Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007) 345–348
COMPTES RENDUS
MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Statistique/Probabilités

Mesures aléatoires opératorielle et banachique. Application aux séries stationnaires

Tawfik Benchikh [a,b], Alain Boudou [a], Yves Romain [a]

[a] *Institut de Mathématiques de Toulouse, Laboratoire de Statistique et Probabilités, UMR CNRS C55830, Université Paul-Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex, France*
[b] *LDM, Université Djilali-Liabes BP 89, SBA, 22000, Algérie*

Reçu le 2 décembre 2006 ; accepté après révision le 23 juillet 2007

Présenté par Paul Deheuvels

Résumé

Nous étudions des mesures aléatoires à valeurs dans l'espace de Banach $\mathcal{K}(H,E)$ des opérateurs compacts de l'espace de Hilbert H dans l'espace de Banach E : elles sont nommées *mesures aléatoires opératorielles*. Ensuite, nous étudions l'intégrale stochastique qui leur est associée et nous établissons le lien entre cette intégrale et les séries stationnaires d'opérateurs compacts. Ces résultats sont utilisés pour définir des *mesures aléatoires banachiques* et l'intégrale stochastique par rapport à ces mesures. Enfin, nous proposons l'approximation d'une série strictement stationnaire banachique au moyen d'une transformée de Fourier d'une mesure aléatoire banachique. ***Pour citer cet article : T. Benchikh et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***
© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Operatorial and Banach space-valued random measures. Application to stationary series. We study random measures with values in the Banach space $\mathcal{K}(H,E)$ of compact operators, where H is a Hilbert space and E is a Banach space: they are called *operatorial random measures*. Then we study the stochastic integral which is associated and we establish the relation between this integral and the stationary series of compact operators. These results are used to define *Banach space-valued random measures* and the stochastic integral with regard to these measures. Finally, we propose the approximation of a strictly stationary series by the Fourier transform of a Banach space-valued random measure. ***To cite this article: T. Benchikh et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***
© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

1. Introduction et notations

Soit E (resp. H) un espace de Banach (resp. de Hilbert) complexe séparable et $\mathcal{L}(H,E)$ (resp. $\mathcal{K}(H,E)$) l'espace de Banach des opérateurs linéaires bornés (resp. compacts) de H dans E. L'application bijective $h \in H \to \langle \cdot, h\rangle \in H'$ est notée $\mathcal{I}$, où H' est le dual topologique de H.

Étant donné un opérateur K de $\mathcal{L}(H,E)$, on appelle *opérateur quasi-transposé* de K, que l'on note ${}^qK$, l'opérateur antilinéaire $\mathcal{I}^{-1} \circ {}^tK$, c'est-à-dire tel que, pour tout (e',h) de $E' \times H$, on a : $\langle h, {}^qKe'\rangle = (e', Kh)_{E'E}$.

Adresses e-mail : tbenchikh@univ-sba.dz (T. Benchikh), boudou@cict.fr (A. Boudou), romain@cict.fr (Y. Romain).

1631-073X/$ – see front matter © 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2007.07.022

Lorsque X est un élément de $L^2_E(\mathcal{A})(=L^2_E(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P}))$, l'application qui, à y de $L^2(\mathcal{A})$, associe $\int yX\,\mathrm{d}\mathbb{P}$ de E, est notée $\widetilde{X}$ et appelée « *opérateur canoniquement associé (o.c.a.) à* X » ; c'est un opérateur compact. En [6], l'application $e'\in E'\mapsto e'\circ X\in L^2_E(\mathcal{A})$ est appelée *opérateur cylindrique associé* à X ; à une conjugaison complexe près, il s'agit du quasi-transposé de $\widetilde{X}$. Lorsque F est un second espace de Banach, on peut vérifier que, pour tout (φ,X) de $\mathcal{L}(E,F)\times L^2_E(\mathcal{A})$, $\varphi\circ X$ appartient à $L^2_F(\mathcal{A})$ et $\widetilde{\varphi\circ X}=\varphi\circ\widetilde{X}$.

On dit qu'un opérateur K de $\mathcal{K}(H,E)$, *se factorise au travers d'un opérateur de Hilbert–Schmidt* lorsqu'il existe un espace de Hilbert séparable H_1, un opérateur de Hilbert–Schmidt ψ de H dans H_1 et un élément φ de $\mathcal{L}(H_1,E)$ tels que $K=\varphi\circ\psi$. On montre que (cf. [2]), si l'o.c.a. $\widetilde{X}$ se factorise au travers d'un opérateur de Hilbert–Schmidt, alors, à tout T de $\mathcal{L}(L^2(\mathcal{A}))$, on peut associer un et un seul élément Y de $L^2_E(\mathcal{A})$ tel que $\widetilde{Y}=\widetilde{X}\circ T$.

Dans ce texte, nous utilisons fréquemment les notions de mesures aléatoires hilbertiennes (m.a.) et de mesures spectrales (m.s.) (à valeurs projecteurs), qui sont particulièrement étudiées en [4].

2. Mesure aléatoire opératorielle

Définition 2.1. Une mesure aléatoire opératorielle (m.a.o.) Z est une application de $\mathcal{B}$, tribu de Borel de $\Pi=[-\pi,\pi[$, dans $\mathcal{K}(H,E)$, telle que :

- pour tout couple (A,B) d'éléments disjoints de $\mathcal{B}$, $Z(A\cup B)=Z(A)+Z(B)$ et $Z(A)\circ{}^q(Z(B))=0$;
- pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ convergeant en décroissant vers $\varnothing$: $\lim_{n\mapsto\infty}\|ZA_n\|_{\mathcal{L}(H,E)}=0$.

Dans la suite, on note indifféremment $Z(A)$ et ZA.

Si Z est une m.a.o., alors, pour tout e' de E', l'application $Z^{e'}$ qui, à A de $\mathcal{B}$, associe ${}^q(ZA)e'$ de H est une m.a. ; de plus, pour tout couple (e',f') d'éléments de E', les m.a. $Z^{e'}$ et $Z^{f'}$ sont stationnairement corrélées. En [1], on démontre le résultat de décomposition suivant :

Proposition 2.2. *Si Z est une m.a.o., il existe une et une seule mesure spectrale ε sur $\mathcal{B}$ pour $H_Z=\overline{\mathrm{vect}}\{{}^q(ZA)e';\ (e',A)\in E'\times\mathcal{B}\}$ telle que, si l'on note j l'injection canonique de H_Z dans H, on ait : $ZA=Z\Pi\circ j\circ\varepsilon A\circ j^*$ pour tout A de $\mathcal{B}$.*

D'autre part, étant donné une m.s. α sur $\mathcal{B}$ pour l'espace de Hilbert H_1 et f un élément de l'ensemble $\mathcal{M}$ des applications bornées et mesurables de Π dans $\mathbb{C}$, on montre que :

- pour tout X de H_1, l'application $Z^X_\alpha : A\in\mathcal{B}\mapsto\alpha AX\in H_1$ est une m.a.,
- l'application $\alpha_f : X\in H_1\mapsto\int f\,\mathrm{d}Z^X_\alpha\in H_1$ est linéaire et bornée.

Ces résultats permettent d'introduire la

Définition 2.3. On appelle intégrale de f, élément de $\mathcal{M}$, par rapport à la m.a.o. Z, l'opérateur $Z\Pi\circ j\circ\varepsilon_f\circ j^*$, que l'on note $\int f\,\mathrm{d}Z$.

Il est facile de vérifier la linéarité de cette intégrale et que $\int\mathbb{1}_A\,\mathrm{d}Z=ZA$, pour tout A de $\mathcal{B}$.

Remarquons que l'intégrale par rapport à une m.a.o. est liée à l'intégrale par rapport à une m.a. ; en effet, lorsque Z est une m.a.o., pour tout (f,e') de $\mathcal{M}\times E'$, on a : ${}^q(\int f\,\mathrm{d}Z)e'=\int\bar{f}\,\mathrm{d}Z^{e'}$.

3. Séries stationnaires

On dit qu'une série $(K_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de $\mathcal{K}(H,E)$ est stationnaire lorsque, pour tout couple (n,m) d'éléments de $\mathbb{Z}$, $K_n\circ{}^qK_m=K_{n-m}\circ{}^qK_0$. On montre alors (cf. [1]) qu'il existe une et une seule m.a.o. Z telle que $\int e^{i.n}\,\mathrm{d}Z=K_n$, pour tout n de $\mathbb{Z}$.

Étant donné $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une série d'éléments de $L^2_E(\mathcal{A})$, D. Bosq (cf. [3]) la définit comme stationnaire lorsque, pour tout e' de E', $(e'\circ X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire et lorsque, pour tout couple (e',f') d'éléments de E', les séries $(e'\circ X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $(f'\circ X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont stationnairement corrélées. Comme, pour tout $(e',f')\times(n,m)$ de $E'^2\times\mathbb{Z}^2$, on a

$\langle e' \circ X_n, f' \circ X_m \rangle = \langle {}^q\widetilde{X_m} f', {}^q\widetilde{X_n} e' \rangle = (e', \widetilde{X_n} \circ {}^q\widetilde{X_m} f')_{E',E}$, on peut affirmer qu'une série $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire si et seulement si la série des o.c.a. $(\widetilde{X_n})_{n\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire.

En particulier, lorsque $E = \mathbb{C}^p$ on retrouve la définition usuelle d'une série multidimensionnelle stationnaire adoptée notamment en [5].

Afin d'introduire la notion de la stationnarité au sens strict, munissons $F = E^{\mathbb{Z}}$ de la plus petite tribu $\mathcal{F}$ rendant les applications coordonnées mesurables et notons Θ l'application de F dans lui-même, qui, à $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ associe $(e_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$. On a alors : $\Theta^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$. Lorsque $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une série (banachique) d'éléments de $L^2_E(\mathcal{A})$, l'application mesurable $\breve{X} : \omega \in \Omega \mapsto (X_n(\omega))_{n\in\mathbb{Z}} \in F$ est appelée *variable aléatoire trajectoire associée à la série* $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Nous sommes alors en mesure d'introduire la

Définition 3.1. Une série $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de $L^2_E(\mathcal{A})$ est dite stationnaire au sens strict lorsque la loi de la variable aléatoire trajectoire associée $\breve{X}$ est invariante par Θ, c'est-à-dire telle que $\Theta(\breve{X}(\mathbb{P})) = \breve{X}(\mathbb{P})$.

Lorsque $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une série banachique stationnaire au sens strict, on montre que :

- L'application $\mathcal{J} : T \in L^2_E(F, \mathcal{F}, \breve{X}(\mathbb{P})) \mapsto T \circ \breve{X} \in L^2_E(\Omega, \breve{X}^{-1}(\mathcal{F}), \mathbb{P})$ est une bijection linéaire qui conserve la norme ;
- l'application $J : t \in L^2(F, \mathcal{F}, \breve{X}(\mathbb{P})) \mapsto t \circ \breve{X} \in L^2(\Omega, \breve{X}^{-1}(\mathcal{F}), \mathbb{P})$ est une isométrie surjective ;
- l'application $\mathcal{V} : T \in L^2_E(F, \mathcal{F}, \breve{X}(\mathbb{P})) \mapsto T \circ \Theta \in L^2_E(F, \mathcal{F}, \breve{X}(\mathbb{P}))$ est une bijection linéaire qui conserve la norme ;
- l'application $V : t \in L^2(F, \mathcal{F}, \breve{X}(\mathbb{P})) \mapsto t \circ \Theta \in L^2(F, \mathcal{F}, \breve{X}(\mathbb{P}))$ est un opérateur unitaire.

Il est clair que $\mathcal{U} = \mathcal{J} \circ \mathcal{V} \circ \mathcal{J}^{-1}$ est un endomorphisme bijectif de $L^2_E(\Omega, \breve{X}^{-1}(\mathcal{F}), \mathbb{P})$ qui conserve la norme, et que $U = J \circ V \circ J^{-1}$ un est opérateur unitaire de $L^2(\Omega, \breve{X}^{-1}(\mathcal{F}), \mathbb{P})$. On peut alors affirmer que, pour tout Y de $L^2_E(\Omega, \breve{X}^{-1}(\mathcal{F}), \mathbb{P})$ pour tout n de $\mathbb{Z}$, $\widetilde{\mathcal{U}^n Y} = \widetilde{Y} \circ U^{-n}$. De ce fait, $(\mathcal{U}^n Y)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une série stationnaire. L'opérateur $\mathcal{U}$ joue le rôle d'un opérateur de décalage car, pour tout (S, n) de $\mathcal{L}(E) \times \mathbb{Z}$, on a : $\mathcal{U}(S \circ X_n) = S \circ X_{n+1}$. Bien entendu la série $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire car $\mathcal{U}^n(X_0) = X_n$ pour tout n de $\mathbb{Z}$. De plus, pour tout (e', n) de $E' \times \mathbb{Z}$, on a : $U(\overline{{}^q\widetilde{X_n} e'}) = \overline{{}^q\widetilde{X_{n+1}} e'}$.

4. Mesure aléatoire banachique

Définition 4.1. Une application Z de $\mathcal{B}$ dans $L^2_E(\mathcal{A})$ est une mesure aléatoire banachique (m.a.b.) lorsque

– pour tout couple (A, B) d'éléments disjoints de $\mathcal{B}$: $Z(A \cup B) = ZA + ZB$ et $\widetilde{ZA} \circ {}^q\widetilde{ZB} = 0$;
– pour tout suite $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de $\mathcal{B}$ convergeant en décroissant vers $\varnothing$: $\lim_{n\mapsto\infty} \|ZA_n\|_{L^2_E(\mathcal{A})} = 0$.

Il est alors facile de vérifier que l'application $\widetilde{Z}$ qui, à A de $\mathcal{B}$, associe $\widetilde{ZA}$ de $\mathcal{K}(L^2(\mathcal{A}), E)$ est une m.a.o. appelée *m.a.o. associée à la m.a.b. Z*.

Définition 4.2. On dit qu'un élément f de $\mathcal{M}$ est intégrable par rapport à la m.a.b. Z lorsqu'il existe un élément de $L^2_E(\mathcal{A})$, appelé intégrale de f par rapport à Z et noté $\int f\,\mathrm{d}Z$, dont l'o.c.a. est égal à $\int f\,\mathrm{d}\widetilde{Z}$.

De ce fait, si f de $\mathcal{M}$ est intégrable par rapport à Z, on a : $\widetilde{\int f\,\mathrm{d}Z} = \int f\,\mathrm{d}\widetilde{Z}$. Cette intégrale est bien sûr linéaire et on montre que, pour tout A de $\mathcal{B}$, $\mathbb{1}_A$ est intégrable par rapport à Z et que $\int \mathbb{1}_A\,\mathrm{d}Z = ZA$. De plus, lorsque, pour tout n de $\mathbb{Z}$, $e^{i.n}$ est intégrable par rapport à une m.a.b. Z, la série $(\int e^{i.n}\,\mathrm{d}Z)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire.

Enfin, on a la condition suffisante suivante de décomposition de type « transformée de Fourier banachique » (cf. [2]).

Proposition 4.3. *Si $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une série banachique stationnaire d'éléments de $L^2_E(\mathcal{A})$ telle que $\widetilde{X_0}$ se factorise au travers d'un opérateur de Hilbert–Schmidt, alors il existe une m.a.b. Z telle que $X_n = \int e^{i.n}\,\mathrm{d}Z$, pour tout n de $\mathbb{Z}$.*

5. Approximation d'une série strictement stationnaire

Supposons que E admette une base $\{x_k;\, k \in \mathbb{N}\}$, c'est-à-dire, que, à tout e de E, on peut associer une et une seule suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ telle que $e = \lim_{p\mapsto\infty} \sum_{k=0}^{p} \alpha_k x_k$. L'application f_k qui, à un élément e de E, associe le complexe α_k appartient au dual E'. La famille $\{f_k;\, k \in \mathbb{N}\}$ est appelée *suite des coefficients fonctionnels associée à* $\{x_k;\, k \in \mathbb{N}\}$ (cf. [7]). Si, pour tout p de $\mathbb{N}$, on pose $S_p = \sum_{k=0}^{p} f_k \otimes x_k$, où $f_k \otimes x_k$ est l'application qui, à e de E associe $(f_k, e)_{E'E} x_k$ de E, on peut affirmer que, pour tout e de E, $e = \lim_p S_p(e)$ et que $\|e\| \leqslant \sup\{\|S_p e\|;\, p \in \mathbb{N}\} \leqslant C\|e\|$. De plus, on montre que, pour tout X de $L_E^2(\mathcal{A})$, on a $\lim_p S_p \circ X = X$.

Considérons une série $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de $L_E^2(\mathcal{A})$ stationnaire au sens strict et ϵ un réel strictement positif. Comme la suite $(S_p \circ X_0)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers X_0, il existe donc un entier p tel que $\|X_0 - S_p \circ X_0\| \leqslant \epsilon$. Par ailleurs, la série $(S_p \circ X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire et l'opérateur $\widetilde{S_p \circ X_0} = S_p \circ \widetilde{X_0} = \sum_{k=0}^{p} ({}^q\widetilde{X_0} f_k) \otimes x_k$ se factorise au travers d'un opérateur de Hilbert–Schmidt [2]. D'après la proposition 4.3, il existe une m.a.b. Z_ϵ telle que $S_p \circ X_n = \int e^{i.n}\, \mathrm{d}Z_\epsilon$, pour tout n de $\mathbb{Z}$. Adoptant les notations du paragraphe 3, pour tout n de $\mathbb{Z}$, il vient :

$$\left\| X_n - \int e^{i.n}\, \mathrm{d}Z_\epsilon \right\| = \|X_n - S_p \circ X_n\| = \left\|\mathcal{U}^n(X_0) - \mathcal{U}^n(S_p \circ X_0)\right\| = \|X_0 - S_p \circ X_0\| \leqslant \epsilon.$$

Nous venons de démontrer la

Proposition 5.1. *Lorsque $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une série d'éléments de $L_E^2(\mathcal{A})$ stationnaire au sens strict, à tout élément ϵ de $\mathbb{R}_+^*$, on peut associer une m.a.b. Z_ϵ telle que $\|X_n - \int e^{i.n}\, \mathrm{d}Z_\epsilon\| \leqslant \epsilon$, pour tout n de $\mathbb{Z}$.*

On signale au lecteur intéressé qu'il peut trouver en [2] le cas particulier des m.a.b. à spectre fini et une application aux séries stationnaires périodiques. Enfin, d'autres applications peuvent envisagées comme, par exemple, aux processus ARB [3].

Remerciements

Nous remercions les membres du groupe de travail *Staph* du LSP de Toulouse pour les échanges fructueux ainsi que le rapporteur pour ses remarques judicieuses.

Références

[1] T. Benchikh, A. Boudou, Y. Romain, Mesures aléatoires opératorielles, Publ. Labo. Stat. Probab. 11-2006, Univ. P. Sabatier, Toulouse, 2006, consultable à l'adresse : http://www.lsp.ups-tlse.fr/publicationsdulsp/toutespublis.html.
[2] T. Benchikh, A. Boudou, Y. Romain, Mesures aléatoires banachiques, Publ. Labo. Stat. Probab. 12-2006, Univ. P. Sabatier, Toulouse, 2006, consultable à l'adresse : http://www.lsp.ups-tlse.fr/publicationsdulsp/toutespublis.html.
[3] D. Bosq, Linear Processes in Function Spaces. Theory and Applications, Lecture Notes in Statistics, vol. 149, Springer-Verlag, New York, 2000.
[4] A. Boudou, Y. Romain, On spectral and random measures associated to discrete and continuous-time processes, Statist. Probab. Lett. 59 (2002) 145–157.
[5] D. Brillinger, Time Series Analysis and Theory, Society for Industrial Applied Mathematics, Philadelphia, 2001.
[6] S.A. Chobanjan, A. Weron, Existence of the linear prediction for Banach space-valued Gaussian processes, J. Multivar. Anal. 11 (1981) 69–80.
[7] I. Singer, Bases in Banach Spaces I, Springer-Verlag, Berlin, 1970.