Linear Processes in Function Spaces, Springer-Verlag, New York, 2000.

[5] D. Bosq, General linear processes in Hilbert spaces and prediction, J. Statist. Plann. Inference 48 (3) (2007) 17–28.

[6] F. Merlevède, Central limit theorem for linear processes with values in a Hilbert space, Stochastic Process. Appl. 65 (1) (1996) 103–114.

[7] F. Merlevède, Résultats de convergence presque sûre pour l'estimation et la prévision des processus linéaires hilbertiens, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I. Math. 324 (1997) 573–576.

[8] A.C. Monti, A proposal for estimation of the parameters of multivariate moving-average models, J. Time Ser. Anal. 19 (2) (1998) 209–219.

[9] B. Pumo, Prediction of continuous time processes by $C[0,1]$-valued autoregressive process, Stat. Inference Stoch. Process. 3 (1) (1998) 297–309.

[10] F. Riesz, B. Sz-Nagy, Leçons d'analyse fonctionnelle, 3e édition, Gauthier-Villars, Paris, 1955.