Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007) 587–591
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Probabilités

Temps de sortie d'un cône pour une marche aléatoire centrée

Rodolphe Garbit

Laboratoire de mathématiques et physique théorique, Université François-Rabelais Tours, fédération Denis-Poisson – CNRS, parc de Grandmont, 37200 Tours, France

Reçu le 8 mars 2007 ; accepté après révision le 2 octobre 2007

Disponible sur Internet le 7 novembre 2007

Présenté par Marc Yor

Résumé

Considérons une marche aléatoire dans $\mathbb{R}^d$, non-dégénérée, centrée et admettant des moments d'ordre 2. Soit F un cône convexe et B une boule de $\mathbb{R}^d$ centrée en l'origine et de rayon assez grand. Nous annonçons que pour tout x de F suffisamment loin du bord de F, la probabilité que la marche aléatoire issue de x se trouve dans B à l'instant n sans avoir jamais quitté le cône F avant cet instant ne décroît pas exponentiellement vite lorsque n tend vers l'infini. ***Pour citer cet article : R. Garbit, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Abstract

Exit time of a centered random walk from a cone. Consider a centered non-degenerate random walk on $\mathbb{R}^d$, with finite second moment. Let F be a convex cone and B a ball of large radius centered at the origin. We announce that for all x in F, far enough from the boundary of F, the probability that the random walk started at x be in B at time n without having ever left the cone F before that time does not decrease exponentially fast as n goes to ∞. ***To cite this article: R. Garbit, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Abridged English version

Let $\mathcal{L}$ be a probability law on $\mathbb{R}^d$ with expectation μ and covariance matrix Γ. We set $\mathbb{P}=\mathcal{L}^{\otimes\mathbb{N}}$ and we consider the family of probability spaces $\{(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}_x)\colon x\in\mathbb{R}^d\}$, where $\Omega=\{(\xi_n)_{n\geqslant 0}\colon \xi_n\in\mathbb{R}^d\}$ and $\mathbb{P}_x=\delta_x\otimes\mathbb{P}$. Let $\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_n,\dots$ be the coordinate functions on Ω and set $S_n=\xi_0+\xi_1+\cdots+\xi_n$. Under $\mathbb{P}_x$, the sequence $(S_n)_{n\geqslant 0}$ is the random walk started at x whose independent differences $\{\xi_n, n\geqslant 1\}$ are distributed according to law $\mathcal{L}$.

We fix a unitary vector $\vec{u}\in\mathbb{S}^{d-1}$, a real number $\lambda\in\,]0,\sqrt{2}[$ and we denote by $F=F(\vec{u},\lambda)$ the closed convex cone of $\mathbb{R}^d$ with vertex 0, axis $\vec{u}$ and magnitude λ:

$$F(\vec{u},\lambda)=\left\{x\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}\colon \|\vec{u}-\vec{x}\|\leqslant\lambda\right\}\cup\{0\},$$

where $\|\cdot\|$ is the Euclidian norm and $\vec{x}=x/\|x\|$ the projection of x on the unit sphere $\mathbb{S}^{d-1}$. For every real c, we set $F_c=c\vec{u}+F=\{c\vec{u}+x\colon x\in F\}$.

Adresse e-mail : garbit@lmpt.univ-tours.fr.

1631-073X/$ – see front matter © 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2007.10.016

Let $T_F = \inf\{n \geqslant 1\colon\ S_n \notin F\}$ be the first exit time from the cone F. Our main result is the following theorem:

Theorem. *If $\mu = 0$ and if Γ is non-degenerate, then there exist two non-negative constants R_0 and c such that for all $R \geqslant R_0$ and all $x \in F_c$:*

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}_x\big(\|S_n\| \leqslant R; T_F > n\big)^{1/\sqrt{n}} > 0. \tag{1}$$

Depending on the law $\mathcal{L}$ and the cone F, the constants c and R_0 can be interpreted in the following way. The constant c comes from the fact that, in order to stay in the cone for some time, it may be necessary to start far from the boundary of F. Also, it might happen that the random walk cannot come close to the origin while staying in the cone, and this leads to a critical distance R_0.

The theorem has an immediate consequence concerning the behavior of (1) in the non-centered case (i.e. $\mu \neq 0$). If the law $\mathcal{L}$ has exponential moments and if its support is not included in a half-space then its Laplace transform $L(x) = \int \mathrm{e}^{\langle x,y\rangle}\mathcal{L}(\mathrm{d}y)$ reaches its minimum $\rho_{\mathcal{L}} \in]0,1[$ at a unique point $p \in \mathbb{R}^d$ and the probability measure $\mathcal{L}^*(\mathrm{d}y) = \rho_{\mathcal{L}}^{-1}\mathrm{e}^{\langle p,y\rangle}\mathcal{L}(\mathrm{d}y)$ is centered. This well-known 'recentering method' leads easily from the theorem to the following corollary:

Corollary. *Suppose that $\mathcal{L}$ has exponential moments. If $\mu \neq 0$ and if Γ is non-degenerate, then there exist two non-negative real constants R_0 and c such that for all $R \geqslant R_0$ and all $x \in F_c$:*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_x\big(\|S_n\| \leqslant R; T_F > n\big)^{1/n} = \rho_{\mathcal{L}}, \tag{2}$$

where $\rho_{\mathcal{L}}$ is the minimum of the Laplace transform of $\mathcal{L}$.

Note that the preceding limit does not depend on the cone F.

Let us now give some ideas of the proof of the theorem. To avoid excessive technicality let us assume that there exists $z \in \mathring{F}$ such that $\mathbb{P}(\xi_1 = z) = \alpha > 0$. We set $u_n(R)$ as in (3) and we look for a lower bound of $u_n(\sqrt{n})$. To do this, we consider only trajectories whose first $[\sqrt{n}]$ steps are equal to z (see (4)). By independence and stationarity we then get :

$$u_n(\sqrt{n}) \geqslant \underbrace{\mathbb{P}_0\big([\sqrt{n}]z + S_{k_n} \in F_\delta(\sqrt{n}); [\sqrt{n}]z + S_k \in F, k = 1,2,\ldots,k_n\big)}_{=:p_n} \times \alpha^{[\sqrt{n}]},$$

where $k_n = n - [\sqrt{n}]$. Using Donsker's Theorem ([1], Theorem 8.2) and classical properties of Brownian motion B, we show that p_n converges to $\mathbb{P}_0\big(z + B(1) \in F_0(1);\ z + B(t) \in F,\ \forall t \in [0,1]\big)$, and that this limit is positive ($z \in \mathring{F}$ is crucial). Therefore $\liminf u_n(\sqrt{n})^{1/\sqrt{n}} \geqslant \alpha$. We conclude the proof by comparing $u_n(R)$ with $u_n(\sqrt{n})$ (see the lemme and what follows it).

1. Introduction

Soit $\mathcal{L}$ une loi de probabilité sur $\mathbb{R}^d$ de moyenne μ et de matrice de covariance Γ. Nous posons $\mathbb{P} = \mathcal{L}^{\otimes\mathbb{N}}$ et nous considérons la famille d'espaces de probabilité $\{(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}_x)\colon\ x \in \mathbb{R}^d\}$, où $\Omega = \{(\xi_n)_{n\geqslant 0}\colon\ \xi_n \in \mathbb{R}^d\}$ et $\mathbb{P}_x = \delta_x \otimes \mathbb{P}$. Soient $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ les fonctions coordonnées sur Ω et posons $S_n = \xi_0 + \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Sous $\mathbb{P}_x$, la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ est une marche aléatoire issue de x dont les accroissements indépendants $\{\xi_n, n \geqslant 1\}$ suivent la loi $\mathcal{L}$.

Fixons un vecteur unitaire $\vec{u} \in \mathbb{S}^{d-1}$, un nombre réel $\lambda \in]0, \sqrt{2}[$ et notons $F = F(\vec{u}, \lambda)$ le cône convexe fermé de $\mathbb{R}^d$ de sommet 0, d'axe $\vec{u}$ et d'ouverture λ :

$$F(\vec{u},\lambda) = \big\{x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}\colon\ \|\vec{u} - \vec{x}\| \leqslant \lambda\big\} \cup \{0\},$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne et $\vec{x} = x/\|x\|$ est la projection sur la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$ du point x. Pour tout nombre réel c, on pose $F_c = c\vec{u} + F = \{c\vec{u} + x\colon\ x \in F\}$.

Soit $T_F = \inf\{n \geqslant 1\colon\ S_n \notin F\}$ le temps de première sortie du cône F. Notre résultat principal est le théorème suivant :

Théorème. *Si $\mu = 0$ et si la matrice Γ est définie positive, alors il existe deux nombres réels positifs R_0 et c tels que pour tout $R \geqslant R_0$ et tout point $x \in F_c$ on ait :*

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}_x\big(\|S_n\| \leqslant R;\, T_F > n\big)^{1/\sqrt{n}} > 0. \tag{1}$$

Les constantes c et R_0 dépendent de la loi $\mathcal{L}$ et du cône F et peuvent être interprétées de la façon suivante. La constante c provient du fait que, pour pouvoir rester dans le cône pendant un certain temps, il peut être nécessaire de partir loin du bord de F. Dans le même ordre d'idées, il se peut que la marche ne puisse pas s'approcher de l'origine tout en restant dans le cône ; d'où une distance critique R_0. Quelques détails sont donnés dans la dernière section.

Une conséquence immédiate du théorème concerne le comportement de la quantité (1) dans le cas décentré (i.e. $\mu \neq 0$). Si la loi $\mathcal{L}$ possède des moments exponentiels et si son support n'est pas contenu dans un demi-espace, alors sa transformée de Laplace $L(x) = \int \mathrm{e}^{\langle x,y\rangle}\mathcal{L}(\mathrm{d}y)$ possède un minimum $\rho_{\mathcal{L}} \in]0,1[$ atteint en un unique point $p \in \mathbb{R}^d$ et la mesure de probabilité $\mathcal{L}^*(\mathrm{d}y) = \rho_{\mathcal{L}}^{-1}\mathrm{e}^{\langle p,y\rangle}\mathcal{L}(\mathrm{d}y)$ est centrée. Ce procédé de recentrage classique permet de déduire facilement du théorème le corollaire suivant :

Corollaire. *Dans le cas où $\mu \neq 0$, si la loi $\mathcal{L}$ possède des moments exponentiels et si Γ est définie positive, alors il existe deux nombres réels positifs R_0 et c tels que pour tout $R \geqslant R_0$ et tout point $x \in F_c$ on ait :*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_x\big(\|S_n\| \leqslant R;\, T_F > n\big)^{1/n} = \rho_{\mathcal{L}}, \tag{2}$$

où $\rho_{\mathcal{L}}$ est le minimum de la transformée de Laplace de la mesure $\mathcal{L}$.

Noter que la limite apparaissant dans (2) ne dépend pas du cône choisi.

L'étude du comportement asymptotique de la quantité $\mathbb{P}_0\big(S_n \in K;\, T_F > n\big)$, où K est un compact de $\mathbb{R}^d$, a fait l'objet de nombreuses études. Historiquement, le premier résultat connu concerne le cas décentré. En dimension 1, si $F = \mathbb{R}^+$, Iglehart [5] a démontré, sous les hypothèses du corollaire,[1] que la quantité $\mathbb{P}_0(S_n \in K;\, T_F > n)$ décroît en $n^{-3/2}\rho_{\mathcal{L}}^n$ $(0 < \rho < 1)$ lorsque $\mu < 0$. En reprenant ses techniques, Le Page et Peigné [6] ont montré que la quantité $\mathbb{P}_0(S_n \in K;\, T_F > n)$ décroît en $n^{-3/2}$ dans le cas centré, sous les hypothèses du théorème auxquelles ils ajoutent une condition d'apériodicité de $\mathcal{L}$. Ce résultat intervient de façon essentielle pour l'obtention d'un théorème limite local sur le groupe affine de la droite réelle [6] ou dans l'étude des probabilités d'extinction de processus de branchement en milieu aléatoire [4]. Des résultats du même ordre existent en dimension supérieure lorsque F est un demi-espace ; ils permettent par exemple d'obtenir un théorème limite local pour les marches aléatoires centrées sur le groupe des matrices triangulaires supérieures d'ordre 2 [7]. L'étude des marches aléatoires sur des groupes résolubles plus généraux nécessite de considérer d'autres types de cônes ; en particulier des chambres de Weyl. Nous renvoyons le lecteur à [8] pour une présentation générale de ce sujet. Dans le cas centré, Varopoulos [9] a obtenu des estimations précises du type $\mathbb{P}_x(S_n \in K;\, T_F > n) \asymp n^{-\beta}$, valables en toute dimension, sous certaines hypothèses concernant la loi[2] et le cône. Nos résultats ne sont pas aussi précis, mais présentent l'avantage d'être valides sous des hypothèses plus faibles.

L'une de nos motivations pour étudier la quantité (2) est liée à l'étude d'une marche centrifuge introduite dans [2]. La *marche centrifuge* est un processus de Markov (X_n) dans $\mathbb{R}^d$ dont les probabilités de transition sont celles d'une marche aléatoire symétrique ordinaire de loi $\mathcal{L}$ perturbées par une dérive centrifuge. Ces probabilités de transition sont données par : $p(x, x+\mathrm{d}y) = (1 + a(\|y\|)\langle\vec{x}, y\rangle)\mathcal{L}(\mathrm{d}y) =: \mathcal{L}_{\vec{x}}(\mathrm{d}y)$ (et $p(0,\mathrm{d}y) = \mathcal{L}(\mathrm{d}y)$), où des hypothèses convenables sont faites sur la loi $\mathcal{L}$ et la fonction a. Il a été démontré dans [2] que la marche centrifuge part à l'infini et converge p.s. vers une direction limite. Lorsque le temps tend vers l'infini, la marche centrifuge reste piégée dans des cônes $F(\vec{u}, \epsilon)$ d'ouverture arbitrairement petite et ses transitions sont alors proches de celles d'une vraie marche aléatoire (S_n) de loi $\mathcal{L}_{\vec{u}}$ restant dans $F(\vec{u}, \epsilon)$. Si l'on s'intéresse au comportement asymptotique de $\mathbb{P}(X_n \in K)$ (où K est un compact de $\mathbb{R}^d$), on est alors naturellement amené à estimer des quantités du même type que (2). En utilisant ces idées et le corollaire, nous avons pu établir (cf. [3]) que la marche centrifuge plane aux quatre plus proches

[1] Il fait l'hypothèse supplémentaire que si la loi de ξ_1 est portée par $\mathbb{Z}$, alors $\mathbb{P}(\xi_1 = 0) > 0$.

[2] Varopoulos étudie d'abord le cas où $\mathcal{L}$ est à support borné, portée par un réseau ou absolument continue, puis il étend ses résultats à une classe particulière de lois ayant un support non borné et des moments d'ordre grand (cf. [9], Section 6.2).

voisins (i.e. $\mathcal{L}$ est la loi de la marche aux quatre plus proches voisins dans $\mathbb{Z}^2$ et $a(\|y\|) = a \in [0, \sqrt{1}])$ vérifie : $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in K)^{1/n} = \sqrt{\frac{2-a^2}{2}}$; ce qui répond à une question soulevée dans [2].

2. Démonstration du théorème

Dans toute la suite nous noterons $[a]$ la partie entière d'un nombre réel a. Nous introduisons les ensembles $F_\delta(R) = \{x \in F_\delta\colon \langle x, \vec{u}\rangle \leqslant R\}$ qui, mieux adaptés à la géométrie du problème, tiendront le rôle des boules usuelles. Afin de mettre l'accent sur l'idée de la démonstration plutôt que sur les détails techniques, nous allons donner une démonstration du théorème en faisant l'hypothèse supplémentaire (H) qu'il existe un point $z \in \mathring{F}$ tel que $\mathbb{P}(\xi_1 = z) = \alpha > 0$.

Soit un nombre réel $\delta \geqslant 0$. Pour tout $R \geqslant 0$, nous posons :

$$u_n(R) = \mathbb{P}_0\big(S_n \in F_\delta(R); T_F > n\big), \tag{3}$$

et nous commençons par étudier le comportement de $u_n(\sqrt{n})$.

Notre méthode pour minorer $u_n(\sqrt{n})$ consiste à ne garder, parmi toutes les trajectoires de la marche qui restent dans le cône jusqu'à l'instant n, que celles dont les $[\sqrt{n}]$ premiers pas sont égaux à z. Plus précisément, on a :

$$u_n(\sqrt{n}) \geqslant \mathbb{P}_0\big(S_n \in F_\delta(\sqrt{n}); S_n, S_{n-1}, \ldots, S_{[\sqrt{n}]+1} \in F; \xi_{[\sqrt{n}]} = z, \ldots, \xi_1 = z\big). \tag{4}$$

Un calcul simple, utilisant l'indépendance et la stationnarité des accroissements, ainsi que l'invariance de F par homothétie, montre que le membre de droite de l'inégalité précédente se récrit :

$$\mathbb{P}_0\left(\gamma_n z + \frac{S_{k_n}}{\sqrt{k_n}} \in F_{\delta k_n^{-1/2}}(\gamma_n); \gamma_n z + \frac{S_k}{\sqrt{k_n}} \in F, k = 1, 2, \ldots, k_n\right) \times \alpha^{[\sqrt{n}]}, \tag{5}$$

où l'on a posé $k_n = n - [\sqrt{n}]$ et $\gamma_n = [\sqrt{n}]/\sqrt{k_n}$.

Fixons $0 < \epsilon < 1$. Pour tout entier n suffisamment grand, l'ensemble $F_{\delta k_n^{-1/2}}(\gamma_n)$ contient $F_\epsilon(1)$ et nous pouvons donc minorer la quantité (5) par :

$$\mathbb{P}_0\left(\gamma_n z + \frac{S_{k_n}}{\sqrt{k_n}} \in F_\epsilon(1); \gamma_n z + \frac{S_k}{\sqrt{k_n}} \in F, k = 1, 2, \ldots, k_n\right) \times \alpha^{[\sqrt{n}]}. \tag{6}$$

Par convexité de F, en notant $Z_n(t)$ le processus continu sur $[0, 1]$ valant $S_k/\sqrt{n}$ aux instants $t = k/n$ et interpolé linéairement ailleurs, on peut écrire l'expression (6) sous la forme :

$$\underbrace{\mathbb{P}_0\big(\gamma_n z + Z_{k_n}(1) \in F_\epsilon(1); \gamma_n z + Z_{k_n}(t) \in F, \forall t \in [0, 1]\big)}_{=p_n} \times \alpha^{[\sqrt{n}]}. \tag{7}$$

D'après le principe d'invariance de Donsker ([1], Theorem 8.2), la suite de processus $(Z_n)_n$ converge en loi vers le mouvement brownien de matrice de covariance Γ issu de 0 ; et comme la suite déterministe $(\gamma_n z)_n$ converge vers z, la suite de processus $(\gamma_n z + Z_{k_n})_n$ converge en loi vers le mouvement brownien B^z issu de z. En utilisant le « théorème de Portemanteau » ([1], Theorem 2.1), on démontre que la suite (p_n) converge vers $\mathbb{P}_0\big(B^z(1) \in F_\epsilon(1); B^z(t) \in F, \forall t \in [0, 1]\big)$, et que, z étant à l'intérieur de F, cette limite est strictement positive. Il s'ensuit que :

$$\liminf_{n\to\infty} u_n(\sqrt{n})^{1/\sqrt{n}} \geqslant \alpha. \tag{8}$$

La seconde étape de la démonstration consiste à comparer $u_n(R)$ avec $u_n(\sqrt{n})$. Pour ce faire, on utilise le lemme suivant qui se déduit du principe d'invariance de Donsker et de considérations géométriques :

Lemme. *Il existe un entier $b \geqslant 1$ et deux nombres réels $R_0 > \delta \geqslant 0$ tels que :*

$$\beta := \inf_{R\geqslant R_0} \inf_{x\in F_\delta(R+1)} \mathbb{P}_x\big(S_b \in F_\delta(R); T_F > b\big) > 0.$$

On obtient une trajectoire de $[S_{n+b} \in F_\delta(R); T_F > n + b]$ en considérant une trajectoire de $[S_n \in F_\delta(R + 1); T_F > n]$ qui retourne dans $F_\delta(R)$ à l'instant $n + b$ sans jamais sortir du cône F. Cette remarque, combinée à la propriété de Markov et au lemme, conduit à la relation suivante :

$$\forall n \geqslant 1, \forall R \geqslant R_0, \quad u_n(R+1)\beta \leqslant u_{n+b}(R), \tag{9}$$

qui s'étend par récurrence en :

$$\forall n \geqslant 1, \forall k \geqslant 0, \forall R \geqslant R_0, \quad u_n(R+k)\beta^k \leqslant u_{n+bk}(R). \tag{10}$$

Fixons maintenant un nombre réel $R \geqslant R_0$. Pour tout entier $n \geqslant [R^2]$ on a :

$$u_n(\sqrt{n}) \leqslant u_n\big(R + [\sqrt{n} - R + 1]\big) \leqslant \beta^{-a_n} u_{n+ba_n}(R),$$

où l'on a posé $a_n = [\sqrt{n} - R + 1]$. En posant $b_n = n + ba_n$ et en prenant la puissance $1/\sqrt{b_n}$ des membres extrémaux de cette inégalité, il vient : $\beta^{a_n/\sqrt{b_n}} u_n(\sqrt{n})^{1/\sqrt{b_n}} \leqslant u_{b_n}(R)^{1/\sqrt{b_n}}$. Et comme a_n est équivalent à $\sqrt{n}$ et que b_n est équivalent à n, en utilisant (8) pour passer à la limite dans l'inégalité précédente, nous voyons que :

$$\liminf_{n\to\infty} u_{b_n}(R)^{1/\sqrt{b_n}} \geqslant \alpha\beta. \tag{11}$$

La suite (b_n) est à lacunes bornées et les intervalles d'entiers successifs qui composent l'image de cette suite ont une longueur qui croît vers l'infini ; de sorte que tous les entiers suffisament grands qui n'appartiennent pas à l'image de la suite (b_n) sont de la forme $c_n := b_n + b$. Or, nous observons le même comportement (11) le long de la suite (c_n), puisque d'après la relation (9) on a : $u_{b_n}(R) \leqslant u_{b_n}(R+1) \leqslant \beta^{-1} u_{c_n}(R)$. Le comportement (11) est donc valable pour toute la suite $(u_n(R))$ et le théorème est démontré.

3. A propos des constantes

La constante c est absente de la démonstration simplifiée (i.e. le théorème est vrai avec $c = 0$) et en serait encore absente si, au lieu de (H), on avait $\mathbb{P}(\xi_1 \in \mathring{F}) > 0$. Dans les autres cas, la marche issue de 0 ne reste pas dans $\mathring{F}$, mais retourne dans $\mathring{F}$ au bout d'un certain temps sans s'être trop éloignée de F avec une probabilité positive. Mathématiquement, cela se traduit par l'existence d'un entier $b \geqslant 1$, d'une boule $B(z, \epsilon) \subset \mathring{F}$ et d'un réel $c \geqslant 0$ tels que $\alpha := \mathbb{P}_0\big(S_b \in B(z, \epsilon); S_1, S_2, \ldots, S_b \in F_{-c}\big) > 0$. Pour tout $x \in F_c$, on a alors $\mathbb{P}_x\big(S_b \in x + B(z, \epsilon); T_F > b\big) \geqslant \alpha$. Ce fait remplace l'hypothèse (H) dans le cas général pour des marches aléatoires issues de F_c.

Références

[1] P. Billingsley, Convergence of Probability Measures, second ed., Wiley, New York, 1999.
[2] J.-D. Fouks, E. Lesigne, M. Peigné, Étude asymptotique d'une marche aléatoire centrifuge, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 42 (2) (2006) 147–170.
[3] R. Garbit, Thèse de doctorat, en préparation.
[4] Y. Guivarc'h, Q. Liu, Propriétés asymptotiques des processus de branchement en environnement aléatoire, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 332 (4) (2001) 339–344.
[5] D.L. Iglehart, Random walks with negative drift conditioned to stay positive, J. Appl. Probab. 11 (1974) 742–751.
[6] E. Le Page, M. Peigné, A local limit theorem on the semi-direct product of $\mathbb{R}^{*+}$ and $\mathbb{R}^d$, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 33 (2) (1997) 223–252.
[7] E. Le Page, M. Peigné, Local limit theorems on some non-unimodular groups, Rev. Mat. Iberoamericana 15 (1) (1999) 117–141.
[8] N.Th. Varopoulos, Analysis on Lie groups, Rev. Mat. Iberoamericana 12 (3) (1996) 791–917.
[9] N.Th. Varopoulos, Potential theory in conical domains, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 125 (2) (1999) 335–384.