Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 233–237

COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse numérique/Calcul des variations

Étude de l'erreur de troncature du domaine pour un problème aux valeurs propres

Abdelaziz Choutri

Département de mathématiques, École normale supérieure, B.P. 92, Vieux Kouba, 16050 Alger, Algérie

Reçu le 23 novembre 2007 ; accepté le 4 décembre 2007

Disponible sur Internet le 14 janvier 2008

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

Le calcul des modes guidés dans une fibre optique à gaine homogène, dans le cas scalaire, est un problème aux valeurs propres posé dans tout le plan $\mathbb{R}^2$. La principale difficulté dans la résolution numérique de ce problème est liée au caractère non borné du domaine. Dans cette Note, nous donnons une estimation de l'erreur lorsqu'on tronque le domaine et on impose une condition de Robin sur la frontière du domaine ainsi obtenu. C'est ce qu'on a appelé l'erreur dûe à la troncature du domaine. ***Pour citer cet article : A. Choutri, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Abstract

Study of domain truncation error for an eigenvalue problem. The computation of guided modes in an optical fiber is an eigenvalue problem posed in the whole of $\mathbb{R}^2$. To compute the eigenvalues and the associated eigenfunctions, we truncate the domain and we impose a Robin condition on the boundary of the truncated domain. In this Note, we give an error estimate between the solutions of the physical problem and the truncated one. ***To cite this article: A. Choutri, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***
© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

The computation of guided modes in an optical fiber is the eigenvalue problem P_0, set in the whole of $\mathbb{R}^2$. When trying to compute numerically its solutions by a finite element method, the main difficulty is related to the lack of boundedness of the domain. In order to solve it, an approximate problem to P_0, namely problem P_1, was introduced in [4]; it is set on a bounded domain and the solution is written in the form of a convergent series in $H^1(\mathbb{R}^2)$. Then in [2], another approximate problem P_2, with a Robin-type boundary condition was proposed. It was shown that P_1 is equivalent to problem P_2.

We use this framework in order to define the truncated problem P_3, equivalent to P_2. We impose a Robin-type condition on the boundary of the truncated domain. In Proposition 4.1 we give a priori estimates for the eigenfunctions. These estimates are essential when establishing the error estimate in Corollary 4.2.

Adresse e-mail : choutri@ens-kouba.dz.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2007.12.003

1. Introduction

Le calcul des modes guidés dans une fibre optique à gaine homogène dans le cas scalaire, est un problème aux valeurs propres posé dans tout le plan $\mathbb{R}^2$. La principale question est alors : comment traiter le caractère non borné du domaine si on utilise une méthode à base d'éléments finis ? Pour répondre à cette question, dans [4] on a introduit un autre problème, équivalent au précédent. Il est posé dans un domaine borné avec une écriture de la solution sous forme d'une série convergente dans $H^1(\mathbb{R}^2)$ à partir d'un rayon suffisemment grand. Par la suite, ce problème est approché par un problème tronqué posé dans le même domaine mais en se limitant à une somme finie de N termes de la série introduite sur le bord du domaine. Enfin, on donne une estimation a priori de l'erreur entre les solutions du problème équivalent et celles du problème tronqué en fonction de N.

Un autre problème (toujours équivalent au problème physique) posé dans un domaine borné Ω et avec des conditions au bord de type Robin (d'impédance), a été proposé [2]. Les conditions au bord sont obtenues en faisant un développement de la solution u au voisinage de l'infini. Sans calculer les solutions, on néglige les termes d'ordre de $\mathrm{O}(R^2)$, où R est la taille du domaine Ω considéré.

Dans cette Note, nous étudions l'erreur entre les solutions du problème de départ et celles du problème tronqué. On montre que l'erreur dépend de R, la taille du domaine considéré, et qu'elle est suffisamment petite si R est grand.

2. Position du problème

Dans cette section nous présentons le problème physique, étudié dans [3]. Il s'agit de déterminer les composantes transversales u du champ électromagnétique susceptible de se propager dans une fibre optique. Ces composantes u vérifient l'équation scalaire suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \beta \in \mathbb{R}, \text{ et } u \in L^2(\mathbb{R}^2),\ u \neq 0, \text{ satisfaisant} \\ \Delta u + k^2 n^2 u = \beta^2 u, \quad \text{dans } \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{P_0}$$

Nous supposons (voir aussi [3]) que

(H_1) – la gaine de la fibre est homogène et telle que $n(x) = n_\infty$ pour $|x| \geqslant a$, où a est le rayon du coeur de la fibre.
(H_2) – on a $n_+ > n_\infty$ où $n_+ = \sup_{x\in\mathbb{R}^2} n(x)$.

Alors (pour des détails nous renvoyons à [3]), on a l'inégalité suivante :

$$k^2 n_\infty^2 \leqslant \beta^2 < k^2 n_+^2.$$

On pose (voir les notations de [4])

$$V(x) = k\sqrt{n_+^2 - n^2(x)}, \qquad V_\infty = k\sqrt{n_+^2 - n_\infty^2},$$

et

$$\lambda = k^2 n_+^2 - \beta^2.$$

Soit Ω est un domaine de $\mathbb{R}^2$ contenant le coeur de la fibre et désignons par Σ son bord. Nous introduisons les deux problèmes suivants :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \lambda \in]0, V_\infty^2[\text{ et } u \in H^1(\Omega),\ u \neq 0, \text{ satisfaisant} \\ -\Delta u + V^2 u = -\lambda u \quad \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial r} = A_\lambda(u|_\Sigma) \quad \text{sur } \Sigma, \end{cases} \tag{P_1}$$

et

$$\begin{cases} \text{Trouver } \lambda \in]0, V_\infty^2[\text{ et } u \in H^1(\Omega),\ u \neq 0, \text{ satisfaisant} \\ -\Delta u + V^2 u = -\lambda u \quad \text{dans } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial r} = -\sqrt{\lambda}\, u + \mathrm{Tr}(u) \quad \text{sur } \Sigma, \end{cases} \tag{P_2}$$

où K_p sont les fontions de Bessel modifiées [1],

$$A_\lambda(u|_\Sigma) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \frac{K_p'(R\sqrt{V_\infty^2-\lambda})}{K_p(R\sqrt{V_\infty^2-\lambda})},$$

et

$$T_R(u) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2R}}\,\mathrm{e}^{-\lambda R}\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{A}_m(\theta)\left\{-\frac{4}{8\lambda R}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{(8\lambda R)^2}\right)\right\},$$

où les $\mathcal{A}_m$ sont des fonctions réelles. Ici, comme auparavant, R désigne la taille du domaine.

On montre alors le résultats suivants, dont la preuve repose sur des arguments de prolongements et restrictions (voir [2] et [4]) :

Proposition 2.1. *Les problèmes (P_1) et (P_2) sont équivalents.*

3. Le problème tronqué

Nous négligeons le terme d'ordre $\mathrm{O}(R^2)$ et introduisons un problème posé dans Ω avec de nouvelles conditions sur le bord Σ,

$$\begin{cases} \text{Trouver } \lambda \in\,]0, V_\infty^2[\text{ et } u \in H^1(\Omega),\ u \neq 0,\ \text{satisfaisant} \\ -\Delta u - V(x)u = -\lambda u \quad \text{dans } \Omega, \\ \sqrt{\lambda}\, u(r,\theta) + \dfrac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad \text{sur } \Sigma. \end{cases} \tag{P_3}$$

Soient $a_1(\cdot,\cdot)$ et $a_3(\cdot,\cdot)$ les formes bilinéaires associées aux problèmes (P_1) et (P_3) respectivement,

$$a_1(u,v) = \int_\Omega \bigl(|\nabla u|\,|\nabla v| + V^2\, u\, v\bigr)\,\mathrm{d}x - \langle A_\lambda u|_\Sigma, v|_\Sigma\rangle, \quad \forall u,v \in H^1(\Omega),$$

et

$$a_3(u,v) = \int_\Omega \bigl(|\nabla u|\nabla v| + V^2\, u\, v\bigr)\,\mathrm{d}x + \bigl\langle \sqrt{\lambda}\, u|_\Sigma, v|_\Sigma\bigr\rangle, \quad \forall u,v \in H^1(\Omega),$$

qu'on peut réécrire sous la forme

$$a_1(u,v) = \int_\Omega \bigl(|\nabla u|\,|\nabla v| + V^2\, u\, v\bigr)\,\mathrm{d}x + 2\pi \sum_{p\in\mathbb{Z}} \Phi_p\Bigl(R\sqrt{V_\infty^2-\alpha}\Bigr) u_p v_p, \quad \forall u,v \in H^1(\Omega),$$

et

$$a_3(u,v) = \int_\Omega \bigl(|\nabla u|\nabla v| + V^2 uv\bigr)\,\mathrm{d}x + 2\pi\sqrt{V_\infty^2-\alpha}\sum_{p\in\mathbb{Z}} u_p v_p, \quad \forall u,v \in H^1(\Omega),$$

avec

$$\Phi_p(z) = -\frac{k_p'(z)}{k_p(z)},$$

où les k_p (voir [1]) sont les fonctions de Bessel modifiées d'ordre p, et u_p, v_p sont les $p^{\text{èmes}}$ coefficients de Fourier de u et de v, respectivement.

Proposition 3.1. *Soient $(\Lambda_\ell)_{m\geqslant 1}$ et $(\Lambda_\ell^T)_{\ell\geqslant 1}$ deux familles de fonctions définies de $]0, V_\infty^2[$ dans $\mathbb{R}_+$, telles que $\Lambda_\ell(\alpha)$ et $\Lambda_\ell^T(\alpha)$ sont les $\ell^{\text{ème}}$ valeurs propres de (P_1) et de (P_3), respectivement. Alors, $\Lambda_\ell(\alpha)$ et $\Lambda_\ell^T(\alpha)$ sont solutions des problèmes de point fixe suivants* :

Trouver $\lambda \in\,]0, V_\infty^2[$ *tel que* $\Lambda_\ell(\lambda) = \lambda$, *respectivement,*

Trouver $\lambda \in]0, V_\infty^2[$ *tel que* $\Lambda_\ell^T(\lambda) = \lambda$.

Idée de la démonstration. Pour tout $\alpha \in]0, V_\infty^2[$ et pour tout $v \in H^1(\Omega)$ on pose (voir [4])

$$F(\alpha, v) = \int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + V^2 v^2\right) \mathrm{d}x + 2\pi \sum_{p\in\mathbb{Z}} \Phi_p\left(R\sqrt{V_\infty^2 - \alpha}\right) u_p v_p,$$

et

$$F_T(\alpha, v) = \int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + V^2 v^2\right) \mathrm{d}x + \sqrt{V_\infty^2 - \alpha}\, \|v\|_{L^2(\Sigma)}.$$

En utilisant les expressions de *min max* de [5], nous pouvons écrire $\Lambda_\ell(\alpha)$ et $\Lambda_\ell^T(\alpha)$ sous la forme explicite,

$$\begin{cases} \Lambda_\ell = \min\limits_{v\in V_\ell} \max\limits_{V_\ell \in \nu_\ell} \dfrac{F(\alpha, v)}{\|v\|^2_{L^2(\Omega)}}, \\ \Lambda_\ell^R = \min\limits_{v\in V_\ell} \max\limits_{V_\ell \in \nu_\ell} \dfrac{F_T(\alpha, v)}{\|v\|^2_{L^2(\Omega)}}, \end{cases}$$

où ν_ℓ et V_ℓ sont respectivement, définis par l'ensemble des sous espaces de V_ℓ de dimension ℓ, et le sous espace des ℓ premières fonctions propres. On en déduit que les valeurs propres du problème (P_1) et (P_3) sont solutions des problèmes de point fixe anoncés. □

4. Estimation de l'erreur de troncature sur les valeurs propres

Proposition 4.1. *Si* $\Lambda_\ell(\lambda)$ *et* $\Lambda_\ell^T(\lambda)$ *sont les* $\ell^{\text{ème}}$ *valeurs propres des problèmes* (P_1) *et* (P_3) *respectivement, on a les inégalités suivantes* :

$$0 \leqslant \Lambda_\ell^R(\lambda) - \Lambda_\ell(\lambda) \leqslant c\mathrm{e}^{-c'R},$$

où c et c′ sont des constantes positives.

Idée de la démonstration. Pour tout $\alpha \in]0, V_\infty^2[$ et pour tout $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$F_T(\alpha, v) - F(\alpha, v) = \sqrt{V_\infty^2 - \alpha} \int_\Sigma v^2 \,\mathrm{d}\sigma_x - 2\pi \sum_{p\in\mathbb{Z}} \Phi_p\left(R\sqrt{V_\infty^2} - \alpha\right)|v_p|^2.$$

Sachant que $\Phi_p(z) \leqslant 0$ (cf. [4]), on obtient d'une part l'inégalité

$$\Lambda_\ell^T(\lambda) - \Lambda_\ell(\lambda) \geqslant 0.$$

D'autre part, on sait que pour tout $v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla v|^2 + V(x)v^2\right) \mathrm{d}x \geqslant \int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + V(x)v^2\right) \mathrm{d}x.$$

Ceci donne immédiatement l'inégalité suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla v|^2 + V(x)v^2\right) \mathrm{d}x + \sqrt{V_\infty^2 - \alpha}\, \|v\|_{L^2(\Sigma)} \geqslant F_T(\alpha, v), \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

ce qui implique en particulier, que

$$\Lambda_\ell(\alpha) + \sqrt{V_\infty^2 - \alpha}\, \|v\|_{L^2(\Sigma)} \geqslant \Lambda_\ell^T(\lambda).$$

En choisissant $v = u_\ell$, l'estimation devient

$$\Lambda_\ell^T(\lambda) - \Lambda_\ell(\alpha) \leqslant \sqrt{V_\infty^2 - \alpha}\, \|u_\ell\|_{L^2(\Sigma)}, \quad \forall \alpha \in]0, V_\infty^2[.$$

De plus, pour R assez grand, on a

$$\|u_\ell\|_{L^2(\Sigma)} \leqslant C V_\infty^2 \mathrm{e}^{-2(V_\infty^2 - \Lambda_\ell)R},$$

où C est une constante positive indépendante de R. On en déduit alors l'estimation

$$\Lambda_\ell^T(\lambda) - \Lambda_\ell(\alpha) \leqslant C V_\infty^2 \mathrm{e}^{-2(V_\infty^2 - \Lambda_\ell)R},$$

et ceci conclut la démonstration car α est arbitraire dans $]0, V_\infty^2[$. □

Corollaire 4.2. *Si u et u_3 sont solutions des problèmes (P_0) et (P_3) respectivement, alors on a*

$$\|u - u_3\|_{L^2(\Omega)} \leqslant c\mathrm{e}^{-c'R}$$

où c et c' sont des constantes positives indépendantes de R.

Remerciements

Ce travail a été effectué durant mes visites au Laboratoire Jacques-Louis Lions de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI) dans le cadre de l'Accord-programme 02 MDU 543 de coopération franco-algérienne du CMEP, que l'auteur remercie pour son soutien.

Références

[1] M. Abramowitz, A. Steguin, Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York, 1972.
[2] C. Bekkey, A. Choutri, R. Djellouli, H. Rezgui, A local boundary condition coupled to a finite element method to compute guided modes of optical fibers under the weak guidance assumptions, Math. Methods Appl. Sci. 23 (2000) 1551–1583.
[3] A.S. Bonnet, R. Djellouli, Calcul des modes guidés d'une fibre optique, Rapport Interne CMAP Nr. 82, 1988.
[4] A.S. Bonnet, N. Gumati, Spectral approximation of a boundary condition for an eigenvalue problem, SIAM J. Numer. Anal. 32 (4) (1995) 1263–1279.
[5] L. Reed, N. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics, vol. 2, Academic Press, New York, 1978.