Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007) 421–424
COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse complexe/Géométrie

Régularité au bord des applications pseudo-holomorphes propres

Léa Blanc-Centi

Universités de Marseille (Université de Provence), L.A.T.P., 39, rue F. Joliot-Curie, 13453 Marseille cedex 13, France

Reçu le 19 mars 2007 ; accepté après révision le 12 septembre 2007

Disponible sur Internet le 24 octobre 2007

Présenté par Jean-Pierre Demailly

Résumé

Nous montrons que les applications pseudo-holomorphes propres entre deux régions strictement pseudoconvexes se prolongent au bord. Le point essentiel de la démonstration est que le jacobien d'une telle application ne s'annule pas près du bord. Nous prouvons également que la régularité du prolongement dépend de la régularité des structures presque complexes, et nous obtenons des estimations explicites des normes hölderiennes. En corollaire, nous donnons dans le cas lisse une condition nécessaire et suffisante sur la structure presque complexe de l'espace d'arrivée pour que les applications pseudo-holomorphes propres se prolongent de façon lisse. ***Pour citer cet article : L. Blanc-Centi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Abstract

Regularity to the boundary of proper pseudo-holomorphic maps. We prove that proper pseudo-holomorphic maps between strictly pseudoconvex regions in almost complex manifolds extend to the boundary. The key point is that the Jacobian of such a map is far from zero near the boundary, and the proof is mainly based on an almost complex analogue of the scaling method. We also establish the link between the regularity of the extension and the regularity of the almost complex structures, and we determine explicit estimates for the Hölderian norms. As a corollary, we get in the smooth case a necessary and sufficient condition on the almost complex structure of the target's space for the smooth extension of proper pseudo-holomorphic maps. ***To cite this article: L. Blanc-Centi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

1. Introduction

La régularité au bord d'une application holomorphe *propre* $F : D \to D'$ (c'est-à-dire telle que l'image réciproque de tout compact de D' soit un compact) entre deux domaines strictement pseudoconvexes de $\mathbb{C}^n$ a été longuement étudiée. Le cas $n \geqslant 2$ est maintenant aussi bien compris que le cas unidimensionnel : si D et D' sont à bords de classe $\mathcal{C}^r$ ($r \geqslant 2$), toute application holomorphe propre de D dans D' se prolonge au bord en une application de classe $\mathcal{C}^{r-1/2}$. De nombreux auteurs ont contribué à la démonstration de ce théorème, et nous renvoyons au papier de F. Forstnerič [5] pour un tour d'horizon approfondi. Mentionnons simplement le résultat obtenu par Ch. Fefferman en 1974, montrant

Adresse e-mail : lea@cmi.univ-mrs.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2007.09.013

que tout biholomorphisme entre deux domaines bornés à bords lisses de $\mathbb{C}^n$, strictement pseudoconvexes, se prolonge de façon lisse au bord.

La nouveauté de ce travail est que nous traitons le cas de domaines strictement pseudoconvexes dans des variétés *presque complexes de dimension quelconque*. Dans ce cadre, les arguments intervenant en complexe (holomorphie du jacobien, notion d'ensemble analytique, ...) ne s'appliquent plus. Notre méthode est ici basée sur l'étude des disques analytiques. Il s'agit de relier le comportement d'une application définie à l'intérieur d'un domaine D à son comportement au bord, en « remplissant » D par l'intérieur de disques analytiques attachés à ∂D. Introduite à l'origine par E. Bishop, cette méthode a conduit à des preuves géométriques de diverses versions du théorème de Fefferman [7,10], y compris en presque complexe [4,6].

Nous montrons que la régularité au bord d'une application pseudo-holomorphe propre dépend alors non seulement de la régularité des bords des domaines, mais aussi de celle des structures presque complexes (Théorème 2.4). Notons que lorsque les structures sont lisses et les bords des domaines de classe $\mathcal{C}^r$, nous obtenons ainsi un prolongement de classe $\mathcal{C}^{r-1}$, soit une petite perte de régularité par rapport au cas intégrable.

Les démonstrations des résultats obtenus sont ici simplement esquissées, mais se trouvent de façon détaillée dans [1].

2. Résultats

Soit D un domaine borné dans une variété (réelle) lisse, et J une structure presque complexe de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overline{D}$, lisse dans D. Nous dirons que (D, J) est une *région strictement pseudoconvexe* si $D = \{\rho < 0\}$, où ρ est une fonction définissante de classe $\mathcal{C}^2$ de ∂D, strictement J-plurisousharmonique sur $\overline{D}$. Si ρ et J sont de classe au moins $\mathcal{C}^r$, (D, J) sera appelée *région strictement pseudoconvexe de classe* $\mathcal{C}^r$.

Considérons une application *pseudo-holomorphe* $F : (D, J) \to (D', J')$ entre deux régions strictement pseudoconvexes, c'est-à-dire telle que pour tout $p \in D$, $dF_p \circ J_p = J'_{F(p)} \circ dF_p$. Dans toute la suite, nous supposerons également que F est propre.

2.1. Prolongement de classe $\mathcal{C}^1$

Nous commençons par montrer que F admet un prolongement $\frac{1}{2}$-hölderien à $\overline{D}$. Ceci découle essentiellement du lemme de Sard, et du fait que la stricte pseudoconvexité interdit l'existence de sous-variétés presque complexes compactes dans D de dimension positive et rencontrant le bord.

La différence avec le cas biholomorphe pour obtenir le caractère $\mathcal{C}^1$ du prolongement réside évidemment dans l'existence de points critiques. Rappelons qu'en complexe, S. Pinchuk a montré par la méthode des dilatations que toute application holomorphe propre entre deux domaines bornés strictement pseudoconvexes de $\mathbb{C}^n$, à bords de classe $\mathcal{C}^2$, est un biholomorphisme local [8]. Nous montrons que c'est encore vrai en presque complexe, au moins près du bord :

Théorème 2.1. *Soit (D, J) et (D', J') deux régions strictement pseudoconvexes de même dimension. Toute application pseudo-holomorphe propre $F : D \to D'$ vérifie*

$$\liminf_{p \to \partial D} |\mathrm{Jac}_p F| > 0.$$

En particulier, l'ensemble des points critiques de F est un compact inclus dans D.

Pour prouver ce résultat, nous ramenons le problème à l'étude d'une application entre domaines modèles simples. La démonstration repose sur la méthode de dilatation des coordonnées [9] adaptée au cas presque complexe : il s'agit de faire exploser les domaines grâce à des dilatations anisotropes, afin d'obtenir la réalisation non bornée de la boule. En presque complexe, les transformations ainsi opérées sur les domaines n'ont aucune raison d'être pseudo-holomorphes, d'où la nécessité de dilater simultanément les structures presque complexes. Les structures obtenues à la limite sont des structures modèles,[1] pas nécessairement intégrables. Notons que, uniquement dans le cas $n = 2$, on peut normaliser les structures de départ de façon à obtenir à la limite la structure complexe usuelle sur $\mathbb{R}^4$.

Le caractère $\mathcal{C}^1$ du prolongement est obtenu en distinguant le cas où les structures presque complexes limites sont intégrables, et le cas non intégrable dans lequel intervient l'étude des structures modèles. La démonstration utilise de façon essentielle que l'application est localement inversible près du bord.

2.2. Régularité d'odre supérieur

En fait, nous obtenons pour le prolongement une régularité plus forte que $\mathcal{C}^1$, qui dépend de la régularité des structures presque complexes. Nous donnons aussi une estimation explicite des normes hölderiennes de F au bord. L'idée est de déduire la régularité de F au bord de la régularité de F le long d'une famille de disques pseudo-holomorphes attachés à une sous-variété totalement réelle.

Dans la suite, on désigne par Δ le disque unité de $\mathbb{C}$ et par Δ^+ le demi-disque supérieur.

Définition 2.2. Un *disque analytique* dans une variété presque complexe (M, J) est une fonction h continue de $\bar{\Delta}$ dans M, pseudo-holomorphe dans Δ. On dira que le disque h est *attaché* à une sous-variété E si $h(\partial\Delta) \subset E$.

Les propriétés au bord de tels disques reflètent fortement la géométrie de la sous-variété à laquelle ils sont attachés. Ainsi, dans le cas complexe, les disques attachés à une sous-variété totalement réelle E possèdent de nombreuses propriétés de régularité [2,3], notamment en raison du principe de réflexion. Dans le cas presque complexe, les disques sont lisses jusqu'au bord si E et la structure presque complexe J sont supposées lisses [4]. Nous donnons une version quantitative de ce résultat : si E et J sont seulement de classe $\mathcal{C}^r$, nous montrons que les disques sont de classe $\mathcal{C}^r$ jusqu'au bord. Plus précisément :

Théorème 2.3. *Soit (M, J) une variété presque complexe et $E \subset M$ une sous-variété totalement réelle maximale. Supposons que J et E sont de classe $\mathcal{C}^r$, où $r \geqslant 1$ n'est pas entier.*

Alors, toute application continue $h : \Delta^+ \cup]-1; 1[\to M$, J-holomorphe dans Δ^+ et attachée à E par son diamètre, est localement de classe $\mathcal{C}^r$ dans $\Delta^+ \cup]-1; 1[$. De plus, pour tout compact K dans $\Delta^+ \cup]-1; 1[$,

$$\|h\|_{\mathcal{C}^r(K)} \leqslant c(r, K)\|h\|_\infty \left(1 + \frac{c(K)}{\sqrt{\lambda_E^J}}\right).$$

Ici, λ_E^J désigne la plus petite valeur propre de la forme de Levi d'une fonction du type « carré de la distance à E », que nous appelons *J-courbure minimale de E* en référence à son interprétation géométrique. La démonstration est basée sur une minoration explicite de la pseudométrique infinitésimale de Kobayashi–Royden dans les variétés presque complexes. La borne inférieure est obtenue à partir de la construction de fonctions J-plurisousharmoniques, et conduit également à une estimation de la taille des disques pseudo-holomorphes.

Enfin, nous appliquons le Théorème 2.3 à notre problème de départ, en considérant le relèvement au fibré conormal $N^*(\partial D')$ du bord du domaine. Nous montrons ainsi :

Théorème 2.4. *Soit (D, J) et (D', J') des régions strictement pseudoconvexes de même dimension, respectivement de classe $\mathcal{C}^r$ et $\mathcal{C}^{r'}$ où $r, r' \geqslant 2$ sont non-entiers. Alors toute application pseudo-holomorphe propre $F : D \to D'$ se prolonge au bord en une application de classe $\mathcal{C}^s$, où*

$$s = \begin{cases} \min(r, r') & \text{si } |r' - r| \geqslant 1; \\ \max(r-1, r'-1) & \text{si } |r' - r| < 1. \end{cases}$$

De plus, pour $s' = \min(r-1, r')$: $\|F\|_{\mathcal{C}^{s'-1}(\bar{D})} \leqslant c(s')\|(F, {}^t(dF)^{-1})\|_\infty (1 + c'/\sqrt{\lambda_{N^*(\partial D')}^{J'}})$.

[1] Une structure *modèle* sur $\mathbb{R}^{2n+2}$ est une structure presque complexe de la forme $J(x_0, y_0, \ldots, x_n, y_n) = \begin{pmatrix} \mathcal{J}_{\mathrm{st}}^{(1)} & B \\ 0 & \mathcal{J}_{\mathrm{st}}^{(n)} \end{pmatrix}$ où $B \in \mathcal{M}_{2,2n}(\mathbb{R})$ est $\mathbb{R}$-linéaire en $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ et où $\mathcal{J}_{\mathrm{st}}^{(n)}$ désigne la structure complexe usuelle sur $\mathbb{R}^{2n}$.

Remarquons que si les structures presque complexes sont lisses (par exemple, dans le cas complexe), le Théorème 2.4 donne dans le cas $|r' - r| \geqslant 1$ une meilleure régularité que celle obtenue génériquement pour des domaines à bords de même régularité.

Si (D, J) et (D', J') sont lisses, nous obtenons ainsi que le prolongement de F est lisse. Par ailleurs, $J' = F_* J$ près du bord d'après le Théorème 2.1. Nous en déduisons, comme dans le cas biholomorphe [4], une condition nécessaire et suffisante sur J' pour que F se prolonge de façon lisse :

Corollaire 2.5. *Soit (D, J) et (D', J') des régions strictement pseudoconvexes de même dimension, avec (D, J) de classe $\mathcal{C}^\infty$. Une application pseudo-holomorphe propre $F : D \to D'$ se prolonge de façon lisse au bord si et seulement si $\partial D'$ est lisse et J' se prolonge de façon lisse à $\overline{D'}$.*

Références

[1] L. Blanc-Centi, Proper pseudo-holomorphic maps between strictly pseudoconvex regions, preprint de l'Université de Provence, LATP, 2006, math.CV/0612150v2.

[2] E.M. Chirka, Regularity of the boundaries of analytic sets, Mat. Sb. 45 (1983) 291–336.

[3] E. Chirka, C. Coupet, A. Sukhov, On boundary regularity of analytic discs, Michigan Math. J. 46 (1999) 271–279.

[4] B. Coupet, H. Gaussier, A. Sukhov, Fefferman's mapping theorem on almost complex manifolds in complex dimension two, Math. Z. 250 (1) (2005) 59–90.

[5] F. Forstnerič, Proper holomorphic mappings: a survey, in: J.E. Fornæss (Ed.), Several Complex Variables, Proc. Special Year, in: Math. Notes, vol. 38, Stockholm, 1987/88, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993, pp. 297–363.

[6] H. Gaussier, A. Sukhov, On the geometry of model almost complex manifolds with boundary, Math. Z. 254 (3) (2006) 567–589.

[7] L. Lempert, La métrique de Kobayashi et la représentation des domaines sur la boule, Bull. Math. Soc. France 109 (1981) 427–474.

[8] S. Pinchuk, Holomorphic inequivalence of some classes of domain in $\mathbb{C}^n$, Mat. Sb. 111 (153) (1980) 67–94. English transl. in Math. USSR-Sb. 39 (1980) 61–86.

[9] S. Pinchuk, The scaling method and holomorphic mappings, in: Several Complex Variables and Complex Geometry, Part 1, Santa Cruz, CA, 1989, in: Proc. Sympos. Pure Math., vol. 52, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, pp. 151–161.

[10] A. Tumanov, Extremal discs and the regularity of CR mappings in higher codimension, Amer. J. Math. 123 (3) (2001) 445–473.