Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008) 149–154
COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Partial Differential Equations

Long time existence problems for semilinear Klein–Gordon equations

Laurentiu Benoaga

Université Paris 13, Institut Galilée, département de mathématiques, 99, avenue J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse, France

Received 2 May 2007; accepted after revision 20 November 2007

Available online 11 January 2008

Presented by Gilles Lebeau

Abstract

We study a problem of almost global existence for solutions of semilinear Klein–Gordon equations with small *weakly decaying Cauchy data*. Our work concerns nonlinearities $P(u, \partial_t u, \nabla u)$ which are quadratic in $(\partial_t u, \nabla u)$ and *do not have any other special structure*. We prove that the solution exists over an interval of time exponential in $\varepsilon^{-2/3}$, where ε is the size in H^s of the Cauchy data. The main difficulty is to construct, using suitable local cut-offs, the function spaces in which the nonlinearities verify the necessary estimates for the proof of a contraction property. ***To cite this article: L. Benoaga, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Résumé

Problèmes d'existence en temps grand pour des équations de Klein–Gordon non-linéaires. Notre travail est consacré à un problème d'existence presque globale pour des solutions d'équations de Klein–Gordon semi-linéaire à données petites *faiblement décroissantes*. Nous abordons le cas de non-linéarités $P(u, \partial_t u, \nabla u)$ quadratiques en $(\partial_t u, \nabla u)$, et *ne vérifiant aucune autre condition de structure particulière*, en dimension grande $d \geqslant 4$. Nous montrons que le problème considéré admet des solutions définies sur un intervalle de temps exponentiel en $\varepsilon^{-2/3}$, où ε désigne la taille dans H^s des données de Cauchy. ***Pour citer cet article : L. Benoaga, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 346 (2008).***

Version française abrégée

Cette Note résume le travail effectué dans [1], consacré à des problèmes d'existence presque globale pour des solutions d'équations de Klein–Gordon semi-linéaires (2) à données petites *faiblement décroissantes*. Le problème analogue pour des données très décroissantes à l'infini est désormais bien compris, mais dans le cas de données dont la décroissance à l'infini est du type L^2 ou Sobolev, beaucoup moins de résultats sont disponibles.

La question de l'existence en temps grand de solutions de l'équation de Klein–Gordon semi-linéaire à données petites dans $H^s(\mathbb{R}^d)$ $(s \gg 1)$, a été abordée par Delort et Fang dans [5]. Ces auteurs ont obtenu en dimension supérieure

E-mail address: benoaga@math.univ-paris13.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2007.11.012

ou égale à deux un résultat d'existence presque globale, i.e. sur un intervalle de temps exponentiel en une puissance de l'inverse de la taille ε des données de Cauchy, grâce toutefois à *une hypothèse de structure sur la non-linéarité*.

Notre travail aborde le cas de non-linéarités $P(u, \partial_t u, \nabla u)$ quadratiques en $(\partial_t u, \nabla u)$, et *ne vérifiant aucune autre condition de structure particulière*, en dimension $d \geqslant 4$. Notre résultat principal, le Théorème 2.1, affirme que le problème considéré admet des solutions définies sur un intervalle de temps exponentiel en $\varepsilon^{-2/3}$, où ε désigne la taille dans H^s des données de Cauchy. Notre approche initiale, inspirée par [5], consiste à réduire d'abord par le changement d'échelle (3) la question étudiée à un résultat d'existence locale pour le problème de Klein–Gordon semi-linéaire semi-classique (4). Ce problème est ensuite résolu (voir le Théorème 2.3) sur un intervalle de temps uniforme en le paramètre semi-classique, par une méthode de point fixe traditionnelle sur des espaces de Sobolev 2-microlocaux, analogues à ceux utilisés par Bourgain [2] et de nombreux autres auteurs dans le cadre de l'équation des ondes. La difficulté essentielle est la construction de ces espaces, dans lesquels les non-linéarités doivent vérifier les estimations nécessaires à la preuve de la propriété de contraction.

Nous définissons des espaces de fonctions $u(t, x)$ (dépendant d'un paramètre h) en imposant à

$$\Phi^{\pm}_{jk}(\tau, \xi)\hat{u}(\tau, \xi) = \mathbb{1}_{\{|\xi|\sim 2^j\}}\mathbb{1}_{\{|\tau\mp\sqrt{1/h^2+\xi^2}|\sim 2^k\}}\mathbb{1}_{\{\pm\tau>0\}}\hat{u}(\tau, \xi) \tag{1}$$

(voir (6)) d'avoir une norme $L^2_\tau L^2{}_\xi$ majorée essentiellement par $Ch^s 2^{-ks'}(1 + 2^j h + 2^k h)^{-N}$. Mais les estimations dont on a besoin ne peuvent être obtenues lorsque l'espace de base est purement construit sur L^2 que pour des non-linéarités particulières. Notre approche pour contourner cette difficulté a été de nous inspirer du travail de Tataru [11], consacré à l'étude de solutions locales à données peu régulières, pour des équations d'onde à non-linéarité générale quadratique en les dérivées de l'inconnue. Cet auteur, confronté au même obstacle que nous, a introduit des raffinements des espaces utilisés, en combinant estimations L^2 pour des localisées de Littlewood–Paley avec des estimations $L^1_t L^\infty_x$ pour des fonctions tronquées spectralement non seulement dans des couronnes, mais également dans des cônes de l'espace des phases. Dans le cadre qui nous intéresse ici, où l'opérateur des ondes est remplacé par un opérateur de Klein–Gordon semi-classique, nous procédons de même. Nous imposons donc de plus, une estimation $L^1_t L^\infty_x$ sur

$$\mathcal{F}^{-1}\big(\mathbb{1}_{A_{jkh,a}}\Phi^{\pm}_{jk}(\tau, \xi)\hat{u}(\tau, \xi)\big),$$

où $\{A_{jkh,a}\}_{a\in\mathcal{A}(j,k,h)}$ est une famille de décompositions obtenues en intersectant le support en ξ de (1) par des cônes d'angle convenable, et également dans certains cas des sous-couronnes de la couronne en ξ de rayon 2^j. Pour les expressions précises de ces estimations L^2 et $L^1_t L^\infty_x$ voir la Définition 3.1.

Les espaces que nous utilisons, $X^{s,s'}_N$, ayant ainsi été définis par des estimations de u tronquée par des projecteurs spectraux, l'essentiel du travail consiste à prouver des théorèmes de produits convenables.

Nous étudions d'abord des *intégrales oscillantes* (14) répresentant l'évolution, sous le groupe de Klein–Gordon semi-classique, de données spectralement localisées dans certains domaines. Nous obtenons des estimations précises de ces intégrales en fonction de tous les paramètres, la démarche essentielle restant les raisonnements de type phase stationnaire. Nous prouvons des *inégalités de Strichartz* (voir (13)) pour des solutions de l'équation de Klein–Gordon semi-classique à données spectralement supportées dans l'intersection d'un cône et d'une couronne de l'espace des phases. Nous utilisons l'approche classique de Ginibre–Velo [6] i.e. nous déduisons nos inégalités par interpolation, dualité, et utilisation de l'inégalité de Hardy–Littlewood–Sobolev d'une estimation L^∞–L^1. Celle-ci découle de bornes L^∞ pour l'action du groupe de Klein–Gordon sur les troncatures spectrales considérées, déduites des estimations d'intégrales oscillantes (14) avec $\varepsilon \sim 1$. Un résultat incontournable est la Proposition 4.2 qui prouve la *majoration uniforme pour les normes $L^1_t L^1_x$ des noyaux des projecteurs spectraux* intervenant dans (7). Cela assure que ces projecteurs sont bornés sur tous les espaces de Lebesque, notamment sur $L^1_t L^\infty_x$, uniformément en les paramètres. Ces majorations uniformes sont elles aussi déduites des estimations, cette fois-ci L^1_x, des intégrales oscillantes du type (14) et du choix approprié des troncatures spectrales.

L'utilisation subtile de ces résultats permet d'obtenir des estimations appropriées de produits de blocs spectraux. La preuve du théorème d'existence presque globale en résulte par point fixe.

1. Introduction

This Note summarizes the work carried out in [1] and is devoted to the study of long time existence for solutions to a semilinear Klein–Gordon equation

$$\begin{cases} \Box U + U = F(U, \partial_t U, \nabla U), \\ U|_{t=0} = \varepsilon U_0, \\ \partial_t U|_{t=0} = \varepsilon U_1 \end{cases} \tag{2}$$

in Euclidean space, with small Cauchy data, when the nonlinearity is smooth, vanishes at least at order 2 at 0, and U_0 and U_1 are *weakly decaying* at infinity.

The similar problem for Cauchy data with strong decay properties at infinity is already well understood: see Klainerman [7] and Shatah [10] when the space dimension d is larger or equal to 3, Ozawa, Tsutaya and Tsutsumi [9] in dimension 2, and Moriyama, Tonegawa and Tsutsumi [8] and Delort [4] in one dimension. These authors prove that for small smooth and very decaying data at infinity, one obtains a global solution in time as long as the space dimension is larger or equal to 2, and an almost global solution in one dimension, this solution being global when the nonlinearity satisfies a convenient 'null condition'.

In the case of Cauchy data whose decay at infinity is L^2 or Sobolev type, much less results are available. The long time existence problem for a semilinear Klein–Gordon equation with small Cauchy data in $H^s(\mathbb{R}^d)$ was tackled by Delort and Fang [5]. These authors obtained in dimension larger or equal to 2 a result of existence on an interval of length $\mathrm{e}^{c/\varepsilon^\alpha}$ for some $\alpha > 0$, where ε measures the size of the data, thanks, however, to a structure assumption of the nonlinearity.

2. Main theorem and reduction to local existence

Our work concerns nonlinearities $P(u, \partial_t u, \nabla u)$ which are quadratic in $(\partial_t u, \nabla u)$ and *do not have any other special structure*, in spaces of dimension $d \geqslant 4$. The main result is the following:

Theorem 2.1. *Let $d \geqslant 4$ and $N \in \mathbb{N}$, $N > d/2 + 3$. There is a constant $c > 0$ such that for any pair (U_0, U_1) in the unit ball of $H^N(\mathbb{R}^d) \times H^{N-1}(\mathbb{R}^d)$, and any $\varepsilon \in]0, 1[$, problem (2) has a unique solution*

$$U \in \mathcal{C}^0\big(]-T_\varepsilon, T_\varepsilon[, H^N\big) \cap \mathcal{C}^1\big(]-T_\varepsilon, T_\varepsilon[, H^{N-1}\big),$$

with $T_\varepsilon \geqslant c \exp(c\varepsilon^{-2/3})$.

Our initial approach is the same as in [5]: using a scaling idea of Lebeau, we reduce the proof of Theorem 2.1 to a local existence for nonlinear semiclassical Klein–Gordon problem with Cauchy data of limited smoothness. By taking

$$U^h(t,x) = U(t/h, x/h), \quad h > 0 \text{ given by } \varepsilon = \alpha|\log h|^{-3/2} \text{ for some } \alpha > 0, \tag{3}$$

U is solution of the problem (2) if and only if U^h solves

$$\begin{cases} \Box U^h + 1/h^2 U^h = 1/h^2 F(U^h, h\partial_t U^h, h\nabla U^h), \\ U^h|_{t=0} = V^h, \\ \partial_t U^h|_{t=0} = W^h \end{cases} \tag{4}$$

with $V^h(x) = \varepsilon U_0(x/h)$, $W^h(x) = \varepsilon/h U_1(x/h)$. Consequently, we must solve (4) on a time interval independent of the semiclassical parameter h, when V^h and W^h are in spaces coming naturally by the scaling from H^N and H^{N-1}. Let us denote by Δ_0 (resp. Δ_j, $j \in \mathbb{N}^*$) the Fourier multiplier on $L^2(\mathbb{R}^d)$ with symbol $\mathbb{1}_{\{|\xi|<1\}}$ (resp. $\mathbb{1}_{\{2^{j-1}<|\xi|<2^j\}}$).

Definition 2.2. If $s \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, let us denote $H^s_N(\mathbb{R}^d)$ (or $H^s_N(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m)$) the space of families of functions $(u^h)_{h\in]0,1/2[}$ witch are in $L^2(\mathbb{R}^d)$ for fixed h, such that there is a sequence $(c_j(h))_j$ in the unit ball of $l^2(\mathbb{N})$, and $C > 0$, with

$$\|\Delta_j u^h\|_{L^2_x} \leqslant C c_j(h) h^s |\log h|^{-\frac{3}{2}} (1 + 2^j h)^{-N}. \tag{5}$$

The best constant C in (5) defines the norm $\|(u^h)_h\|_{H^s_N}$.

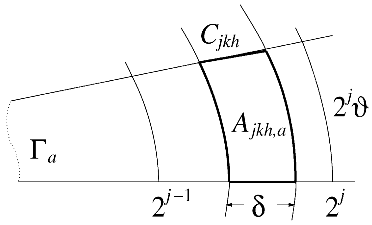

Fig. 1. Microlocalization areas.

The above data $(V^h)_{h\in]0,1/2[}$, $(W^h)_{h\in]0,1/2[}$ are respectively bounded in $H_N^{d/2}$ and $H_{N-1}^{d/2-1}$. Theorem 2.1 is a consequence of the following result:

Theorem 2.3. *Let $d \geqslant 4$ and $N \in \mathbb{N}$, $N > d/2+3$. There exists $\delta > 0$ such that for any families $(V^h)_{h\in]0,1/2[}$ and $(W^h)_{h\in]0,1[}$ of norms smaller than δ, the system* (4) *has a unique solution*

$$(U^h)_h \in \mathcal{C}^0\big(]-1,1[, H_N^{d/2}\big) \cap \mathcal{C}^1\big(]-1,1[, H_{N-1}^{d/2-1}\big).$$

The strategy of proof of Theorem 2.3, inspired by the works of Delort [3] and Delort and Fang [5], rests on a traditional fixed point method on 2-microlocal Sobolev spaces, similar to those used by Bourgain [2] to study the nonlinear Schrödinger equation with periodic Cauchy data and by many other authors in the case of waves equation. The main difficulty in such a problem is to construct function spaces which are on one hand, large enough to contain the solutions, and on the other hand, small enough to have suitable multiplicative properties.

3. 2-microlocal Sobolev spaces

We define convenient spaces through estimates of suitable phase cut-offs of functions. First of all let us note

$$\Delta_{jk}^{\pm} u = \mathcal{F}^{-1}\big(\Phi_{jk}^{\pm}(\tau,\xi)\hat{u}(\tau,\xi)\big), \quad \text{with } \Phi_{jk}^{\pm}(\tau,\xi) = \mathbb{1}_{\{|\xi|\sim 2^j\}}\mathbb{1}_{\{|\tau\mp\sqrt{1/h^2+\xi^2}|\sim 2^k\}}\mathbb{1}_{\{\pm\tau>0\}}. \tag{6}$$

Let $\mathcal{A}(j,k,h)$ a set of points on $\mathbb{S}^{d-1}$ separated one from each other by an angle about ϑ. Let $A_{jkh,a} = \{\xi\colon\ \xi \in \Gamma_a \cap C_{jkh}\}$ where Γ_a is a cone of direction $a \in \mathcal{A}(j,k,h)$ and angle ϑ, C_{jkh} is a subring of width δ of a 2^j-ring, with ϑ, δ given by Table 1 – see Fig. 1. Finally, let us define

$$\Delta_{jkh,a}^{\pm} u = \mathcal{F}^{-1}\big(\mathbb{1}_{A(jkh,a)}(\xi)\Phi_{jk}^{\pm}(\tau,\xi)\hat{u}(\tau,\xi)\big) \tag{7}$$

and take $S_{jk}^h = \sup_{a\in\mathcal{A}(j,k,h)}[\mathrm{Vol}(A_{jkh,a})]^{1/2}$.

Definition 3.1. Let $s, s' \in \mathbb{R}$ be real numbers, $N \in \mathbb{N}$. We denote by $X_N^{s,s'}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ the space of families $(u^h)_{h\in]0,1/2]}$ of L^2-functions on $\mathbb{R}^d$, with values in $\mathbb{R}$ (or in $\mathbb{R}^m$), such there are two sequences $(c_{jk}(h))_{(j,k)\in\mathbb{N}^2}$, $(d_{jk}(h))_{(j,k)\in\mathbb{N}^2}$, satisfying $\sum_j(\sum_k(|c_{jk}(h)|+|d_{jk}(h)|))^2 \leqslant 1$, and a constant $C > 0$ with

$$\|\Delta_{jk}^{\pm} u^h\|_{L_t^2 L_x^2} \leqslant C c_{jk}(h) h^s |\log h|^{-\frac{3}{2}} 2^{-ks'}(1+2^j h+2^k h)^{-N} \tag{8}$$

for any $(j,k) \in \mathbb{N}^2$ and

$$\sup_{a\in\mathcal{A}(j,k,h)} \|\Delta_{jkh,a}^{\pm} u^h\|_{L_t^1 L_x^\infty} \leqslant C d_{jk}(h)[S_{jk}^h 2^{(k-j)_+}] h^s |\log h|^{-\frac{3}{2}} 2^{-k(s'+\frac{1}{2})}(1+2^j h+2^k h)^{-N} \tag{9}$$

for any $(j,k,h) \in \mathbb{N}^2\times]0,1/2]$. The best constant C defines the norm of $(u^h)_h$ in $X_N^{s,s'}$.

Let us mention that we must use regular cut-offs rather than characteristic functions in (6) and (7).

4. Strategy of proof of the main result

One wants to solve (4), over an interval of time independent of h with Cauchy data satisfying the assumptions of theorem 2.3, using a fixed point scheme in space $X_N^{d/2,1/2}$. It is sufficient to prove the following two implications:

$$\begin{aligned}&\bullet\quad U\in X_N^{d/2,1/2}\Rightarrow 1/h^2F(U,h\partial_tU,h\nabla U)\in X_{N-1}^{d/2-1,-1/2},\\ &\bullet\quad \left.\begin{array}{l}\Box U+1/h^2U\in X_{N-1}^{d/2-1,-1/2}\\ U|_{t=0}\in H_N^{d/2},\ \partial_tU|_{t=0}\in H_{N-1}^{d/2-1}\end{array}\right\}\Rightarrow \chi_0(t)U\in X_N^{d/2,1/2},\quad \text{with } \chi_0\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}).\end{aligned}\tag{10}$$

The second one is relatively easy. The first one may be reduced essentially to the following proposition:

Proposition 4.1. *Let $d\geqslant 4$ and $N\in\mathbb{N}$ with $N>d/2+3$. The map $(u,v)\mapsto u\cdot v$ is continuous on $X_{N-1}^{d/2-1,1/2}\times X_{N-1}^{d/2-1,1/2}$ with values in $X_{N-1}^{d/2-1,-1/2}$.*

The proof of the proposition is made decomposing $u=\sum_{j,k,\pm}\Delta_{jk}^{\pm}u$, $v=\sum_{j',k',\pm}\Delta_{j'k'}^{\pm}v$ and estimating

$$\big\|\Delta_{j''k''}^{e''}(\Delta_{jk}^{e}u\cdot\Delta_{j'k'}^{e'}v)\big\|_{L_t^2L_x^2},\qquad \sup_{a\in\mathcal{A}(j'',k'',h)}\big\|\Delta_{j''k''h,a}^{e''}(\Delta_{jk}^{e}u\cdot\Delta_{j'k'}^{e'}v)\big\|_{L_t^1L_x^\infty}\tag{11}$$

$(e,e',e''\in\{+,-\})$, so that the j,k,j',k' sum satisfies (8), (9) with $s=\frac{d}{2}-1$, $s'=-\frac{1}{2}$, and N replaced by $N-1$. Quantities (11) have to be estimated loosing as much as possible powers of 2^k (or $2^{k'}$, $2^{k''}$) and saving powers of 2^j (or $2^{j'}$, $2^{j''}$). A typical inequality that has to be established is for instance

$$\begin{aligned}&\sup_{a\in\mathcal{A}(j'',k'',h)}\big\|\Delta_{j''k''h,a}^{e''}(\Delta_{jk}^{e}u\cdot\Delta_{j'k'}^{e'}v)\big\|_{L_t^1L_x^\infty}\\ &\quad\leqslant C2^{-(j''-k'')_+\frac{d-3}{4}}2^{(j+j')\frac{d-1}{2}+\frac{k}{2}+\frac{k'}{2}}\left(1+\frac{1}{2^jh}\right)^{\frac12}\left(1+\frac{1}{2^{j'}h}\right)^{\frac12}\|\Delta_{jk}^{e}u\|_{L_t^2L_x^2}\|\Delta_{j'k'}^{e'}v\|_{L_t^2L_x^2},\end{aligned}\tag{12}$$

valid when indices j,j' are not close one to each other and $\max\{k,k',k''\}$ is essentially k''. Remark that an estimate using Sobolev injections relatively to the x variable would give a loss of a power $2^{j\frac{d}{2}+j'\frac{d}{2}}$, instead of the much better upper bound we give above. One of the key ingredients of the proof of (12) is a refined Strichartz estimate for functions localized in cones,

$$\|\Psi_\vartheta\Delta_{jk}^{e}u\|_{L_t^2L_x^\infty}\lesssim 2^{j\frac{d-1}{2}+\frac{k}{2}}\left(1+\frac{1}{2^jh}\right)^{\frac12}\vartheta^{\frac{d-3}{2}}\|\Delta_{jk}^{e}u\|_{L_t^2L_x^2},\tag{13}$$

where the symbol of Ψ_ϑ is a cut-off function in a cone of ϑ angle. Such an inequality is proved through a detailed analysis of parameters dependent Fourier integrals of type

$$I_{\epsilon,l,\vartheta}^{\sigma}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{C},\quad I_{\epsilon,l,\vartheta}^{\sigma}(t,x)=\int \mathrm{e}^{it[\sqrt{\sigma^2+\xi^2}+x\xi]}\phi\big(|\xi|\big)\omega\big(|\xi|/\epsilon-l\big)\theta_\vartheta\big(\xi/|\xi|\big)\,d\xi\tag{14}$$

with $\phi,\omega\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ and $\theta_\vartheta\in\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{S}^{d-1})$ supported in a ball of $\mathbb{S}^{d-1}$ of radius $C\vartheta$. The study of these integrals allows also one to prove that the spectral projectors (7) are bounded operators on Lebesgue spaces, uniformly with respect to parameters, which follows from the following result:

Proposition 4.2. *Let $d\geqslant 2$. There is a constant $C>0$ such as the kernels $K_{jkh,a}^{\pm}$ of the spectral projectors (7) verify*

$$\|K_{jkh,a}^{\pm}\|_{L_t^1L_x^1}\leqslant C,$$

uniformly in $(j,k,h)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times]0,1/2]$ and $a\in\mathcal{A}(j,k,h)$.

Table 1
Additional phase cut-offs

Case		**Definition**		ϑ	δ
I	1°	$k+M \leqslant j$	$1 \ll 2^j h,\ 1 \lesssim 2^{\frac{j+k}{2}} h$	$2^{\frac{k-j}{2}}$	2^j
	2°		$1 \ll 2^j h,\ 2^{\frac{j+k}{2}} h \ll 1$	$2^{\frac{k-j}{2}}$	$2^j (2^{\frac{j+k}{2}} h)$
	3°		$2^j h \lesssim 1,\ \frac{2^k h}{(2^j h)^2} \ll 1$	$\sqrt{\frac{2^k h}{(2^j h)^2}}$	$2^j \sqrt{\frac{2^k h}{(2^j h)^2}}$
	4°		$2^j h \lesssim 1,\ 1 \lesssim \frac{2^k h}{(2^j h)^2}$	1	2^j
II		$k+M \geqslant j$		1	2^j

References

[1] A.-L. Benoaga, Problèmes d'existence en temps grand pour des équations de Klein–Gordon non linéaires, PhD Thesis, Paris 13 University, 2006.

[2] J. Bourgain, Fourier transforms restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations, I, II, Geom. Funct. Anal. 3 (1993) 107–156, 202–262.

[3] J.-M. Delort, Sur le temps d'existence pour l'équation de Klein–Gordon semi-linéaire en dimension 1, Bull. Soc. Math. France 125 (1997) 269–311.

[4] J.-M. Delort, Existence globale et comportement asymptotique pour l'équation de Klein–Gordon quasi linéaire à données petites en dimension 1, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 34 (1) (2001) 1–61. Erratum, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 39 (2) (2006) 335–345.

[5] J.-M. Delort, D. Fang, Almost global existence for solutions of semilinear Klein–Gordon equations with small weakly decaying Cauchy data, Comm. Partial Differential Equations 25 (11&12) (2000) 2119–2169.

[6] J. Ginibre, G. Velo, Generalized Strichartz inequalities for the wave equations, J. Funct. Anal. 133 (1995) 50–68.

[7] S. Klainerman, Global existence of small amplitude solitons to nonlinear Klein–Gordon equations in four space–time dimensions, Comm. Pure Appl. Math. 38 (5) (1985) 631–641.

[8] K. Moriyama, S. Tonegawa, Satoshi, Y. Tsutsumi, Almost global existence of solutions for the quadratic semilinear Klein–Gordon equation in one space dimension, Funkcial. Ekvac. 40 (2) (1997) 313–333.

[9] T. Ozawa, K. Tsutaya, Y. Tsutsumi, Global existence and asymptotic behavior of solutions for the Klein–Gordon with quadratic nonlinearity in two space dimensions, Math. Z. 222 (3) (1996) 341–362.

[10] J. Shatah, Normal forms and quadratic nonlinear Klein–Gordon equations, Comm. Pure Appl. Math. 38 (1985) 685–696.

[11] D. Tataru, On the equation $\Box u = |\nabla u|^2$ in $5+1$ dimensions, Math. Res. Lett. 6 (5–6) (1999) 469–485.