Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007) 629–632
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations aux dérivées partielles

Existence de solutions renormalisées pour un problème de Stefan non linéaire

Karima Sbihi [a], Petra Wittbold [b]

[a] *Université de Franche-Comté, Laboratoire de mathématiques, 16, route de Gray, 25030 Besançon cedex, France*
[b] *Technische Universität Berlin, Institut für Mathematik, Straβe des 17. Juni 136, 10623 Berlin, Allemagne*

Reçu le 20 février 2007 ; accepté après révision le 22 octobre 2007

Présenté par Haïm Brezis

Résumé

On étudie le problème de Stefan $\beta(u)_t - \operatorname{div} a(u, Du) \ni f$, où β est un graphe maximal monotone quelconque dans $\mathbb{R}^2$. L'existence des solutions renormalisées est établie pour des données intégrables sans aucune hypothèse supplémentaire sur le graphe β. ***Pour citer cet article : K. Sbihi, P. Wittbold, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Abstract

Existence of renormalized solutions for a nonlinear Stefan problem. We consider the Stefan problem $\beta(u)_t - \operatorname{div}\, a(u, Du) \ni f$ on a bounded domain, where β is an arbitrary maximal monotone graph in $\mathbb{R}^2$. Existence of renormalized solutions is established for general L^1-data without any additional condition on the graph β. ***To cite this article: K. Sbihi, P. Wittbold, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

1. Introduction

Dans cette Note, on se propose de donner un résultat d'existence de solutions renormalisées du problème de Stefan suivant :

$$(S)(b_0, f) \qquad \begin{cases} \beta(u)_t - \operatorname{div} a(u, Du) \ni f & \text{sur } Q := \Omega \times (0, T), \\ \beta(u)(t = 0) \ni b_0 & \text{sur } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma := \partial\Omega \times (0, T) \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N (N \geqslant 1)$, $T > 0$, β est un graphe maximal monotone quelconque dans $\mathbb{R}^2$ contenant $(0, 0)$, $f \in L^1(Q)$, $b_0 \in L^1(\Omega)$ tel que $b_0 \in R(\beta)$ p.p. sur Ω et $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est un champ vérifiant les hypothèses suivantes du type Leray–Lions :

Adresses e-mail : karima.sbihi@univ-fcomte.fr (K. Sbihi), wittbold@math.tu-berlin.de (P. Wittbold).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2007.10.042

(H$_1$) – monotonie en $\xi \in \mathbb{R}^N$:

$$\big(a(r,\xi) - a(r,\eta)\big) \cdot (\xi - \eta) \geqslant 0 \quad \forall r \in \mathbb{R},\ \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^N;$$

(H$_2$) – coercivité : $\exists \lambda > 0$, $p > 1$ tels que

$$\big(a(r,\xi) - a(r,0)\big) \cdot \xi \geqslant \lambda |\xi|^p \quad \forall r \in \mathbb{R},\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N;$$

(H$_3$) – condition de croissance : $\exists \Lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue, croissante telle que

$$\big|a(r,\xi)\big| \leqslant \Lambda\big(|r|\big)\big(1 + |\xi|^{p-1}\big) \quad \forall r \in \mathbb{R},\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N;$$

(H$_4$) – $\exists C : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\big|a(r,\xi) - a(s,\xi)\big| \leqslant C(r,s)|r-s|\big(1 + |\xi|^{p-1}\big) \quad \forall r, s \in \mathbb{R},\ \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Les problèmes dégénérés du type (S) interviennent notamment dans la modélisation des écoulements de fluides à travers un milieu poreux. Nombreux travaux ont été dédiés aux questions d'existence et d'unicité des solutions faibles ou renormalisées pour ce type de problème. L'existence de solutions faibles est établie sous certaines conditions sur l'opérateur a ou sur le graphe β dans [1,5,12]. Pour des données intégrables, la notion de solution renormalisée ou entropique a été introduite par plusieurs auteurs, citons en particulier les travaux de [2–4,6–8,11]. L'existence de solutions dans L^1 pour le problème $(S)(b_0, f)$, dans le cas où β est une fonction continue et croissante, a été établie dans [2]. Lorsque $a(u, Du)$ est remplacé par $a(x, Du) - \phi(u)$, avec ϕ Lipschitz, ce problème a été étudié par Blanchard et Porretta [6]. Ils montrent l'unicité de la solution renormalisée pour un graphe monotone quelconque et l'existence pour un graphe dont le graphe réciproque est une fonction continue. La principale nouveauté du travail que nous présentons ici vient du fait que, contrairement à [6], nous n'imposons aucune condition sur le graphe β pour montrer l'existence de solutions renormalisées. Nous combinerons pour cela les techniques de [6] et l'approche développée dans [2].

2. Définition et résultats

On désigne par β^0 la section minimale du graphe β. Pour $l > 0$, on note T_l la troncature au niveau l : $T_l(r) = \min(l, \max(r, -l))$.

Définition 2.1. Une fonction mesurable $u : Q \to \mathbb{R}$ est dite solution renormalisée du problème $(S)(b_0, f)$ si $T_l(u) \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$ pour tout $l > 0$ et s'il existe $b \in L^1(Q)$ telle que $b \in \beta(u)$ p.p. dans Q, vérifiant

$$-\int_Q \varphi_t \int_0^b (S' \circ \beta^{-1})^0(r)\, dr\, dx\, dt - \int_\Omega \varphi(0) \int_0^{b_0} (S' \circ \beta^{-1})^0(r)\, dr\, dx$$
$$+ \int_Q a(u, Du) \cdot D\varphi S'(u)\, dx\, dt + \int_Q a(u, Du) \cdot Du S''(u)\varphi\, dx\, dt = \int_Q f S'(u)\varphi\, dx\, dt$$

pour tout $S \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ avec S' à support compact, et tout $\varphi \in C_c^\infty([0,T) \times \overline{\Omega})$ telle que $S'(u)\varphi \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$, et, si de plus,

$$\lim_{l \to \infty} \int_{\{l \leqslant |u| \leqslant 2l\}} \big(a(u, Du) - a(u, 0)\big) \cdot Du = 0. \tag{1}$$

Théorème 2.2. *Soient $f \in L^1(Q)$ et $b_0 \in L^1(\Omega)$. Alors le problème $(S)(b_0, f)$ admet une solution renormalisée.*

Notons que l'unicité de $b \in \beta(u)$, où u est une solution renormalisée de $(S)(b_0, f)$, peut être prouvée de la même manière que [6, Theorem 4.1] sans aucune hypothèse supplémentaire sur le graphe β.

Théorème 2.3. *Pour $i=1,2$ soient $f_i \in L^1(Q), b_{0i} \in L^1(\Omega)$. Soit u_i une solution renormalisée du problème $(S)(b_{0i}, f_i)$. Alors*

$$\int_\Omega \bigl(b_1(t)-b_2(t)\bigr)^+ \leqslant \int_Q (f_1-f_2)^+ + \int_\Omega (b_{01}-b_{02})^+ \quad \textit{pour presque tout } t.$$

3. Preuve du résultat d'existence

L'approche adoptée pour la preuve d'existence de solutions renormalisées s'appuie sur une méthode d'approximation en deux étapes. Pour une présentation plus complète se reporter à [11].

Étape 1 : On commence d'abord par approcher et perturber le problème $(S)(b_0, f)$ par le problème

$$(S_k)(b_0^k, f, \psi) \quad \begin{cases} \beta_k(u)_t - \operatorname{div} a(u, Du) + \psi(u) = f & \text{sur } Q, \\ \beta_k(u)(t=0) \ni b_0^k \quad \text{sur } \Omega, u = 0 & \text{sur } \Sigma, \end{cases}$$

où $\psi(r) = \psi_{m,n}(r) = \frac{1}{m}r^+ + \frac{1}{n}r^-, m, n \in \mathbb{N}^*, r \in \mathbb{R}$, $\beta_k(r) = \beta(r) + \frac{1}{k}r, k \in \mathbb{N}^*$, $f \in L^\infty(Q)$ et $b_0^k = b_0 + \frac{1}{k}u_0$ avec $b_0, u_0 \in L^\infty(\Omega)$ et tel que $b_0 \in \beta(u_0)$ p.p. sur Ω.

La perturbation ψ nous permettera de récupérer la convergence de la suite de solutions sans imposer aucune condition supplémentaire sur le graphe β, contrairement à [6] où l'on impose la continuité de β^{-1}. En s'appuyant sur la théorie générale des semigroupes non linéaires, on montre l'existence d'une solution faible u^k (i.e. au sens des distributions) du problème $(S_k)(b_0^k, f, \psi)$. La première partie de la preuve consiste donc à passer à la limite avec $k \to \infty$ et à montrer que ces solutions faibles u^k convergent lorsque $k \to \infty$ vers les solutions faibles du problème

$$(S)(b_0, f, \psi) \begin{cases} \beta(u)_t - \operatorname{div} a(u, Du) + \psi(u) \ni f & \text{sur } Q, \\ \beta(u)(t=0) \ni b_0 \quad \text{sur } \Omega, \quad u = 0 & \text{sur } \Sigma. \end{cases}$$

Ce passage à la limite est en partie assuré par la perturbation ψ, qui nous permet de récupérer la convergence presque partout de la suite de solutions $(u^k)_k$. En effet, par un choix de fonctions test convenable on établit dans un premier temps que la suite $(u^k)_k$ est uniformément bornée dans $L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$, et grâce à la fonction ψ, elle l'est aussi dans $L^\infty(Q)$. Quant à la convergence presque partout de la suite de solutions $(u^k)_k$, elle est prouvée en se basant sur la méthode de dédoublement de variables de Kruzhkov [9]. En effet, considérons $u^k(t,x), u^l(s,x)$, $t, s \in [0,T], k, l \in \mathbb{N}^*$, les solutions de $(S_k)(b_0^k, f, \psi), (S_l)(b_0^l, f, \psi)$ resp., et appliquons les techniques de [6, Theorem 4.1]. Soit la fonction test $\varphi = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \eta_\delta(u^k - u^l + \delta\zeta)\xi$, où $\xi \in C_c^\infty([0,T)^2 \times \overline{\Omega}), \xi \geqslant 0, \zeta \in C_c^\infty(\Omega), 0 \leqslant \zeta \leqslant 1$ et $\eta_\delta(r) = \frac{T_\delta(r)}{\delta}$. On décompose $b_k = b_{k,1} + \frac{1}{k}u^k, b_{k,1} \in \beta(u^k)$. On fait une décomposition analogue pour u^l. En additionnant les deux inégalités résultantes et en passant à la limite avec $h, \delta \to 0$ en suivant les étapes de [11, Proposition 4.2.2] on déduit

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T\!\!\int_Q \xi_t\bigl(|b_{k,1} - b_{l,1}| - |b_{k,1}^0 - b_{l,1}|\bigr) - \int_0^T\!\!\int_Q \xi_s\bigl(|b_{l,1} - b_{k,1}| - |b_{l,1}^0 - b_{k,1}|\bigr) \\
&\quad - \int_0^T\!\!\int_Q \frac{1}{l}\xi_t\bigl(|u^k - u^l| - |u_0^k - u^l|\bigr) - \int_0^T\!\!\int_Q \frac{1}{k}\xi_s\bigl(|u^k - u^l| - |u_0^l - u^k|\bigr) \\
&\quad + \int_0^T\!\!\int_Q (\chi_{\{u^k > u^l\}} - \chi_{\{u^k < u^l\}})\bigl(a(u^k, Du^k) - a(u^l, Du^l)\bigr) \cdot D\xi \\
&\quad + \int_0^T\!\!\int_Q (\chi_{\{u^k > u^l\}} - \chi_{\{u^k < u^l\}})\bigl(\psi(u^k) - \psi(u^l)\bigr)\xi \\
&\leqslant \int_0^T\!\!\int_Q (\chi_{\{u^k > u^l\}} - \chi_{\{u^k < u^l\}} + \chi_{\{u^k = u^l\}})\bigl(f(t,x) - f(s,x)\bigr)\xi.
\end{aligned}$$

Considérons $\xi = \varphi(t)\rho_p(t-s)$ avec $\varphi \in C_c^\infty([0,T[), \varphi \geqslant 0$ et $(\rho_p)_p$ une suite régularisante. Comme $b_{k,1}, b_{l,1} \to b$ dans $C([0,T];L^1(\Omega))$ par la théorie des semigroupes non linéaires, et $(u^k)_k$ est bornée dans $L^\infty(Q)$,

$$\lim_{p\to\infty}\lim_{k,l\to\infty}\int\limits_{Q\times[0,T]} \varphi\rho_p\big(\big|\psi\big(u^k(t,x)\big)-\psi\big(u^l(s,x)\big)\big|\big)\leqslant 0.$$

Comme ψ est fortement monotone on déduit que $u_k \to u$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}(Q)$ lorsque $k\to\infty$. D'autre part, grâce à l'hypothèse (H^3), $(a(u^k, Du^k))_k$ est borné dans $(L^{p'}(Q))^N$, donc quitte à extraire une sous-suite si nécessaire, converge lorsque $k\to\infty$ faiblement vers χ et par l'argument de pseudo-monotonie, on montre que $\operatorname{div} a(u,Du) = \operatorname{div}\chi$. Au final, on peut passer à la limite dans le problème $(S_k)(b_0^k, f, \psi)$ et par suite on a existence d'une solution faible u du problème $(S)(b_0, f, \psi)$ pour toutes b_0 et f bornées.

Étape 2 : La méthode employée pour montrer l'existence de solutions renormalisées pour des données intégrables consiste à approcher les fonctions f et b_0 par les suites $f_{m,n} = (f\wedge m)\vee(-n)$ et $b^0_{m,n} = (b_0\wedge m)\wedge\beta^0(m)\vee(-n)\vee\beta^0(-n)$, d'où résulte une solution $u_{m,n}$ du problème $(S)(b^0_{m,n}, f_{m,n}, \psi_{m,n})$, puis à passer à la limite avec $m,n\to\infty$.

Par des choix de fonctions test on montre que $T_l(u_{m,n}) \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ pour tout $l>0$ et que (1) est vérifiée. On montre ensuite (cf. [11, Lemme 4.3.1]) le résultat de comparaison suivant : $\forall m,n\in\mathbb{N}^*$ $u_{m,n}\leqslant u_{m+1,n}$ et $u_{m,n+1}\leqslant u_{m,n}$ p.p. sur Q, qui assure que $u_{m,n}\uparrow_m u_n \downarrow_n u$ p.p. sur Q, où $u_n, u: Q\to\overline{\mathbb{R}}$ sont des fonctions mesurables, et comme dans [2] on montre que u_n, u sont finies p.p. sur Q.

Reste à établir que $\operatorname{div} a(T_l(u), DT_l(u)) = \operatorname{div}\chi_l$, où χ_l est la limite faible, lorsque $m,n\to\infty$, de $a(T_l(u_{m,n}), DT_l(u_{m,n}))$ dans $(L^{p'}(Q))^N$. Pour ce faire, soit la fonction test $\sigma h(u_{m,n})(T_l(u_{m,n}) - (T_l(u))_\lambda)$, où $(T_l(u))_\lambda$ est la régularisée de Landes (cf. [10]), $\sigma\in\mathcal{D}_+(0,T)$, $h\in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ positive et à support compact. On montre que

$$\limsup_{\lambda\to\infty}\limsup_{m,n\to\infty}\int\limits_Q \sigma a(u_{m,n}, Du_{m,n})\cdot D\big(T_l(u_{m,n}) - \big(T_l(u)\big)_\lambda\big)\leqslant 0,$$

et par l'argument de pseudo-monotonie on déduit que $\operatorname{div} a(T_l(u), DT_l(u)) = \operatorname{div}\chi_l$.

En choisissant la fonction test $S'(u_{m,n})\varphi$ et à l'aide des estimations établies, pour une certaine sous-suite bien choisie, on peut passer à la limite dans $(S)(b^0_{m,n}, f_{m,n}, \psi_{m,n})$ lorsque $m,n\to\infty$, et on obtient ainsi la formulation renormalisée désirée.

Références

[1] H.W. Alt, S. Luckhaus, Quasilinear elliptic-parabolic differential equations, Math. Z. 183 (1983) 311–341.

[2] K. Ammar, P. Wittbold, Existence of renormalized solutions of degenerate elliptic-parabolic problems, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 133 (2003) 477–496.

[3] F. Andreu, N. Igbida, J.M. Mazon, J. Toledo, A degenerate elliptic-parabolic problem with nonlinear dynamical boundary conditions, Ann. Inst. H. Poincaré Analyse Non Linéaire 24 (2007) 61–89.

[4] F. Andreu, N. Igbida, J.M. Mazon, J. Toledo, Renormalized solutions for degenerate elliptic-parabolic problems with nonlinear dynamical boundary conditions and L^1-data, preprint.

[5] D. Blanchard, G. Francfort, A few results on a class of degenerate parabolic equations, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 18 (1991) 213–249.

[6] D. Blanchard, A. Porretta, Stefan problems with nonlinear diffusion and convection, J. Differential Equations 210 (2005) 383–428.

[7] N. Igbida, J.M. Urbano, Uniqueness for nonlinear degenerate problems, NoDEA 10 (2003) 287–307.

[8] N. Igbida, P. Wittbold, Renormalized solution for Stefan type problems: Existence and uniqueness, preprint.

[9] S.N. Kruzhkov, First order quasilinear equations with several independent variables, Mat. Sb. 81 (123) (1970) 228–255.

[10] R. Landes, On the existence of weak solutions for quasi-linear parabolic initial boundary-value problems, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 89 (1981) 217–237.

[11] K. Sbihi, Etude de quelques E.D.P. non linéaires dans L^1 avec des conditions générales sur le bord, Thèse de doctorat, Strasbourg, 2006.

[12] X. Xu, Existence and convergence theorems for doubly nonlinear partial differential equations of elliptic-parabolic type, J. Math. Anal. Appl. 150 (1990) 205–223.