Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 129–133

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Algèbre

Classes d'homotopie de fractions rationnelles ☆

Christophe Cazanave

Laboratoire d'analyse, géométrie et applications UMR 7539, institut Galilée, université Paris 13, 99, avenue J.B. Clément, 93430 Villetaneuse, France

Reçu le 12 juillet 2007 ; accepté après révision le 15 janvier 2008

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

Soient k un corps de caractéristique différente de 2 et $n \geqslant 1$ un entier ; on munit l'ensemble des classes d'homotopie « algébrique » de fractions rationnelles pointées de degré n à coefficients dans k d'une structure de monoïde gradué par n et l'on construit un isomorphisme entre ce monoïde et celui des orbites sous l'action de $\mathbf{SL}_n(k)$ de formes bilinéaires symétriques non dégénérées sur k^n, muni de la somme orthogonale. ***Pour citer cet article : C. Cazanave, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abstract

Homotopy classes of rational functions. Let k be a field of characteristic not 2 and $n \geqslant 1$ be an integer; we show that the set of "algebraic" homotopy classes of rational functions of degree n with coefficients in k can be endowed with a graded monoid structure. Moreover, there is an isomorphism between this monoid and the monoid of orbits under the action of $\mathbf{SL}_n(k)$ of non-degenerate symmetric bilinear forms on k^n, endowed with the orthogonal sum. ***To cite this article: C. Cazanave, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abridged English version

Let k be a field of characteristic not 2 and f a non-constant rational function in $k(X)$. We say that f is *pointed* if it maps ∞ onto ∞; one can then write $f = \frac{A}{B}$, with A and B two polynomials in $k[X]$ relatively prime, A monic, $\deg(A) = n$ and $\deg(B) \leqslant n - 1$ for some integer $n \geqslant 1$ (the *degree* of f).

A pointed rational function can be thought of as a pointed endomorphism of the k-scheme $(\mathbf{P}^1, \infty)$. This viewpoint leads to a natural definition of homotopies. Let f and g be two fixed pointed rational functions; a pointed homotopy between f and g is a morphism $F : \mathbf{A}^1 \times \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$ with the identifications $F_{|\{0\}\times\mathbf{P}^1} = f$, $F_{|\{1\}\times\mathbf{P}^1} = g$ and $F_{|\mathbf{A}^1\times\{\infty\}} = \infty$. We say that f and g belong to the same pointed homotopy class if one can "pass" from f to g by a finite sequence of pointed homotopies. We denote by $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]^p_n$ the pointed homotopy classes of rational functions of degree n.

☆ La présente Note doit beaucoup à Jean Lannes, tant pour le fond que pour la forme ; je lui exprime ici ma plus sincère gratitude.

Adresse e-mail : cazanave@math.univ-paris13.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2008.01.004

Proposition-definition 1. *Let $f = \frac{A}{B}$ be an irreducible pointed rational function of degree n with A monic. Set*

$$\frac{A(X)B(Y) - A(Y)B(X)}{X - Y} = \sum_{1 \leqslant p,q \leqslant n} c_{p,q} X^{p-1} Y^{q-1}$$

and denote by $\text{Béz}_n(A, B)$ *the symmetric* $(n \times n)$*-matrix* $[c_{p,q}]_{1 \leqslant p,q \leqslant n}$. *We call* Bézout form *of f and denote by* $\text{Béz}(f)$ *the symmetric bilinear form on* k^n *whose matrix in the canonical basis is* $\text{Béz}_n(A, B)$. *This form is non-degenerate.*

Theorem 2. *Let* $\mathcal{S}_n(k)$ *be the set of symmetric invertible* $(n \times n)$*-matrices over k. The composite of the Bézout map* $f \mapsto \text{Béz}(f)$ *with the canonical projection* $\mathcal{S}_n(k) \to \mathcal{S}_n(k)/\mathbf{SL}_n(k)$ *factors through* $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]_n^p$. *Moreover, one can endow the disjoint union* $\coprod_n [\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]_n^p$ *with a natural monoidal structure such that*

$$\coprod_n [\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]_n^p \xrightarrow{\coprod \text{Béz}_n} \coprod_n \mathcal{S}_n(k)/\mathbf{SL}_n(k)$$

is a monoid isomorphism (the monoid law on $\coprod_n \mathcal{S}_n(k)/\mathbf{SL}_n(k)$ *is given by orthogonal sum).*

1. Enoncé du théorème

Soient k un corps de caractéristique différente de 2, $n \geqslant 1$ un entier et f une fraction rationnelle dans $k(X)$. On dit que f est de degré n si l'extension $k(f) \subset k(X)$ est de degré n. En clair, f s'écrit $\frac{A}{B}$ avec (A, B) un couple de polynômes de $k[X]$ premiers entre eux dont le supremum des degrés est n, ce couple n'étant déterminé qu'à la multiplication par un scalaire non nul près.

On dit que la fraction rationnelle f est *pointée* si l'on a $f(\infty) = \infty$. On a dans ce cas une unique écriture $f = \frac{A}{B}$ pour un couple (A, B) de polynômes de $k[X]$ premiers entre eux tel que A soit unitaire de degré n et B de degré inférieur ou égal à $n - 1$.

Soient m et n deux entiers, A et B deux polynômes de degrés respectivement inférieurs ou égaux à m et n, on note $\text{rés}_{m,n}(A, B)$ le *résultant* de ces polynômes (nos conventions sont celles de [1] §6. p. 71). Remarquons qu'une fraction rationnelle pointée de degré n est un k-point du schéma, disons F_n, complémentaire dans l'espace affine $\mathbf{A}^{2n} = \operatorname{Spec} k[a_0, \ldots, a_{n-1}, b_0, \ldots, b_{n-1}]$ de l'hypersurface d'équation $\text{rés}_{n,n}(X^n + \sum_0^{n-1} a_i X^i, \sum_0^{n-1} b_i X^i) = 0$.

Une fraction rationnelle peut aussi être vue comme un endomorphisme du k-schéma $\mathbf{P}^1$; cette observation conduit à une notion d'*homotopie*. Soient f et g deux fractions rationnelles ; une homotopie entre f et g est un morphisme $F : \mathbf{A}^1 \times \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$ tel que l'on ait les identifications $F_{|\{0\} \times \mathbf{P}^1} = f$ et $F_{|\{1\} \times \mathbf{P}^1} = g$. On constate qu'il existe une homotopie F entre f et g si et seulement s'il existe un entier n et un couple (A_T, B_T) de polynômes en une indéterminée X et à coefficients dans l'anneau $k[T]$ dont le supremum des degrés (en X) est n, dont le résultant (par rapport à X) $\text{rés}_{n,n}(A_T, B_T)$ appartient à $k[T]^\times = k^\times$ et tel que l'on ait $f = \frac{A_0}{B_0}$ et $g = \frac{A_1}{B_1}$ (en particulier, ceci force f et g à être de même degré).

On dit que F est *pointée* si l'on a de plus $F_{|\mathbf{A}^1 \times \{\infty\}} = \infty$; dans ce cas, on peut choisir A_T unitaire de degré n, B_T de degré inférieur ou égal à $n - 1$ et $\text{rés}_{n,n}(A_T, B_T)$ appartenant à $k^\times$. Une homotopie pointée s'identifie donc à un $k[T]$-point de F_n.

On dit que les deux fractions rationnelles f et g sont dans la même classe d'homotopie (resp. d'homotopie pointée), et l'on note $f \overset{l}{\sim} g$ (resp. $f \overset{p}{\sim} g$), si l'on peut « passer de l'une à l'autre » par une suite finie d'homotopies (resp. d'homotopies pointées). L'ensemble $[\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]_n^p$ des classes d'homotopie pointée de fractions rationnelles de degré n s'identifie à $(\pi_0 \mathrm{F}_n)(k)$, cette notation désignant le coégalisateur de la double flèche $\mathrm{F}_n(k[T]) \rightrightarrows \mathrm{F}_n(k)$ donnée par les morphismes d'évaluation en 0 et en 1.

Soient R un anneau et n un entier ; un R-point (A, B) de F_n définit un unique couple (U, V) de polynômes de $R[X]$ vérifiant $\deg(U) \leqslant n - 2$ et $\deg(V) \leqslant n - 1$ et tel que l'on ait $AU + BV = 1$.

Soient n_1 et n_2 deux entiers, (A_1, B_1) un R-point de F_{n_1}, (A_2, B_2) un R-point de F_{n_2} et (U_1, V_1), (U_2, V_2) les polynômes comme ci-dessus. Par la formule

$$\begin{bmatrix} A_3 & -V_3 \\ B_3 & U_3 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A_1 & -V_1 \\ B_1 & U_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & -V_2 \\ B_2 & U_2 \end{bmatrix},$$

on définit un R-point (A_3, B_3) de $\mathrm{F}_{n_1+n_2}$. On note $\frac{A_3}{B_3} = \frac{A_1}{B_1} \oplus \frac{A_2}{B_2}$. La loi $\oplus$ munit le schéma réunion disjointe des F_n, noté $\coprod_n \mathrm{F}_n$, d'une structure de monoïde gradué (non commutatif !). Il est important de remarquer que cette loi de monoïde en induit une, encore notée $\oplus$, sur la réunion disjointe des $(\pi_0\mathrm{F}_n)(R)$.

Soient R un anneau et A et B deux polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n dans $R[X]$; on pose

$$\delta_{A,B}(X,Y) := \frac{A(X)B(Y) - A(Y)B(X)}{X - Y} = \sum_{1 \leqslant p,q \leqslant n} c_{p,q} X^{p-1} Y^{q-1}.$$

On note $\mathrm{Béz}_n(A,B)$ la matrice $[c_{p,q}]_{1 \leqslant p,q \leqslant n}$. On constate que cette matrice est symétrique et que l'on a :

$$\det \mathrm{Béz}_n(A,B) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \mathrm{rés}_{n,n}(A,B).$$

Définition 1.1. Soit f un endomorphisme pointé de $\mathbf{P}^1$ de degré n. On écrit $f = \frac{A}{B}$ avec A unitaire de degré n et l'on appelle alors *forme de Bézout* de f la forme bilinéaire symétrique non dégénérée $\mathrm{Béz}(f)$ de k^n dont la matrice dans la base canonique est $\mathrm{Béz}_n(A,B)$.

Remarque 1.2. Pour une définition plus conceptuelle de la forme de Bézout en termes de dualité de Serre, on renvoie le lecteur à l'exemple III.4.8 de [2].

Soit $\mathcal{S}_n$ « le schéma des matrices $n \times n$ symétriques inversibles » ; les formules précédentes définissent un morphisme de schémas $\mathrm{Béz}_n : \mathrm{F}_n \to \mathcal{S}_n$ qui induit une application $(\pi_0\mathrm{F}_n)(k) \to (\pi_0\mathcal{S}_n)(k)$.

Proposition 1.3. *L'ensemble $(\pi_0\mathcal{S}_n)(k)$ s'identifie aux orbites sous l'action de $\mathbf{SL}_n(k)$ de formes bilinéaires symétriques non dégénérées sur k^n.*

Démonstration. La proposition est conséquence de l'isomorphisme canonique entre groupes de Witt $\mathrm{W}(R) \cong \mathrm{W}(R[T])$ pour les anneaux R où 2 est inversible (voir par exemple le théorème 2 de [6]). Pour une démonstration directe et élémentaire de la proposition, basée sur une inégalité « à la Hermite » pour l'anneau principal $k[T]$, on renvoie à [5]. $\square$

En d'autres termes, la classe de $\mathbf{SL}_n(k)$-équivalence de la forme de Bézout d'une fraction rationnelle pointée est invariante par homotopie. Le fait remarquable est que cela soit le seul invariant d'homotopie :

Théorème 1.4. *L'application composée suivante est une bijection de monoïdes gradués*

$$\coprod_n [\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^1]_n^p \cong \coprod_n (\pi_0\mathrm{F}_n)(k) \xrightarrow{\coprod \mathrm{Béz}_n} \coprod_n (\pi_0\mathcal{S}_n)(k) \cong \coprod_n \mathcal{S}_n(k)/\mathbf{SL}_n(k),$$

$\coprod_n \mathcal{S}_n(k)/\mathbf{SL}_n(k)$ étant muni de la structure de monoïde (abélien) donnée par la somme orthogonale.

2. Fractions rationnelles pointées de degrés 1 et 2

On note $\mathrm{G_a}$ le schéma « groupe additif » ; pour tout n, le schéma F_n est muni d'une action libre de $\mathrm{G_a}$ « définie par la formule $h \cdot (A,B) = (A + hB, B)$ ».

Soient R un anneau et (A,B) un R-point de F_n ; il existe un unique couple de polynômes (U,V) à coefficients dans R tel que l'on ait $UA + VB = X^{2n-1}$, avec $\deg(U) \leqslant n-1$ et $\deg(V) \leqslant n-1$. Soit $\phi_n : \mathrm{F}_n \to \mathbf{A}^1$ le morphisme qui associe à (A,B) l'opposé du coefficient de X^{n-1} dans V. On vérifie que ϕ_n est $\mathrm{G_a}$-équivariant et le morphisme de $\phi_n^{-1}(0) \times \mathbf{A}^1$ dans F_n qui à (f,h) associe $h \cdot f$ est alors un isomorphisme.

Par construction, le morphisme $\mathrm{Béz}_n : \mathrm{F}_n \to \mathcal{S}_n$ est aussi $\mathrm{G_a}$-équivariant si l'on munit $\mathcal{S}_n$ de l'action triviale.

Proposition 2.1. *Pour $n = 1, 2$ le morphisme produit*

$$\mathrm{F}_n \xrightarrow{\mathrm{Béz}_n \times \phi_n} \mathcal{S}_n \times \mathbf{A}^1$$

est un isomorphisme $\mathrm{G_a}$-équivariant.

Corollaire 2.2. *L'application* $\mathrm{Béz}_n$ *établit une bijection entre* $(\pi_0 \mathrm{F}_n)(k)$ *et* $(\pi_0 \mathcal{S}_n)(k)$ *pour* $n = 1, 2$.

Démonstration de la Proposition 2.1. Il suffit d'après le paragraphe précédent de montrer que le morphisme $\mathrm{Béz}_n : \phi_n^{-1}(0) \to \mathcal{S}_n$ est un isomorphisme pour $n = 1, 2$. Nous laissons au lecteur le soin de s'en convaincre en écrivant par exemple l'isomorphisme inverse. □

Remarque 2.3. La Proposition 2.1 admet la généralisation suivante. Soit H_n le sous-schéma de $\mathcal{S}_n$ dont les R-points sont les matrices de Hankel inversibles à coefficients dans R (une matrice symétrique est dite *de Hankel* si ses coefficients $c_{p,q}$ ne dépendent que de $p + q$) ; le morphisme $(A, B) \mapsto (\mathrm{Béz}_n(A, B))^{-1}$ est alors à valeurs dans H_n et le morphisme produit $(\mathrm{Béz}_n)^{-1} \times \phi_n : \mathrm{F}_n \to \mathrm{H}_n \times \mathbf{A}^1$ est un isomorphisme $\mathrm{G_a}$-équivariant pour tout n. Le morphisme $(\mathrm{Béz}_n)^{-1}$ induit donc une bijection $(\pi_0 \mathrm{F}_n)(k) \cong (\pi_0 \mathrm{H}_n)(k)$ pour tout n. Nous ne développons pas ce point de vue qui ne nous sera pas utile pour la suite.

3. Fractions rationnelles pointées de degré supérieur

Soient $a_1, \ldots, a_n$ des éléments de $k^\times$; nous notons $[a_1, \ldots, a_n]$ l'élément $\frac{X}{a_1} \oplus \cdots \oplus \frac{X}{a_n}$ de $\mathrm{F}_n(k)$.

Proposition 3.1. *Soient* (A, B) *un k-point de* F_n *et* $a \in k^\times$. *Alors, la forme de Bézout de* $\frac{X}{a} \oplus \frac{A}{B}$ *est* $\mathbf{SL}_n(k)$*-équivalente à la forme diagonale par blocs* $\langle a \rangle \oplus \mathrm{Béz}_n(A, B)$.

Démonstration. On a $\frac{X}{a} \oplus \frac{A}{B} = \frac{XA - \frac{B}{a}}{aA}$ et $\delta_{XA - \frac{B}{a}, aA}(X, Y) = aA(X)A(Y) + \delta_{A,B}(X, Y)$. Il en résulte que dans la base $(1, X, \ldots, X^{n-1}, A(X))$, la forme de Bézout est diagonale par blocs. □

Corollaire 3.2. *La forme de Bézout de* $[a_1, \ldots, a_n]$ *est* $\mathbf{SL}_n(k)$*-équivalente à la forme diagonale* $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$.

Voici la version plus précise du Théorème 1.4 que nous allons démontrer :

Théorème 3.3. *Soit* f *une fraction rationnelle pointée de degré* n. *Alors* :

(a) *Il existe des éléments* $a_1, \ldots, a_n \in k^\times$ *tels que l'on ait* $f \overset{p}{\sim} [a_1, \ldots, a_n]$.
(b) *La forme* $\mathrm{Béz}(f)$ *est alors* $\mathbf{SL}_n(k)$*-équivalente à la forme diagonale* $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$.
(c) *Si* g *est une autre fraction rationnelle pointée de degré* m, $\mathrm{Béz}(f \oplus g)$ *est* $\mathbf{SL}_{n+m}(k)$*-équivalente à* $\mathrm{Béz}(f) \oplus \mathrm{Béz}(g)$.
(d) *On a* $[a_1, \ldots, a_n] \overset{p}{\sim} [b_1, \ldots, b_n]$ *si et seulement si les formes diagonales* $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ *et* $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ *sont* $\mathbf{SL}_n(k)$*-équivalentes.*

Démonstration.

– Pour le point (a), on procède par récurrence sur le degré n. La développement en fraction continue de f montre qu'il existe des polynômes $(P_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ tels que l'on ait $f = P_1 \oplus \cdots \oplus P_k$; il suffit donc de traiter le cas où f est un polynôme. En considérant l'élément $\frac{X^n + T(a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0)}{b}$ de $\mathrm{F}_n(k[T])$ on voit qu'un polynôme est toujours homotope à son monôme de plus haut degré ; il suffit donc de traiter le cas d'un monôme $\frac{X^n}{b}$. L'élément $\frac{X^n}{TX^{n-1} + b}$ de $\mathrm{F}_n(k[T])$ donne une homotopie entre $\frac{X^n}{b}$ et $\frac{X^n}{X^{n-1} + b}$, cette dernière se décomposant sous la forme $X \oplus g$ où g est une fraction rationnelle pointée de degré $n - 1$.
– Le point (b) résulte de la Proposition 1.3 et du Corollaire 3.2.
– Le point (c) résulte de ce qui précède : le point (a) permet de se ramener au cas où l'on a $f \overset{p}{\sim} [a]$, a désignant un élément de $k^\times$, puis on applique la Proposition 3.1.
– Nous avons déjà vu que la condition énoncée en (d) est effectivement nécessaire : c'est une conséquence de la Proposition 1.3.
Soit $n \geqslant 2$; le Corollaire 2.2 montre que si les formes $\langle a_i, a_{i+1} \rangle$ et $\langle b_i, b_{i+1} \rangle$ sont $\mathbf{SL}_2(k)$-équivalentes, alors on a

$$[a_1,\ldots,a_i,a_{i+1},\ldots,a_n] \overset{p}{\sim} [a_1,\ldots,b_i,b_{i+1},\ldots,a_n].$$

On dira qu'une telle transformation de $\langle a_1,\ldots,a_i,a_{i+1},\ldots,a_n\rangle$ en $\langle a_1,\ldots,b_i,b_{i+1},\ldots,a_n\rangle$ est une $\mathbf{SL}_2$-*transformation*. Le lemme suivant, qui est une adaptation facile du lemme III.5.6 de [3], montre alors que la condition (d) du théorème est bien suffisante.

Lemme 3.4. *Les deux formes diagonales $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ et $\langle b_1,\ldots,b_n\rangle$ sont $\mathbf{SL}_n(k)$-équivalentes si et seulement si l'on peut passer de l'une à l'autre par une suite finie de $\mathbf{SL}_2$-transformations.*

Remarque 3.5. Dans le cas non pointé, le couple de polynômes (A,B) est seulement défini *à la multiplication par un scalaire non nul près*, et $\mathrm{Béz}_n(A,B)$ n'est donc plus défini qu'à la multiplication par le carré d'un scalaire non nul près. Considérons l'action de $\mathbf{SL}_n(k)\times k^\times$ sur $\mathcal{S}_n(k)$ donnée par $(P,a)\cdot S = a^2\,{}^tPSP$. On déduit de ce qui précède que l'orbite de $\mathrm{Béz}_n(A,B)$ sous cette action est un invariant d'homotopie. Et c'est en fait le seul : l'ensemble $[\mathbf{P}^1,\mathbf{P}^1]_n$ des classes d'homotopie *libre* de fractions rationnelles de degré n est en bijection avec les orbites de l'action de $\mathbf{SL}_n(k)\times k^\times$ sur $\mathcal{S}_n(k)$ (ou encore avec le produit fibré canonique $(\mathcal{S}_n(k)/\mathbf{GL}_n(k)) \underset{k^\times/k^{\times 2}}{\times} (k^\times/k^{\times 2n})$).

Remarque 3.6. Dans [4], Fabien Morel montre que l'ensemble des classes d'*homotopie motivique* pointée de $\mathbf{P}^1$ dans lui-même est un *groupe* isomorphe au groupe de Grothendieck du monoïde $\coprod_n \mathcal{S}_n(k)/\mathbf{SL}_n(k)$.

Références

[1] N. Bourbaki, Algèbre. Chapitre IV : Polynômes et fractions rationnelles, Hermann et Cie., Paris, 1950.
[2] I.M. Gel'fand, M.M. Kapranov, A.V. Zelevinsky, Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants, Birkhäuser, Boston, 1994.
[3] J. Milnor, D. Hussemoller, Symmetric Bilinear Forms, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 73, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1973.
[4] F. Morel, $\mathbf{A}^1$-Algebraic topology over a field, preprint.
[5] M. Ojanguren, The Witt group and the problem of Lüroth, Dottorato di Ricerca in Matematica, ETS Editrice, Pisa, 1990.
[6] M. Ojanguren, On Karoubi's theorem: $W(A)=W(A[t])$, Arch. Math. (Basel) 43 (4) (1984) 328–331.