

Géométrie algébrique

Courbes hyperelliptiques de genre trois et application de Kodaira–Spencer

François Foucault ^a, Philippe Toffin ^b

^a *Département de mathématiques, Faculté des sciences, 23, rue du Dr Paul-Michelon, 42023 St-Étienne cedex, France*

^b *Département de mathématiques, Laboratoire Nicolas-Oresme, Université de Caen, campus II, BP 5186, 14032 Caen cedex, France*

Reçu le 2 mars 2007 ; accepté après révision le 16 octobre 2007

Disponible sur Internet le 26 novembre 2007

Présenté par Christophe Soulé

Résumé

On construit explicitement l'application de Kodaira–Spencer pour les familles à un paramètre de courbes hyperelliptiques de genre trois munies d'un point de Weierstrass rationnel. *Pour citer cet article : F. Foucault, P. Toffin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).*

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Hyperelliptic curves of genus three and the Kodaira–Spencer map. We construct explicitly the Kodaira–Spencer mapping for one parameter families of hyperelliptic curves of genus three with a rational Weierstrass point. *To cite this article: F. Foucault, P. Toffin, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).*

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction

Soit k_0 un corps de caractéristique zéro et soit $k = k_0(t)$. Soit X/k une courbe irréductible, lisse et projective, de genre $g \geq 1$, et soit $\Omega_{k(X)/k}^1$ le $k(X)$ -espace vectoriel des 1-différentielles sur X . On note $k(X) \xrightarrow{d} \Omega_{k(X)/k}^1$ la k -dérivation canonique. Soit $D_2(X/k) \subset \Omega_{k(X)/k}^2$ le k -espace vectoriel des différentielles de deuxième espèce sur X (i.e. des différentielles ayant un résidu nul en chaque point de X). On a $d(k(X)) \subset D_2(X/k)$; on pose $H_{DR}^1(X/k) = D_2(X/k)/d(k(X))$. Alors, si $D_1(X/k)$ désigne le sous- k -espace vectoriel de $D_2(X/k)$ des différentielles de première espèce sur X (i.e. des différentielles n'ayant pas de pôle sur X), on a une injection canonique $D_1(X/k) \hookrightarrow H_{DR}^1(X/k)$, et $\dim_k(H_{DR}^1(X/k)) = 2g$, $\dim_k(D_1(X/k)) = g$ (cf. [1], p. 130, cor. 1., or [7], p. 521, th. 1). Soit maintenant $\partial \in \text{Der}_{k_0}(k)$. Une construction classique (Manin, 1963; cf. [6], pp. 195–198) permet d'étendre ∂ en une connexion ∂_X sur $H_{DR}^1(X/k)$ ne dépendant que ∂ et de X , appelée connexion de Gauss–Manin. Désignons par $[\alpha]$ la classe modulo $d(k(X))$ d'une différentielle $\alpha \in D_2(X/k)$. Soit $([\omega_i], [\eta_i])_{1 \leq i \leq g}$ une k -base de $H_{DR}^1(X/k)$ où $\omega_i \in D_1(X/k)$ et $\eta_i \in D_2(X/k) \setminus D_1(X/k)$.

Adresses e-mail : francois.foucault@univ-st-etienne.fr, foucault@univ-st-etienne.fr (F. Foucault), toffin@math.unicaen.fr (P. Toffin).

Dans cette base, ∂_X est représentée par la matrice $2g \times 2g$, à coefficients dans k :

$$\begin{pmatrix} (A_{ij})(B_{ij}) \\ (C_{ij})(D_{ij}) \end{pmatrix}_{1 \leq i, j \leq g}.$$

D’après Katz (cf. [3], p. 15, 1.4.1.7.), l’application de Kodaira–Spencer associée à X/k peut être interprétée comme l’application k -linéaire :

$$\rho_{X/k} : \text{Der}_{k_0}(k) \rightarrow \text{Hom}_k(D_1(X/k), H_{DR}^1(X/k)/D_1(X/k))$$

telle que la matrice de $\rho_{X/k}(\partial)$ dans les bases $([\omega_i])_{1 \leq i \leq g}$ et $([\eta_i] \pmod{D_1(X/k)})_{1 \leq i \leq g}$ de $D_1(X/k)$ et $H_{DR}^1(X/k)/D_1(X/k)$ respectivement, soit donnée par la matrice $(B_{ij})_{1 \leq i, j \leq g}$. Pour abrégé, on dira que (B_{ij}) est la matrice de Kodaira–Spencer dans les bases $([\omega_i])$ et $([\eta_i] \pmod{D_1(X/k)})$.

2. Supposons maintenant que X/k soit une courbe hyperelliptique de genre $g = 3$ munie d’un point de Weierstrass k -rationnel. Alors X admet un modèle affine de la forme :

$$y^2 = x^7 + a_2x^5 + a_3x^4 + a_4x^3 + a_5x^2 + a_6x + a_7 = P_7(x) \quad (a_i \in k; i = 2, \dots, 7),$$

où $\Delta = \text{discr}(P_7(x)) \neq 0$. Nous donnons la forme explicite de la matrice $(B_{i,j})_{1 \leq i, j \leq 3}$ en fonction des a_i et de leurs images ∂a_i . Ecrivons $k(X) = k(x, y)$ où x est transcendant sur k et y algébrique sur $k(x)$, de polynôme minimal $Y^2 - P_7(x)$, et posons $\omega_i = x^{i-1} \frac{dx}{y}$, $\eta_i = x^{i+2} \frac{dx}{y}$ ($i = 1, 2, 3$). Il est bien connu que $(\omega_i)_{i=1,2,3}$ est une k -base de $D_1(X/k)$. De manière analogue à [2], munissons les a_i des poids $w(a_i) = 2i$ ($i = 2, \dots, 7$), et x, y, ω_1, ∂ et ∂_X des poids respectifs 2, 7, -5 , 2 et 2.

Théorème.

- (1) $([\omega_i], [\eta_i])_{i=1,2,3}$ est une k -base de $H_{DR}^1(X/k)$.
- (2) Les éléments B_{ij} de la matrice de Kodaira–Spencer dans les bases

$$([\omega_i]) \text{ et } ([\eta_i] \pmod{D_1(X/k)})$$

sont des combinaisons linéaires explicites des ∂a_i ($i = 2, \dots, 7$) à coefficients isobares dans l’anneau (gradué par les poids) $\mathbb{Z}[a_2, \dots, a_7][\Delta^{-1}, 2^{-1}]$.

2.1. Démonstration de (2)

On a :

$$\partial_X[\omega_i] = \sum_{1 \leq j \leq 3} A_{ij}[\omega_j] + \sum_{1 \leq j \leq 3} B_{ij}[\eta_j] \quad (i = 1, 2, 3).$$

Ceci équivaut à :

$$(S) \quad (\exists f_i)(f_i \in k(X)) : \partial_x(\omega_i) = \sum_{1 \leq j \leq 3} A_{ij}\omega_j + \sum_{1 \leq j \leq 3} B_{ij}\eta_j + d(f_i) \quad (i = 1, 2, 3)$$

(où ∂_x est la k_0 -dérivation de $\Omega_{k(X)/k}^1$ dans $\Omega_{k(X)/k}^1$ déduite de ∂ en posant $\partial_x(x) = 0$ et vérifiant $\partial_x(f\omega) = (\partial_x f)\omega + f\partial_x\omega$ ($f \in k(X)$, $\omega \in \Omega_{k(X)/k}^1$) (notations de Manin ; loc.cit.). En utilisant un modèle non-singulier explicite de X (cf. Liu [5], p. 294, 4.24.), on peut calculer les diviseurs de fonctions ou de différentielles sur X . Notons $(f)_0$ le diviseur des zéros de $f \in k(X)^\times$. Comme $\Omega_{k(X)/k}^1$ admet ω_1 comme $k(X)$ -base, on voit que $f_i \in L((y)_0 + 5[P_0])$ où P_0 est le point de X au-dessus du point à l’infini de $y^2 = P_7(x)$. L’action de l’involution hyperelliptique σ de X permet alors de voir que les $d f_i$ sont des combinaisons k -linéaires des différentielles :

$$d\left(\frac{x^\ell}{y}\right) \quad (\ell = 0, 1, \dots, 6) \text{ (différentielles « impaires pour } \sigma \text{ »)}.$$

D’autre part un calcul direct montre que $\partial_x\omega_i$ est combinaison k -linéaire des ω_j et des différentielles de deuxième espèce $\theta_r = \frac{x^r}{y^2}\omega_1$ ($r = 0, 1, \dots, 6$).

Enfin les différentielles $d(\frac{x^\ell}{y})$ ($\ell = 0, 1, \dots, 6$) s'expriment en fonction des ω_i , des η_i et des θ_r . Ces expressions fournissent un système d'équations k -linéaires d'inconnues les θ_r , dont le déterminant est Δ . Les θ_r s'expriment donc comme des combinaisons k -linéaires des ω_i , η_i et $d(\frac{x^\ell}{y})$, et le report de leurs expressions dans (S) donnent les B_{ij} (et bien sûr les f_i et les A_{ij}), et on constate que B_{ij} est dans le $\mathbb{Z}[a_0, \dots, a_7][\Delta^{-1}, 2^{-1}]$ -module libre de base $(\partial a_2, \dots, \partial a_7)$ et que les coefficients de B_{ij} dans cette base sont isobares (la division par 2 provient de la relation $-2\partial_x \omega_1 = \frac{\partial_x P_7}{y^2} \omega_1$). \square

Le résultat précédent étend au cas des courbes hyperelliptiques de genre trois celui des courbes de genre deux (cf. [2]).

Sur quelques exemples, on vérifie le résultat bien connu suivant : si X/k est isotriviale, alors la matrice de Kodaira–Spencer est nulle (voir remarque 1 infra).

Donnons enfin la matrice de Kodaira–Spencer dans le cas : $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$. Elle peut s'écrire :

$$(B_{ij}) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} -2^2 3^2 7^3 a_6^2 a_7^2 \kappa & +2^3 3^4 7^2 a_6^3 a_7 \kappa & -2^4 3^4 5 7 a_6^4 \kappa \\ +2 3 7^4 a_6 a_7^3 \kappa & -2^2 3^3 7^3 a_6^2 a_7^2 \kappa & +2^3 3^3 5 7^2 a_6^3 a_7 \kappa \\ -2 3 7^5 a_7^4 \kappa & +2 3^2 7^4 a_6 a_7^3 \kappa & -2^2 3^2 5 7^3 a_6^2 a_7^2 \kappa \end{pmatrix}$$

où on a posé : $\kappa = 7a_7 \partial a_6 - 6a_6 \partial a_7$.

Remarque 1. $(B_{ij}) = 0 \Leftrightarrow \kappa = 0 \Leftrightarrow (\exists \lambda)(\lambda \in k_0^\times) (a_6^7 = \lambda a_7^6) \Leftrightarrow X$ est isomorphe sur $k_0(\lambda^{1/7}, a_7^{1/7})$ à la courbe d'équation $v^2 = u^7 + \lambda^{1/7} u + 1$, i.e. X/k est isotriviale.

Remarque 2. On observe que $3B_{2,1} = B_{3,2}$, $5B_{1,2} = 3B_{2,3}$, $3B_{3,3} = 5B_{22}$, $B_{22} = 3B_{11}$, ce qui suggère qu'après un changement de base adéquat, la matrice de Kodaira–Spencer devient symétrique.

Remarque 3. A. Lauder (cf. [4], p. 251) décrit un algorithme pour la connexion de Gauss–Manin dans le cas d'une famille de courbes hyperelliptiques.

Références

[1] C. Chevalley, Introduction to the Theory of Algebraic Functions of One Variable, Math. Surveys, vol. VI, 1951.
 [2] F. Foucault, Equations de Picard–Fuchs et courbes de genre deux, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 314 (1992) 617–619.
 [3] N. Katz, Algebraic solutions of differential equations, Invent. Math. 18 (1972) 1–118.
 [4] A. Lauder, A recursive method for computing zeta functions of varieties, London Math. Soc. J. Comp. Math. 9 (2006) 222–269.
 [5] Q. Liu, Algebraic Geometry and Arithmetic Curves, Oxford Graduate Texts in Math., 2002, Oxford Science Publications.
 [6] Y. Manin, Rational Points of Algebraic Curves over Function Fields, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 50, 1963, pp. 189–234.
 [7] M. Rosenlicht, Differentials of the second kind for algebraic functions fields of one variable, Ann. of Math. 57 (3) (1953) 517–523.