Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 177–182
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Contrôle optimal/Équations différentielles

Extension du filtre de Chandrasekhar au cas des modèles espace d'état périodiques

Abdelhakim Aknouche, Fayçal Hamdi

U.S.T.H.B., Faculté de mathématiques, El Alia, BP 32, Bab Ezzouar, 16111 Algers, Algeria

Reçu le 17 octobre 2006 ; accepté après révision le 11 décembre 2007

Disponible sur Internet le 14 janvier 2008

Présenté par Paul Deheuvels

Résumé

Cette Note généralise les équations récurrentes de type Chandrasekhar due à Morf, Sidhu et Kailath (1974) au cas de modèles espace d'états à coefficients périodiques. Nous montrons que la différence d'ordre S de la matrice de covariance de l'erreur de prédiction vérifie certaines équations récurrentes à partir desquelles nous obtenons quelques algorithmes pour l'estimation linéaire des moindres carrés des modèles espace d'état périodiques. Les équations proposées ont des avantages potentiels par rapport au filtre de Kalman et en particulier à l'équation aux différences de Riccati périodique. ***Pour citer cet article : A. Aknouche, F. Hamdi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abstract

Extension of the Chandrasekhar filter to the case of periodic state-space models. This Note extends the Chandrasekhar-type recursions due to Morf, Sidhu, and Kailath (1974) to the case of periodic time-varying state-space models. We show that the S-lagged increments of the one-step prediction error covariance satisfy certain recursions from which we derive some algorithms for linear least squares estimation for periodic state-space models. The proposed recursions have potential computational advantages over the Kalman Filter and, in particular, the periodic Riccati difference equation. ***To cite this article: A. Aknouche, F. Hamdi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abridged English version

Morf et al. [9] proposed recursions that substitute the Kalman Filter for linear least squares estimation of discrete-time time-invariant state space models, with a simpler computational complexity. The new algorithms have been called Chandrasekhar-type recursions because they are analog to certain differential equations encountered in continuous-time models. The proposed recursions have played a considerable role in improving computational aspects related to the building of linear time-invariant models. We mention nonexhaustively the *ARMA* likelihood evaluation, the calculation of the exact Fisher information matrix, and the development of fast variants of the recursive least squares algorithm. As is well-known, the Chandrasekhar equations are restricted to the case of time-invariant state-space

Adresses e-mail : d73hakim@yahoo.fr (A. Aknouche), hamdi_fay@yahoo.fr (F. Hamdi).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2007.12.006

models because of their particular time invariance structure and it seems that there is no issue in developing consistent extensions to the class of all nonstationarity, except in very special cases (Sayed and Kailath [11]). A particular class of nonstationarity which has proved useful is the class of periodic linear models. Despite the important progress that has been made recently in the building and analysis of such models, it seems that there is no result concerning extensions of the Chandrasekhar type recursions to the periodic case. This Note extends the Chandrasekhar-type filter proposed by Morf et al. [9] to the periodic time-varying case and retains its desirable features. The derivation of our recursions is similar to its classical counterpart and is based on the factorization result (see Théorème 3.1) which shows that the S-lagged increment of the Riccati variable $\Delta_S \Sigma_t$ can be factorized as $\Delta_S \Sigma_t = Y_t M_t Y_t'$, where M_t is a square symmetric matrix, not necessarily nonnegative definite, of dimension $\operatorname{rank}(\Delta_S \Sigma_1)$, which is at most equal to $\operatorname{rank}(\Delta_S \Sigma_t)$. This can be exploited to derive some recursions which we call periodic Chandrasekhar-type recursions, with a better computational complexity than the Kalman filter (2). These recursions are given by Algorithme 3.1 and Algorithme 3.2. The periodic Chandrasekhar recursions given above will be preferred to the Kalman filter (2) whenever the dimension of Y_t and/or M_t are significantly less than that of Σ_t. These dimensions are conditioned on the good choice of the factorization $\Delta_S \Sigma_1 = Y_1 M_1 Y_1'$ in the initialization step which depends on the relation between the period S, the output dimension m, and the state dimension r. Finally we note that along similar lines to the standard case, a square root version of these recursions can be easily derived in order to improve the numerical stability of the proposed algorithms. Other useful applications for statistics as well as for the system theory can be given.

1. Introduction

Pour des modèles espace d'états à temps discret et à coefficients constants, Morf et al. [9] ont proposé des équations récurrentes (pour l'estimation linéaire des moindres carrés) substituant le filtre de Kalman avec une plus simple complexité numérique. Les nouveaux algorithmes ainsi introduits ont été nommés « filtre de Chandrasekhar » en raison de leur analogie avec des équations différentielles rencontrées dans les modèles à temps continu. Depuis, une grande attention a été prêtée au filtre de Chandrasekhar pour ses applications importantes dans l'amélioration de la complexité numérique relative à la construction des modèles linéaires à coefficients constants. Parmi ces applications, nous mentionnons non exhaustivement l'évaluation de la fonction de vraisemblance (Mélard [7] pour les modèles *ARMA*), le calcul de la matrice d'information de Fisher (Mélard et Klein [8]) et le développement des variantes rapides pour l'algorithme des moindres carrés récursif (Sayed et Kailath, [11], Sayed et al. [12], Nakamori et al. [10]). Cependant, le filtre de Chandrasekhar classique se restreint exclusivement au cas de modèles à coefficients constants en vertu de la structure d'invariance des coefficients et il semble qu'il n'y ait pas de travaux pour le développement d'extensions pour des modèles à coefficients évolutifs dans le temps à l'exception de certains cas très spéciaux (Sayed et Kailath, [11]). Une classe particulière de modèles linéaires à coefficients variables dont l'importance pour la représentation des phénomènes périodiques n'est plus à démontrer est la classe des modèles espace d'états périodiques. Malgré le grand progrès qui a été fait pour la construction et l'analyse de tels modèles (voir e.g. Lund et Basawa [6], Varga et Van Dooren [15], Gautier [3] et les références intra), il semble qu'il n'y ait pas de résultats concernant l'extension des équations de Chandrasekhar. Cette Note propose quelques algorithmes pour l'estimation linéaire des moindres carrés des modèles espace d'états périodiques. Nos méthodes généralisent les équations de Chandrasekhar proposées par Morf et al. [9] au cas périodique et retiennent leurs caractéristiques désirables.

Le reste de cette Note est organisé comme suit. La section 2 rappelle brièvement quelques définitions préliminaires concernant les modèles espace d'états périodiques et leur filtre de Kalman correspondant. La section 3 développe quelques algorithmes de type Chandrasekhar périodiques. Le problème des valeurs de démarrage est abordé dans la section 4.

2. Définitions et notations préliminaires

Considérons un modèle espace d'états périodique de la forme suivante

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{t+1} = F_t \mathbf{x}_t + G_t \epsilon_t, \\ \mathbf{y}_t = H_t' \mathbf{x}_t + \mathbf{e}_t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

où $\{\mathbf{x}_t\}$, $\{\mathbf{y}_t\}$, $\{\mathbf{e}_t\}$ et $\{\epsilon_t\}$ sont des processus aléatoires de dimensions $r \times 1$, $m \times 1$, $m \times 1$, et $d \times 1$ respectivement, tels que $E(\epsilon_t) = E(\mathbf{e}_t) = 0$, $E(\epsilon_t \epsilon_{t+h}') = \delta_{h,0} Q_t$, $E(\mathbf{e}_t \mathbf{e}_{t+h}') = \delta_{h,0} R_t$, $E(\epsilon_t \mathbf{x}_{t-k}') = 0$, $E(\mathbf{e}_t \mathbf{y}_{t-l}') = 0$ et

$E(\mathbf{x}_t\mathbf{x}_t') = W_t, \forall t, h \in \mathbb{Z}, \forall k \geqslant 0, \forall l > 0$, ($\delta$ désigne la fonction de Kronecker). Les matrices F_t, G_t, H_t', Q_t, R_t, et W_t sont périodiques en t de période S. Pour simplifier l'exposé, nous supposons sans perte de généralités que $E(\mathbf{e}_t\epsilon_l') = 0$, $\forall t, l \in \mathbb{Z}$. Soit $\hat{\mathbf{x}}_t$ et $\hat{\mathbf{y}}_t$ les meilleures prévisions linéaires (au sens des moindres carrés) de $\mathbf{x}_t$ et $\mathbf{y}_t$, respectivement, basées sur $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{t-1}$. Il est bien connu que $\hat{\mathbf{x}}_t$ et $\hat{\mathbf{y}}_t$ peuvent être obtenues à partir du filtre de Kalman [5], donné par

$$\begin{cases} \text{(a) } \Omega_t = H_t'\Sigma_t H_t + R_t, \quad \text{(c) } \hat{\mathbf{y}}_t = H_t'\hat{\mathbf{x}}_t, & \text{(d) } \hat{\mathbf{x}}_{t+1} = F_t\hat{\mathbf{x}}_t + K_t\Omega_t^{-1}\hat{\mathbf{e}}_t, \\ \text{(b) } K_t = F_t\Sigma_t H_t, & \text{(e) } \Sigma_{t+1} = F_t\Sigma_t F_t' - K_t\Omega_t^{-1}K_t' + G_tQ_tG_t', \\ \text{avec valeurs de démarrage (f) } \hat{\mathbf{x}}_1 = E(\mathbf{x}_1) = 0, & \text{(g) } \Sigma_1 = E\big(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_1'\big) = W_1, \end{cases} \tag{2}$$

où $\hat{\mathbf{e}}_t = \mathbf{y}_t - \hat{\mathbf{y}}_t$ est le résidu correspondant à $\mathbf{y}_t$ de matrice de covariance Ω_t, $\Sigma_t = E(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)'$ est la matrice de covariance de l'erreur de prédiction $\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t$ et $K_t = E(\mathbf{x}_{t+1}\hat{\mathbf{e}}_t')$ est le gain de Kalman. La notation $A \geqslant 0$ (resp. $A > 0$) signifie que A est semi-définie positive (resp. définie positive).

L'équation (2e) basée sur la relation de démarrage (2g) sera dite équation aux différences de Riccati périodique (*periodic Riccati difference equation*, *PRDE*) puisque dans la limite, elle se réduit à une équation algébrique de Riccati périodique (Bittanti et al., [2]). La résolution de (2e) requiert $O(r^3)$ opérations par itération (voir Morf et al., [9]), ce qui est parfois très coûteux ; de plus, la solution Σ_t, dite variable de Riccati, doit être semi-définie positive, propriété qui n'est pas facile à préserver dans une résolution numérique de (2e). La section suivante propose des équations récurrentes que nous appellerons filtre de Chandrasekhar périodique, permettant de remédier aux inconvé nients du filtre de Kalman.

3. Algorithmes de type Chandrasekhar périodique

Posons $\Delta_S\Sigma_t = \Sigma_{t+S} - \Sigma_t$ la différence d'ordre S de la variable de Riccati pour $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_S \geqslant 0$ données. La formulation de nos équations récurrentes est similaire à celle des équations de Chandrasekhar classiques et se base sur le résultat de factorisation suivant :

Théorème 3.1. *La matrice $\Delta_S\Sigma_t$ vérifie les deux équations aux différences suivantes*

$$\Delta_S\Sigma_{t+1} = (F_t - K_{t+S}\Omega_{t+S}^{-1}H_t')[\Delta_S\Sigma_t + \Delta_S\Sigma_t H_t\Omega_t^{-1}H_t'\Delta_S\Sigma_t](F_t - K_{t+S}\Omega_{t+S}^{-1}H_t')' \tag{3}$$

$$= (F_t - K_t\Omega_t^{-1}H_t')[\Delta_S\Sigma_t - \Delta_S\Sigma_t H_t\Omega_{t+S}^{-1}H_t'\Delta_S\Sigma_t](F_t - K_t\Omega_t^{-1}H_t')'. \tag{4}$$

Preuve. (i) A partir de (2e) nous avons

$$\Delta_S\Sigma_{t+1} = F_t\Delta_S\Sigma_t F_t' - \widetilde{K}_{t+S}\Omega_{t+S}\widetilde{K}_{t+S}' + \widetilde{K}_t\Omega_t\widetilde{K}_t', \tag{5}$$

où $\widetilde{K}_t = K_t\Omega_t^{-1}$ et de (2a) il s'ensuit que Ω_t vérifie l'équation récurrente

$$\Omega_{t+S} = \Omega_t + H_t'\Delta_S\Sigma_t H_t \overset{\text{def}}{=} \Omega_t + \Delta_S\Omega_t. \tag{6}$$

D'autres part, $\widetilde{K}_t$ peut être écrite sous la forme récursive avancée comme suit

$$\begin{aligned} \widetilde{K}_t &= (F_t\Sigma_{t+S}H_t - F_t\Delta_S\Sigma_t H_t)\Omega_t^{-1} = (\widetilde{K}_{t+S}\Omega_{t+S} - F_t\Delta_S\Sigma_t H_t)\Omega_t^{-1} \\ &= \big[\widetilde{K}_{t+S}(H_t'\Delta_S\Sigma_t H_t + H_t'\Sigma_t H_t + R_t) - F_t\Delta_S\Sigma_t H_t\big]\Omega_t^{-1} \\ &= \widetilde{K}_{t+S} - (F_t - \widetilde{K}_{t+S}H_t')\Delta_S\Sigma_t H_t\Omega_t^{-1} \overset{\text{def}}{=} \widetilde{K}_{t+S} - \Delta_S\widetilde{K}_t. \end{aligned} \tag{7}$$

Utilisons (5) et (6) dans (4) nous obtenons la relation

$$\Delta_S\Sigma_{t+1} = F_t\Delta_S\Sigma_t F_t' - \widetilde{K}_{t+S}(\Omega_t + \Delta_S\Omega_t)\widetilde{K}_{t+S}' + (\widetilde{K}_{t+S} - \Delta_S\widetilde{K}_t)\Omega_t(\widetilde{K}_{t+S} - \Delta_S\widetilde{K}_t)'. \tag{8}$$

En développant les termes du membre droit de (7) avec quelques simples manipulations algébriques nous trouvons (3) (voir Aknouche et Hamdi, [1]).

(ii) Un argument similaire peut être utilisé pour déduire (4). Il suffit de montrer que $\widetilde{K}_{t+S} = \widetilde{K}_t + (F_t - K_tH_t')\Delta_S\Sigma_t H_t\Omega_{t+S}^{-1} = \widetilde{K}_t + \Delta_S\widetilde{K}_t$ (Aknouche et Hamdi, [1]), et en remplaçant cette dernière relation avec (5) dans (4) nous obtenons (4). □

Le Théorème 3.1 montre que $\Delta_S \Sigma_t$ peut être factorisée comme suit

$$\Delta_S \Sigma_t = Y_t M_t Y_t', \tag{9}$$

où M_t est une matrice carrée symétrique non nécessairement semi-définie positive de dimension rang$(\Delta_S \Sigma_1)$, qui est au plus égal à r, puisque de (3) on a : rang$(\Delta_S \Sigma_{t+1}) \leqslant rang(\Delta_S \Sigma_t) \leqslant \cdots \leqslant$ rang$(\Delta_S \Sigma_1) \leqslant r$. Comme souligné par un rapporteur anonyme, ce résultat n'est pas surprenant du fait que l'on peut toujours écrire un modèle périodique du type (1) sous la forme d'un modèle espace d'état à coefficients constants (Tiao and Grupe [13]) auquel on peut appliquer la factorisation de Chandrasekhar classique (Morf et al., [7]). Toutefois, compte tenu de la grande complexité de calcul requise (la matrice obtenue est multipliée par S), le développement d'une théorie propre aux modèles périodiques est souhaitable. Ainsi, grâce au théorème de factorisation de Chandrasekhar précédent, les matrices Y_t et M_t données par (8) peuvent être obtenues ré cursivement. L'algorithme suivant montre que l'équation aux différences de Riccati périodique (2e) peut être remplacée par un système d'équations sur Ω_t, K_t, Y_t et M_t avec une réduction dans l'effort de calcul, spécialement lorsque la dimension du vecteur d'état r est très grande devant m, la dimension de $\mathbf{y}_t$.

Algorithme 3.1. Le filtre de Kalman (2.2) peut être remplacé par (2c), (2d) et les équations suivantes

$$\begin{cases} \text{(a) } \Omega_{t+S} = \Omega_t + H_t' Y_t M_t Y_t' H_t, & \text{(c) } Y_{t+1} = (F_t - K_{t+S}\Omega_{t+S}^{-1} H_t') Y_t, \\ \text{(b) } K_{t+S} = (K_t + F_t Y_t M_t Y_t' H_t), & \text{(d) } M_{t+1} = M_t + M_t Y_t' H_t \Omega_t^{-1} H_t' Y_t M_t, \\ \text{avec valeurs de démarrage} & \\ \text{(e) } \Omega_s = H_s' \Sigma_s H_s,\ s = 1, \ldots, S, & \text{(f) } K_s = F_s \Sigma_s H_s, \quad s = 1, \ldots, S, \end{cases} \tag{10}$$

où Σ_s, $1 \leqslant s \leqslant S$, est calculée à partir de (2e) et (2g), tandis que Y_1 et M_1 s'obtiennent en factorisant

$$\Delta_S \Sigma_1 = \Sigma_{S+1} - \Sigma_1 = F_S \Sigma_S F_S' - K_S \Omega_S^{-1} K_S' + G_S Q_S G_S' - \Sigma_1, \tag{10g}$$

comme $Y_1 M_1 Y_1'$.

Justification. (10a) n'est rien d'autre que (5) lorsqu'on utilise (8), tandis que (10b) s'en suit à partir de (8) et de la relation $K_{t+S} = (F_t \Sigma_t H_t + F_t \Delta_S \Sigma_t H_t)$. D'autre part, (10c) et (10d) s'obtiennent à partir de (3) que nous réécrivons en utilisant (8) comme suit $\Delta_S \Sigma_{t+1} = (F_t - K_{t+S}\Omega_{t+S}^{-1} H_t') Y_t \times (M_t + M_t Y_t' H_t \Omega_t^{-1} H_t' Y_t M_t) Y_t' (F_t - K_{t+S}\Omega_{t+S}^{-1} H_t')' = Y_{t+1} M_{t+1} Y_{t+1}'$. □

Notons que la *PRDE* (2e) doit être utilisée seulement pour $1 \leqslant s \leqslant S$ pour démarrer (9). Pour $t > S$ le calcul récursif de Σ_t n'est pas pris en compte par l'algorithme mais peut être déduit à travers l'équation $\Sigma_{kS+s} = \Sigma_s + \sum_{j=0}^{k-1} Y_{jS+s} M_{jS+s} Y_{jS+s}'$, $1 \leqslant s \leqslant S$. Similairement au cas des modèles à coefficients constants (Morf et al., [7]), d'autres formes de l'Algorithme 3.1 peuvent être obtenues à partir du Théorème 3.1. La variante suivante est particulièrement bien adaptée lorsque $M_1 < 0$, auquel cas, $M_t \leqslant 0$ pour tout $t \geqslant 2$. Ce dernier cas se présente entre autres lorsque le modèle (1) est causal.

Algorithme 3.2. Le système d'équations récurrentes suivant, dans lequel les équations (10a), (10b) et (10e)–(10g) restent inchangées tandis que (10c) et (10d) sont remplacées par

$$\text{(a) } Y_{t+1} = \left(F_t - K_t \Omega_t^{-1} H_t'\right) Y_t, \qquad \text{(b) } M_{t+1} = M_t - M_t Y_t' H_t \Omega_{t+S}^{-1} H_t' Y_t M_t, \tag{11}$$

fournit le même résultat que l'Algorithme 3.1.

Justification. La formulation est similaire à celle de l'Algorithme 3.1, mais elle est basée sur la factorisation (4) plutôt que (3). □

Il est encore possible d'en déduire d'autres variantes de l'Algorithme 3.1 comme pour le cas standard. L'équation aux différences de Riccati périodique (10d) peut être linéarisée en utilisant le lemme d'inversion matricielle (Morf et al., [9]) à travers lequel nous obtenons des récurrences sur M_t^{-1} plutôt que sur M_t, comme suit $M_{t+1}^{-1} = M_t^{-1} - Y_t' H_t \Omega_{t+S}^{-1} H_t' Y_t$. Le filtre de Chandrasekhar périodique sera préféré au filtre de Kalman (2) pourvu que les dimensions de Y_t et/ou de M_t sont significativement plus petites que r. Ces dimensions sont conditionnées sur le bon choix de la factorisation non unique $\Delta_S \Sigma_1 = Y_1 M_1 Y_1'$ dans l'étape d'initialisation que nous abordons dans la section suivante.

4. Le problème d'initialisation

Supposons que le processus $\{\mathbf{x}_t\}$ donné par (1) est causal, c'est à dire que la matrice monodromique $\prod_{i=0}^{S} F_{S-i}$ a ses valeurs propres inférieures à 1 en module. Considérons les deux cas suivants :

(i) **Cas où** $Sm < r$: Itérons (10g) S fois et utilisons le fait que sous la condition de stationnarité périodique, Σ_1 vérifie l'équation de Lyapunov à temps discret périodique (discrete-time periodic Lyapunov equation *DPLE*, e.g. Bittanti et al., [2] ; Varga [14])

$$\Sigma_1 = \left(\prod_{j=0}^{S-1} F_{S-j}\right)\Sigma_1\left(\prod_{j=0}^{S-1} F_{S-j}\right)' + \sum_{k=0}^{S-1}\left(\prod_{j=0}^{k-1} F_{S-j}\right)G_{S-k}Q_{S-k}G'_{S-k}\left(\prod_{j=0}^{k-1} F_{S-j}\right)',$$

nous obtenons

$$\Delta_S\Sigma_1 = -\sum_{k=0}^{S-1}\left(\prod_{j=0}^{k-1} F_{S-j}\right)K_{S-k}\Omega_{S-k}^{-1}K'_{S-k}\left(\prod_{j=0}^{k-1} F_{S-j}\right)' = -L\,\mathrm{diag}(\Omega_S^{-1},\dots,\Omega_1^{-1})L' = Y_1M_1Y'_1 \tag{12}$$

où diag$(.,\dots,.)$ désigne la matrice bloc diagonale et L est donnée par $L = [K_S, F_SK_{S-1}, F_SF_{S-1}K_{S-2},\dots, \prod_{j=0}^{S-1} F_{S-j}K_1]$. Il est clair que lorsque Sm est significativement plus petit que r, l'équation *PRDE* non homogène (2e) est remplacée par l'équation *PRDE* homogène (11b) qui est de dimension inférieure. Par exemple, pour $m = 1$, la complexité de la résolution de (10d) ou (11b) en utilisant (12) comme étape d'initialisation, est de l'ordre de $\mathrm{O}(S^3)$, ce qui est plus simple comparé à la résolution de (2e). Il est encore possible d'alléger le fardeau de calcul dans (12) en évitant de former la somme des produits matriciels (dans l'évaluation de L), en faisant appel à la décomposition de Schur périodique (Hench et Laub [4]).

(ii) **Cas où** $Sm \geqslant r$: Dans ce cas, il est préférable d'utiliser une autre décomposition. Puisque $\Sigma_1 = F_SW_0F'_S + G_SQ_SG'_S$, alors $\Delta_S\Sigma_1 = F_S\Sigma_SF'_S - K_S\Omega_S^{-1}K'_S - F_SW_0F'_S = F_S[\Sigma_S - W_0 - \Sigma_SH_S\Omega_S^{-1}H'_S\Sigma'_S]F'_S$. Ce qui permet d'identifier Y_1 et M_1 comme suit $Y_1 = F_S$ et $M_1 = \Sigma_S - W_0 - \Sigma_SH_S\Omega_S^{-1}H'_S\Sigma'_S$. Avec une telle initialisation, l'équation *PRDE* (11b) est de même dimension que l'équation *PRDE* (2e), et s'il semble qu'il n'y ait pas eu de réduction dans la complexité comparant au filtre de Kalman, la variable de Riccati M_t dans (11b) n'est cependant pas astreinte à être semi-définie positive, contrairement à la variable de Riccati Σ_t de (2e).

5. Conclusion

Dans cette Note, nous avons généralisé les équations de Chandrasekhar à temps discret au cas périodique à travers plusieurs formes. Ces équations ont un potentiel pour la réduction de la complexité numérique inhérente au filtre de Kalman correspondant. Une version racine carrée peut être facilement formulée (Sayed et Kailath [11]) dans le but d'améliorer la stabilité numérique des algorithmes proposés. Ces équations peuvent être appliquées pour réduire la complexité des problèmes d'inférence associés au modèles périodiques linéaires tels, par exemple, les modèles *ARMA* périodiques (*PARMA*).

Remerciements

Les auteurs sont profondément reconnaissants à deux rapporteurs anonymes pour leurs constructives remarques et suggestions.

Références

[1] A. Aknouche, F. Hamdi, Periodic Chandrasekhar recursions, Preprint, http://arXiv.org/abs/0711.3857v1, 2007.

[2] S. Bittanti, P. Colaneri, G.D. De Nicolao, The difference periodic Riccati equation for the periodic prediction problem, IEEE Trans. Automat. Control 33 (1988) 706–712.

[3] A. Gautier, Influence asymptotique de la correction par la moyenne sur l'estimation d'un modèle *AR*(1) périodique, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 315–318.

[4] J.J. Hench, A.J. Laub, Numerical solution of the discrete-time periodic Riccati equation, IEEE Trans. Automat. Control 39 (1994) 1197–1210.

[5] E. Kalman, A new approach to linear filtering and predicting problems, Trans. ASME, J. Basic Engrg. Ser. 82 (1960) 35–45.

[6] R. Lund, I.V. Basawa, Recursive prediction and likelihood evaluation for periodic *ARMA* models, J. Time Ser. Anal. 21 (2000) 75–93.

[7] G. Mélard, Algorithm AS197: A fast algorithm for the exact likelihood of autoregressive-moving average models, Appl. Statistics 33 (1984) 104–114.
[8] G. Mélard, A. Klein, On a fast algorithm for the exact information matrix of a Gaussian *ARMA* time series, IEEE Trans. Signal Process. 42 (1994) 2201–2203.
[9] M. Morf, G.S. Sidhu, T. Kailath, Some new algorithms for recursive estimation in constant, linear, discrete-time systems, IEEE Trans. Automat. Control 19 (1974) 315–323.
[10] S. Nakamori, A. Hermoso, J. Jimknez, J. Linares, Chandrasekhar-type filter for a wide-sense stationary signal from uncertain observations using covariance information, Appl. Math. Comput. 151 (2004) 315–325.
[11] A.H. Sayed, T. Kailath, Extended Chandrasekhar recursions, IEEE Trans. Automat. Control 39 (1994) 619–623.
[12] A.H. Sayed, T. Kailath, H. Lev-Ari, Generalized Chandrasekhar recursions from the generalized Schur algorithm, IEEE Trans. Automat. Control 39 (1994) 2265–2269.
[13] G.C. Tiao, M.R. Grupe, Hidden periodic autoregressive-moving average models in time series data, Biometrika 67 (1980) 365–373.
[14] A. Varga, Periodic Lyapunov equations: some applications and new algorithms, Int. J. Control 67 (1997) 69–87.
[15] A. Varga, P. Van Dooren, Computational methods for periodic systems – an overview, in: Proc. of IFAC Workshop on Periodic Control Systems, Como, Italy, 2001, pp. 171–176.