Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007) 239–243
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Problèmes mathématiques de la mécanique

Réduction 3D–1D d'un modèle viscoélastique en grandes déformations

Joëlle Beyrouthy [a,b]

[a] *Université Pierre et Marie Curie–Paris 6, UMR 7598 LJLL, 75005 Paris, France*
[b] *CNRS, UMR 7598 LJLL, 75005 Paris, France*

Reçu le 6 juin 2007 ; accepté le 26 juin 2007

Disponible sur Internet le 27 juillet 2007

Présenté par Philippe G. Ciarlet

Résumé

Nous présentons une réduction 3D–1D pour le modèle viscoélastique en grandes déformations introduit par P. Neff. Cette réduction est effectuée à l'aide d'un Ansatz de Cosserat. Le problème unidimensionnel couplé minimisation/évolution satisfait le principe d'indifférence matérielle et admet une unique solution. ***Pour citer cet article : J. Beyrouthy, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Abstract

3D–1D reduction for a large deformation viscoelastic model. We present a Cosserat-based 3D–1D dimensional reduction for the viscoelastic finite strain model introduced by P. Neff. The reduced 1D model preserves observer invariance. We prove the existence and uniqueness of the solution of the reduced coupled minimization/evolution problem. ***To cite this article: J. Beyrouthy, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Abridged English version

Introduction

We use the Special Cosserat Theory of rods based on two orthogonal directors to reduce the viscoelastic finite strain three-dimensional model introduced by P. Neff in [3] to a one-dimensional model. Let us start by briefly recalling the coupled minimisation/evolution problem introduced by P. Neff. The problem can be expressed: Find a deformation φ and a rotation R, such that at each instant t, $J(\varphi, R) = \inf_{\psi \in \Phi} J(\psi, R)$ and that solves the Cauchy problem for the viscoelastic evolution

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\eta}\nu^+(F, R) \cdot \left(\mu F R^{\mathrm{T}}\right)^a R, \qquad R(0) = R_0.$$

Adresse e-mail : beyrouthy@ann.jussieu.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2007.06.027

Here,

$$J(\varphi, R) = \int_{\Omega} W(F, R)\,\mathrm{d}x - \int_{\Omega} \langle f, \varphi\rangle\,\mathrm{d}x - \int_{\Gamma} \langle N, \varphi\rangle\,\mathrm{d}S$$

is the total energy, f and N are body forces and surface tractions respectively, and $F = \nabla\varphi$ is the deformation gradient. The stored energy function is of the form

$$W(F, R) = \frac{\mu}{4}\,\big\| R^{\mathrm{T}}F + F^{\mathrm{T}}R - 2I \big\|^2 + \frac{\lambda}{8}\big(\mathrm{tr}\big(R^{\mathrm{T}}F + F^{\mathrm{T}}R - 2I\big)\big)^2$$

where $\mu > 0$ and $\lambda \geqslant 0$ are the Lamé constants of the material [2] and Φ is a space of admissible deformations including boundary conditions. The term $\frac{1}{\eta}\,\nu^+(F, R)$ in the evolution equation is a scalar-valued function representing elastic viscosity [5] and η is a relaxation time. In [5,4], Neff presented a 2D reduction of his 3D model. Our present 1D reduction follows comparable but not entirely similar lines. Note that in the case without external surface tractions, P. Neff showed existence and uniqueness of the solution of the reduced 2D minimization problem in $H^1(\omega, \mathbb{R}^3)$ and a unique local solution in time of the coupled problem [4].

The reduced model

Let ω be a bounded open subset of $\mathbb{R}^2$ with Lipschitz boundary and diameter equal to 1. We consider a nonlinear viscoelastic homogeneous body occupying the reference configuration $\Omega_h = h\omega \times \,]0, 1[$, hence $0 < h \ll 1$ is the diameter of the cross section $h\omega$. We denote by (φ_h, R_h) the solution of the three-dimensional viscoelastic problem. We assume without loss of generality, that $\int_\omega x_\alpha\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \int_\omega x_1x_2\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = 0$. Our aim is to find a one-dimensional approximation $(\tilde{\phi}, \tilde{R})$ of (φ_h, R_h), when h is small enough. As we already mentioned, we will use a variant of the Special Cosserat theory of rods [1]: we assume that the approximate deformation $\tilde{\phi}\colon \Omega_h \to \mathbb{R}^3$ obeys the following kinematic Ansatz:

$$\tilde{\phi}(t, x_1, x_2, x_3) = m(t, x_3) + \rho_1(t, x_3)d_1(t, x_3)x_1 + \rho_2(t, x_3)d_2(t, x_3)x_2,$$

where the scalar valued functions $\rho_\alpha : [0, T] \times \,]0, 1[\, \to \mathbb{R}$ take into account Poisson effects in the cross section. Concerning the rotations, we introduce a second Ansatz: $\tilde{R}(t, x_1, x_2, x_3) = \bar{R}(t, x_3)$, and we assume that the first two columns of the matrix $\bar{R}$ and the directors are coupled via the relation $\bar{R}_\alpha = d_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, which is reasonable for small h.

Using the Ansätze, the energy becomes

$$\int_0^1\!\!\int_{h\omega} W(\tilde{F}, \bar{R})\,\mathrm{d}x = \int_0^1 a_h\Big[\mu\|E_m - \mathrm{I}\|^2 + \frac{\lambda}{2}\big(\mathrm{tr}(E_m - \mathrm{I})\big)^2\Big]\mathrm{d}x_3 + \int_0^1 J_\alpha^h\Big[\mu\|E_\alpha\|^2 + \frac{\lambda}{2}\big(\mathrm{tr}(E_\alpha)\big)^2\Big]\mathrm{d}x_3, \tag{1}$$

where $\tilde{F} = ((\rho_1 d_1)(x_3)|\,(\rho_2 d_2)(x_3)|\,m'(x_3)) + (0|\,0|\,(\rho_\alpha d_\alpha)'(x_3)x_\alpha) := A_m + A_\alpha x_\alpha$, $E_m = \frac{1}{2}(\bar{R}^{\mathrm{T}}A_m + A_m^{\mathrm{T}}\bar{R})$, $E_\alpha = \frac{1}{2}(\bar{R}^{\mathrm{T}}A_\alpha + A_\alpha^{\mathrm{T}}\bar{R})$, a_h and J_α^h are the area and the principal moments of inertia of the cross section $h\omega$, respectively.

For a fixed $\bar{R} \in W^{1,p}((0, 1), \mathrm{SO}(3))$, $p \geqslant 1$, and with $\bar{f} \in L^2(I; \mathbb{R}^3)$, the energy density J has a unique minimizer $(m, \rho_1, \rho_2) \in H^1(I; \mathbb{R}^5)$ (plus boundary conditions for m) since it is quadratic, continuous, coercive and strictly convex with respect to m and ρ_α.

We proceed to reduce the three-dimensional evolution equation. We start by replacing F_h with $\widetilde{F} = A_m + A_\alpha x_\alpha$ and R_h by $\bar{R}$. Then, we average $\mu\tilde{F}\bar{R}$ over the cross section $h\omega$ and we obtain

$$\frac{\mathrm{d}\bar{R}}{\mathrm{d}t}(t, x_3) = \nu^+\big(A_m(t, x_3), \bar{R}^{\mathrm{T}}(t, x_3)\big)\cdot\big(A_m(t, x_3)\bar{R}^{\mathrm{T}}(t, x_3)\big)^a\,\bar{R}(t, x_3), \tag{2}$$

since $\int_\omega x_\alpha\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = 0$ and where $A_m = (\rho_1\bar{R}_1|\rho_2\bar{R}_2|m')$.

We write the ordinary differential equation 2 as $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{R}(t) = f(\bar{R}(t)) = g(m'(\bar{R}(t)), \bar{R}(t))$, where

$$g : (m', \bar{R}) \in W^{1,\infty}\big((0, 1); \mathbb{R}^3\big) \times W^{1,\infty}\big((0, 1); \mathrm{SO}(3)\big) \longmapsto \nu^+(A_m, \bar{R})\big(A_m\bar{R}^{\mathrm{T}}\big)^a\bar{R} \in W^{1,\infty}\big((0, 1); M_3\big)$$

and (ρ_α, m) is the unique solution of the minimization problem. Then, we decompose g into three applications which are locally Lipschitz over $W^{1,\infty}$ (see below). Thus we obtain that f is locally Lipschitz with respect to $\bar{R}$ for the

Sobolev norm $W^{1,\infty}$. We can then apply the Cauchy–Lipschitz theorem which gives us the existence of a unique local solution of the ordinary differential equation.

Finally, the reduced model preserves observer invariance under the transformation $(m, \bar{R}) \mapsto (Qm, Q\bar{R})$ (see below).

1. Introduction

On rappelle le modèle viscoélastique en grandes déformations introduit et étudié dans [3]. Une réduction 3D–2D formelle sur la base d'Ansätze de Cosserat en est donnée dans [4,5]. Nous en présentons une réduction 3D–1D dans un esprit proche, mais pas identique, ainsi qu'une étude du modèle unidimensionnel obtenu.

2. Le modèle tridimensionnel viscoélastique de P. Neff

Nous rappelons brièvement le problème tridimensionnel viscoélastique couplé minimisation-évolution introduit par P. Neff [3]. Il s'agit de trouver un couple déformation-rotation $(\varphi, R) : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}^3\ \mathrm{SO}(3)$ où Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^3$, solution d'un problème couplé comportant une minimisation pour la déformation de la forme :

$$\text{à } t \text{ fixé, chercher } \varphi \in \Phi \text{ telle que } J(\varphi, R) = \inf_{\psi \in \Phi} J(\psi, R), \tag{3}$$

(on rappelle que R est une fonction de x et de t) et un problème d'évolution pour la rotation à x fixé

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\eta}\nu^+(F, R) \cdot \left(\mu F R^{\mathrm{T}}\right)^a R, \qquad R(0) = R_0. \tag{4}$$

où

$$J(\varphi, R) = \int_\Omega W(F, R)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \langle f, \varphi\rangle\,\mathrm{d}x - \int_\Gamma \langle N, \varphi\rangle\,\mathrm{d}S$$

est l'énergie totale avec $F = \nabla\varphi$, la densité d'énergie interne W s'exprime à l'aide des constantes de Lamé $\mu > 0$ et $\lambda \geqslant 0$ (voir [2]) par

$$W(F, R) = \frac{\mu}{4}\left\| R^{\mathrm{T}}F + F^{\mathrm{T}}R - 2I \right\|^2 + \frac{\lambda}{8}\left(\mathrm{tr}\left(R^{\mathrm{T}}F + F^{\mathrm{T}}R - 2I\right)\right)^2$$

et Φ est un ensemble de déformations admissibles qui inclut les conditions aux limites. Les fonctions f et N représentent respectivement une densité de forces volumiques et une densité de forces surfaciques appliquées sur une partie Γ du bord de Ω. Pour ce qui concerne l'équation (4), le terme $\frac{1}{\eta}\,\nu^+(F,\ R)$ est une fonction à valeurs scalaires représentant la viscosité élastique dans le domaine élastique et η est le temps de relaxation [5]. Enfin, la notation G^a désigne la partie antisymétrique d'une matrice G. Dans [4], P. Neff a montré dans le cas où $N = 0$ que si $\bar{R} \in W^{1,p}(\omega, \mathrm{SO}(3))$, $p > 2$ et $\bar{f} \in L^2(\omega, \mathbb{R}^3)$ avec une donnée au bord dans $H^1(\omega, \mathbb{R}^3)$, il existe alors une unique solution locale en temps du problème viscoélastique couplé.

3. Réduction 3D–1D

Soit l'ouvert $\Omega = \omega \times \{(0, 0, x_3); 0 < x_3 < 1\}$, où ω est un ouvert bidimensionnel borné du plan $\{x_3 = 0\}$, de frontière lipschitzienne et de diamètre égal à 1. On définit une famille de domaines minces

$$\Omega_h = \left\{(x_1, x_2, x_3);\ (x_1/h, x_2/h, x_3) \in \Omega\right\} = h\omega \times\,]0, 1[,$$

pris comme configurations de référence d'une famille de fils viscoélastiques non linéaires et homogènes. Le diamètre de la section $h\omega$ est égal à h $(0 < h \ll 1)$. On note $(\varphi_h,\ R_h)$ la solution du problème visco-élastique tridimensionnel. On suppose sans perte de généralité que $\int_\omega x_\alpha\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \int_\omega x_1 x_2\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = 0$.

On cherche à définir une approximation unidimensionnelle $(\tilde{\phi}, \tilde{R})$ de (φ_h, R_h) quand h est petit. La déformation $p\tilde{h}i : \Omega_h \to \mathbb{R}^3$ peut être considérée comme la composée de la déformation du fil $m : [0, T] \times\,]0, 1[\, \to \mathbb{R}^3$ et de la déformation de la section $(h\omega)$ décrite par deux directeurs orthonormés $d_\alpha : [0,T] \times]0,1[\to S^2$. Dans l'esprit de la théorie spéciale de Cosserat, voir [1], on fait l'Ansatz cinématique suivant :

$$\tilde{\phi}(t,x_1,x_2,x_3) = m(t,x_3) + \rho_1(t,x_3)d_1(t,x_3)x_1 + \rho_2(t,x_3)d_2(t,x_3)x_2, \tag{5}$$

où les fonctions $\rho_\alpha : [0,T] \times]0,1[\to \mathbb{R}$ permettent de prendre en compte des effets de Poisson dans la section. On introduit un second Ansatz pour les rotations : $\tilde{R}(t,x_1,x_2,x_3) = \bar{R}(t,x_3)$, et l'on fait l'hypothèse, raisonnable pour h petit, que les deux premiers vecteurs colonne de R et les directeurs sont couplés par la relation $\bar{R}_\alpha = d_\alpha$, $\alpha = 1,2$. Dans toute la suite, on adopte la convention d'Einstein sur la sommation des indices répétés et les indices grecs prennent les valeurs 1 ou 2.

Comme

$$\tilde{F} = \big((\rho_1 d_1)(x_3) | (\rho_2 d_2)(x_3) | m'(x_3)\big) + \big(0|0|(\rho_\alpha d_\alpha)'(x_3)x_\alpha\big) := A_m + A_\alpha x_\alpha,$$

où la notation $A = (a_1|a_2|a_3)$ désigne la matrice dont la ième colonne est a_i, remplaçant ces expressions dans l'énergie élastique, celle-ci devient

$$\int_0^1 \int_{h\omega} W(\tilde{F},\bar{R})\,\mathrm{d}x = \int_0^1 a_h\left[\mu\|E_m - \mathrm{I}\|^2 + \frac{\lambda}{2}\big(\mathrm{tr}(E_m - \mathrm{I})\big)^2\right]\mathrm{d}x_3 + \int_0^1 J_\alpha^h\left[\mu\|E_\alpha\|^2 + \frac{\lambda}{2}\big(\mathrm{tr}(E_\alpha)\big)^2\right]\mathrm{d}x_3, \tag{6}$$

où $E_m = \frac{1}{2}(\bar{R}^{\mathrm{T}}A_m + A_m^{\mathrm{T}}\bar{R})$, $E_\alpha = \frac{1}{2}(\bar{R}^{\mathrm{T}}A_\alpha + A_\alpha^{\mathrm{T}}\bar{R})$, a_h et J_α^h sont l'aire et les moments d'inertie principaux de la section ω respectivement. Les termes de force deviennent $-\int_0^1 \langle \bar{f}, m\rangle\,\mathrm{d}x_3$ où $\bar{f}$ représente la résultante de f et de N.

Remarque. Dans le cas 3D–2D [4,5], P. Neff a pu éliminer analytiquement le coefficient ρ décrivant dans ce cas le pincement de la plaque, en imposant l'égalité des forces sur le bord projetée selon le vecteur normal. Cette approche n'est pas utilisable dans le cas du passage 3D–1D, en effet il est bien connu qu'un Ansatz de type Cosserat (5) n'est pas suffisamment riche pour donner naissance à des contraintes pouvant être équilibrées par des forces de surfaces générales sur le bord latéral du fil. Nous avons plutôt travaillé dans l'esprit de l'approche des multiplicateurs de Lagrange prônée par Antman [1], en minimisant l'énergie non seulement par rapport à m (comme le cas de 3D–2D) mais également par rapport aux ρ_α.

On a alors un premier résultat de minimisation avec $\bar{\Phi} = \{m \in H^1(]0,1[;\mathbb{R}^3), m(0) = m_0, m(1) = m_1\}$:

Théorème 3.1. *Soit $I = [0,1]$, on suppose données les rotations $\bar{R} \in W^{1,p}(I,\mathrm{SO}(3))$, $p \geqslant 2$, et la force extérieure $\bar{f} \in L^2(I;\mathbb{R}^3)$. Alors il existe un unique $(m,\rho_1,\rho_2) \in H^1(I;\mathbb{R}^5)$ qui minimise la fonctionnelle J donnée par* (6) *sur $\bar{\Phi} \times H^1(I;\mathbb{R}^2)$.*

En effet, la fonctionnelle J est quadratique, continue, coercive et strictement convexe par rapport à m et ρ_α.

Remarque. Prendre $\bar{R} \in L^\infty((0,1);\mathrm{SO}(3))$ suffit pour montrer le théorème 3.1. Par contre, pour montrer l'existence de la solution du problème d'évolution (voir ci-dessous), nous aurons besoin d'une régularité supplémentaire en espace sur $\bar{R}$.

Il convient de réduire également l'équation d'évolution tridimensionnelle (4). On commence par remplacer F_h par son approximation $\tilde{F} = A_m + A_\alpha x_\alpha$ et R_h par $\bar{R}$. On moyenne ensuite $\mu\tilde{F}\bar{R}$ sur le domaine $h\omega$. Utilisant le fait que l'axe Ox_3 passe par le centre de gravité de chaque section transverse $(h\omega) \times \{x_3\}$, on trouve alors

$$\frac{\mathrm{d}\bar{R}}{\mathrm{d}t}(t,x_3) = \nu^+\big(A_m(t,x_3), \bar{R}^{\mathrm{T}}(t,x_3)\big)\cdot\big(A_m(t,x_3)\bar{R}^{\mathrm{T}}(t,x_3)\big)^a\,\bar{R}(t,x_3), \tag{7}$$

où $A_m = (\rho_1\bar{R}_1|\rho_2\bar{R}_2|m')$. Pour analyser cette équation différentielle ordinaire, on se place dans le cas $p = +\infty$ et $\bar{f} \in L^\infty(I;\mathbb{R}^3)$.

L'équation différentielle ordinaire (7) s'écrit sous la forme $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{R}(t) = G(\bar{R}(t))$, avec $G(\bar{R}) := g(m'(\bar{R}),\bar{R})$, $g : (m',\bar{R}) \in W^{1,\infty}((0,1);\mathbb{R}^3) \times W^{1,\infty}((0,1);\mathrm{SO}(3)) \mapsto \nu^+(A_m,\bar{R})(A_m\bar{R}^{\mathrm{T}})^a\bar{R} \in W^{1,\infty}((0,1);M_3)$ et (ρ_α,m) est la solution du problème de minimisation.

Le but est de montrer que le second membre de l'équation différentielle ordinaire, autrement dit $g(m'(\bar{R}), \bar{R})$, est localement lipschitzien par rapport à $\bar{R}$ pour la norme de Sobolev $W^{1,\infty}$. Pour ce faire, on décompose g en les trois applications suivantes, $K:(\tau, \bar{R}) \in W^{1,\infty}((0,1);\mathbb{R}^3) \times W^{1,\infty}((0,1);\mathrm{SO}(3)) \mapsto (A_\tau \bar{R}^{\mathrm{T}})^a \in W^{1,\infty}((0,1);M_3^a)$, $h: X \in W^{1,\infty}((0,1);M_3^a) \mapsto \nu(X)X \in W^{1,\infty}((0,1);M_3^a)$ et $L_{\bar{R}}: Y \in W^{1,\infty}((0,1);M_3^a) \mapsto Y\bar{R} \in W^{1,\infty}((0,1);M_3)$. On a bien $G(\bar{R}) := g(m', \bar{R}) = (L_{\bar{R}} \circ h \circ K)(m', \bar{R})$.

Notons que $L_{\bar{R}}$ est linéaire et h est $C^3(M_3;M_3)$ (grâce à l'expression de ν^+), elles sont donc localement lipschitziennes et par suite leur caractère localement lipschitzien dans $W^{1,\infty}$ en découle facilement. Par contre, pour montrer celui de K, il suffit de vérifier que l'application $\bar{R} \in W^{1,\infty}((0,1);\mathrm{SO}(3)) \mapsto A_m \in W^{1,\infty}((0,1);M_3)$ est localement lipschitzienne. Ceci se montre par la composition $\bar{R} \mapsto (\rho, m)$, puis $(\rho, m) \mapsto A_m$, pour tout $(\rho, m) \in W^{2,\infty}((0,1);\mathbb{R}^2)) \times W^{2,\infty}((0,1);\mathbb{R}^3)$. Le point le plus délicat est la dépendance lipschitzienne de l'application $\bar{R} \mapsto (\rho, m)$ qui se traite à partir des estimations en normes H^1 et H^2 obtenues respectivement à l'aide de la formulation variationnelle et des formes fortes de l'équation d'Euler–Lagrange du problème de minimisation. Ainsi, l'injection continue de Sobolev en dimension 1, $H^2 \hookrightarrow W^{1,\infty}$, nous donne le résultat voulu.

Enfin, on trouve que g est localement lipschitzienne étant la composée de trois applications lipschitziennes. Et comme G envoie bien $W^{1,\infty}$ dans $W^{1,\infty}$, on peut donc appliquer le théorème de Cauchy–Lipschitz et obtenir par la suite l'existence locale et l'unicité de la solution de l'équation différentielle ordinaire (7). On a aussi montré le théorème suivant :

Théorème 3.2. *Soit $I = [0,1]$, on suppose la force extérieure $\bar{f} \in C^0([0,+\infty]; L^\infty(I;\mathbb{R}^3))$ et la condition initiale sur la rotation $\bar{R}_0 \in W^{1,\infty}(I;\mathrm{SO}(3))$. Alors il existe un temps $T^\star$ maximal tel que le problème viscoélastique couplé admette une unique solution*

$$(m, \rho, \bar{R}) \in C^0\big([0, T^\star[; W^{2,\infty}\big(I;\mathbb{R}^3\big)\big) \times C^0\big([0, T^\star[; W^{2,\infty}\big(I;\mathbb{R}^2\big)\big) \times C^1\big([0, T^\star[; W^{1,\infty}\big(I;\mathrm{SO}(3)\big)\big).$$

Remarque. L'analyse d'existence locale présentée ci-dessus s'étend au cas d'une force $\bar{f}$ dans L^p avec une rotation $\bar{R}$ dans $W^{1,p}$ pour tout $p \in [2, +\infty]$.

Notons enfin que le modèle couplé réduit satisfait le principe d'indifférence matérielle sous la transformation $(m, \bar{R}) \mapsto (Qm, Q\bar{R})$, autrement dit on a

$$\forall Q \in \mathrm{SO}(3), \quad W(QF, Q\bar{R}) = W(F, \bar{R}) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Q\bar{R}) = Q\nu^+\mu\big(A_m\bar{R}^{\mathrm{T}}\big)^a\bar{R}, \quad (Q\bar{R})(0) = Q\bar{R}_0,$$

où $F = A_m + A_\alpha x_\alpha$. En effet, il suffit de remarquer que $Q^{\mathrm{T}}Q = I$ et que $(QA_m\bar{R}^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}})^a = Q(A_m\bar{R}^{\mathrm{T}})^aQ^{\mathrm{T}}$.

Références

[1] S. Antman, Nonlinear Problems of Elasticity, second edition, Applied Mathematical Sciences, vol. 107, Springer, New York, 2005.

[2] P.G. Ciarlet, Mathematical Elasticity, Volume I: Three-Dimensional Elasticity, North-Holland, Amsterdam, 1988.

[3] P. Neff, Finite multiplicative plasticity for small elastic strains with linear balance equations and grain boundary relaxation, Contin. Mech. Thermodyn. 15 (2) (2003) 161–195.

[4] P. Neff, Local existence and uniqueness for a geometrically exact membrane-plate with viscoelastic transverse shear resistance, Math. Methods Appl. Sci. 28 (9) (2005) 1031–1060.

[5] P. Neff, A geometrically exact viscoplastic membrane-shell with viscoelastic transverse shear resistance avoiding degeneracy in the thin-shell limit. Part I: The viscoelastic membrane-plate, Z. Angew. Math. Phys. 56 (1) (2005) 148–182.