Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007) 193–198
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Algèbre homologique/Théorie des groupes

Cohomologie du groupe linéaire à coefficients dans les polynômes de matrices

Antoine Touzé

Laboratoire de mathématiques Jean-Leray, UMR 6629 CNRS : UN/ECN, 2, rue de la Houssinière, BP 92208, 44322 Nantes cedex 3, France

Reçu le 12 février 2007 ; accepté après révision le 26 juin 2007

Disponible sur Internet le 2 août 2007

Présenté par Jean-Louis Koszul

Résumé

Nous calculons la cohomologie de bifoncteur des polynômes de matrices sous l'action de conjugaison et détectons des candidats pour des classes cohomologiques universelles en théorie des invariants supérieurs. ***Pour citer cet article : A. Touzé, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Abstract

Cohomology of the linear group with coefficients in matrix polynomials. We compute bifunctor cohomology for matrix polynomials under conjugation and detect candidates for universal cohomology classes in higher invariant theory. ***To cite this article: A. Touzé, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Abridged English version

Over the past twelve years, the study of functor cohomology has led to numerous computations and applications [6,5,2], including the proof of finite generation of the cohomology of finite group schemes [6]. In [4], Franjou and Friedlander initiated the study of the cohomology $H^*_{\mathcal{P}}(GL, B)$ of strict polynomial bifunctors B. This article extends the computations achieved in [4].

Our results are a starting point for new computations and applications. Indeed, the cohomology of a bifunctor B of homogeneous bidegree (b, b) computes [4, Th 1.5] the rational cohomology of GL_n with coefficients $B(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ for $n \geqslant b$:

$$H^*_{\mathcal{P}}(GL, B) \simeq H^*_{\mathrm{rat}}\big(GL_n, B\big(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n\big)\big).$$

If $\mathbb{K}$ is a finite field, bifunctor cohomology also computes [4, Th 8.2] the stabilized cohomology of general linear groups. As noted in [3] and [4, Section 8], this is a step towards the K-theory of dual numbers and $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

Adresse e-mail : antoine.touze@univ-nantes.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2007.06.024

If F is a functor, we denote by Fgl the precomposition by the bifunctor $gl(-_1,-_2) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(-_1,-_2)$ and $F^{(r)}$ the postcomposition by the r times iterated Frobenius twist. Our main theorem is:

Theorem 0.1. *Let $\mathbb{K}$ be a field of characteristic $p > 0$ and $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ a partition of weight d. The Poincaré series of $H^*_{\mathcal{P}}(GL, S^{\mu_1(r)}gl \otimes \cdots \otimes S^{\mu_n(r)}gl)$ equals the Poincaré series of the coinvariants of $H^*_{\mathcal{P}}(GL, \otimes^{d(r)}gl)$ under the action of the subgroup $\mathfrak{S}_{\mu_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\mu_n}$ of $\mathfrak{S}_d$.*

This theorem was previously known only for $d < p$ [4, Prop 4.1] and for $d = p = 2$ [4, Th 5.1]. It gives a handy computation since $H^*_{\mathcal{P}}(GL, \otimes^{d(r)}gl)$ as a nice $\mathfrak{S}_d$-module structure explicitly described in [4, Th 1.8]. In particular, $H^*_{\mathcal{P}}(GL, S^{\mu(r)}gl)$ is zero in odd degrees.

In the second section, we prove our theorem in two steps. First, we use a representation theoretic construction [1] which changes the problem into a computation in the category $\mathcal{P}$. Thanks to [2], the result may be stated in terms of $\mathfrak{S}_d$-modules. In the second step, we reorganize the formula obtained. It is an easy job if the characteristic is big enough, and we use a base change argument to do it in all characteristics. This argument is detailed in the third section.

To extend the results of [6, §1], van der Kallen explains in [8] why it would be useful to get classes in the rational cohomology of GL_n with divided powers of gl as coefficients. Our theorem may be used to obtain some information about such classes. For example, general duality phenomena imply the following:

Theorem 0.2. *Let F be a strict polynomial functor and $F^\sharp$ its Kuhn dual. The Euler–Poincaré characteristic of $H^*_{\mathcal{P}}(GL, Fgl)$ equals the one of $H^*_{\mathcal{P}}(GL, F^\sharp gl)$.*

As a result, we get an interesting minoration of the size of the cohomology of $\Gamma^{n(r)}gl$. We obtain other qualitative information such as:

Proposition 0.3. *The highest cohomology class of $\Gamma^{p^k(r)}gl$ is in degree $p^k(2p^r - 2) + 2p^k - 2$.*

Finally we are also able to perform exact computations:

Proposition 0.4. *Let $\mathbb{K}$ be a field of characteristic $p > 0$. The Poincaré series of $H^*_{\mathcal{P}}(GL, \Gamma^{p(r)}gl)$ is obtained by adding $(t + t^2 + \cdots + t^{2p-2})(1 - t^{2p^{r+1}})/(1 - t^{2p})$ to the Poincaré series of $H^*_{\mathcal{P}}(GL, S^{p(r)}gl)$.*

1. Introduction

Depuis une douzaine d'années, la cohomologie des foncteurs a permis de nombreux calculs et applications [6,5,2], parmi lesquelles la démonstration [6] de l'engendrement fini de l'algèbre de cohomologie des schémas en groupes finis. Dans [4], Franjou et Friedlander entament l'étude de la cohomologie $H^*_{\mathcal{P}}(GL, B)$ des bifoncteurs B strictement polynomiaux. Cet article étend les premiers calculs effectués dans [4].

Nos résultats peuvent servir de base pour d'autres calculs et laissent également entrevoir de nombreuses applications. Ainsi, la cohomologie d'un bifoncteur B homogène de degré (b, b) calcule [4, Th 1.5] la cohomologie rationnelle de GL_n à coefficients dans $B(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ pour $n \geqslant b$:

$$H^*_{\mathcal{P}}(GL, B) \simeq H^*_{\mathrm{rat}}\big(GL_n, B\big(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n\big)\big).$$

La cohomologie des bifoncteurs calcule également [4, Th 8.2] la cohomologie stable des groupes discrets $GL_n(\mathbb{K})$ sur un corps fini $\mathbb{K}$. Comme il est noté dans [3] et [4, Section 8], c'est là un premier pas vers la K-théorie de l'anneau des nombres duaux et de $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

Si F est un foncteur, on note Fgl la précomposition par le bifoncteur $gl(-_1,-_2) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(-_1,-_2)$ et $F^{(r)}$ la postcomposition par le r-ième twist de Frobenius [4]. Notre théorème principal est :

Théorème 1.1. *Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique $p > 0$ et $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ une partition de poids d. La série de Poincaré de $H^*_{\mathcal{P}}(GL, S^{\mu_1(r)}gl \otimes \cdots \otimes S^{\mu_n(r)}gl)$ est égale à la série de Poincaré des coinvariants de $H^*_{\mathcal{P}}(GL, \otimes^{d(r)}gl)$ sous l'action du sous-groupe $\mathfrak{S}_{\mu_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\mu_n}$ de $\mathfrak{S}_d$.*

Ce théorème n'était auparavant connu que pour $d < p$ [4, prop 4.1] et pour $d = p = 2$ [4, Th 5.1]. Il donne un résultat aisément calculable à partir du $\mathfrak{S}_d$-module $H^*_{\mathcal{P}}(GL, \otimes^{d(r)}gl)$ qui est explicitement décrit dans [4, Th 1.8]. En particulier, $H^*_{\mathcal{P}}(GL, S^{\mu(r)}gl)$ est nulle en degrés impairs.

Dans le deuxième paragraphe, nous démontrons le Théorème 1.1 en deux étapes. Tout d'abord, une construction de théorie des représentations [1] nous ramène à un calcul d'Ext dans la catégorie $\mathcal{P}$. Grâce à [2], le résultat s'exprime en termes de $\mathfrak{S}_d$-modules. Dans la deuxième étape, nous réorganisons l' expression obtenue. C'est facile quand la caractéristique p est grande, puis un argument de changement de base nous permet de le faire en toute caractéristique. Pour plus de clarté, le détail de cet argument est isolé dans le troisième paragraphe.

Pour étendre les résultats de [6, §1], van der Kallen explique dans [8] l'intérêt d'obtenir des classes pour les coefficients en puissances divisées de gl. Nous pouvons utiliser notre théorème pour obtenir des informations sur de telles classes. Par exemple, des phénomènes de dualité généraux impliquent le :

Théorème 1.2. *Soit F un foncteur strictement polynomial et $F^\sharp$ son dual de Kuhn. La caractéristique d'Euler–Poincaré de $H^*_{\mathcal{P}}(GL, Fgl)$ est égale à celle de $H^*_{\mathcal{P}}(GL, F^\sharp gl)$.*

On obtient ainsi une minoration intéressante de la taille de la cohomologie de $\Gamma^{n(r)}gl$. Nous pouvons aussi obtenir d'autres renseignements qualitatifs tels que :

Proposition 1.3. *Le degré maximal de la cohomologie de $\Gamma^{p^k(r)}gl$ est $p^k(2p^r - 2) + 2p^k - 2$.*

Enfin, nous pouvons obtenir des calculs exacts :

Proposition 1.4. *Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique p. La série de Poincaré de $H^*_{\mathcal{P}}(GL, \Gamma^{p(r)}gl)$ se déduit de celle de $H^*_{\mathcal{P}}(GL, S^{p(r)}gl)$ en ajoutant $(t + t^2 + \cdots + t^{2p-2})(1 - t^{2p^{r+1}})/(1 - t^{2p})$.*

2. Calcul de la série de Poincaré de $H^*_{\mathcal{P}}(GL, S^{\mu(r)}gl)$

Nous utilisons les notations suivantes. Si $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ est une partition et E^* un foncteur exponentiel, E^μ désigne le foncteur $E^{\mu_1} \otimes \cdots \otimes E^{\mu_n}$. Si A et B sont des foncteurs polynomiaux stricts, on note $\mathcal{H}om(A, B)$ le bifoncteur polynomial strict $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A(-_1), B(-_2))$. Les bifoncteurs de ce type sont dits séparables et [4, Prop 2.2] donne un isomorphisme naturel : $H^*_{\mathcal{P}}(GL, \mathcal{H}om(A, B)) \simeq \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(A, B)$.

Étape 1. La première étape du calcul repose sur une construction d'Akin, Buchsbaum et Weyman [1, Th III.1.4 pp. 244–245] que nous reformulons ici en termes de bifoncteurs :

Théorème 2.1. *Soit k un entier. L'ordre lexicographique sur les partitions de poids k induit une filtration de $S^k gl$ par des bifoncteurs strictement polynomiaux :*

$$0 \subseteq M_{(k)} \subseteq M_{(k-1,1)} \subseteq \cdots \subseteq M_{(1,\dots,1)} = S^k gl.$$

Le premier terme $M_{(k)}$ est isomorphe à $\mathcal{H}om(\Lambda^k, \Lambda^k)$, et si $\dot\lambda$ est la partition suivant λ pour l'ordre lexicographique on a une suite exacte courte :

$$M_{\dot\lambda} \hookrightarrow M_\lambda \twoheadrightarrow \mathcal{H}om(W_\lambda, S_\lambda).$$

La cohomologie du gradué de cette filtration est bien connue [2, Th 6.1]. En particulier, si $S_{\lambda/\lambda'}$ (resp. $W_{\lambda/\lambda'}$) désigne le foncteur de Schur (resp. de Weyl) associé au diagramme gauche λ/λ', la cohomologie du bifoncteur $\mathcal{H}om(W_{\lambda/\lambda'}{}^{(r)}, S^{(r)}_{\lambda/\lambda'})$ est nulle en degré impair. En conséquence, toutes les suites exactes courtes associées à la filtration de $S^{k(r)}gl$ scindent en cohomologie. La cohomologie de $S^{k(r)}gl$ est donc isomorphe à la cohomologie du gradué de sa filtration.

Si μ est une partition, la cohomologie de $S^{\mu(r)}gl$ se calcule de manière similaire. Pour exprimer le résultat de façon concise, on note $(\lambda_1|\lambda_2|\cdots|\lambda_n)$ le diagramme gauche tel que $S_{(\lambda_1|\lambda_2|\cdots|\lambda_n)} = S_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes S_{\lambda_n}$.

Proposition 2.2. *Soit $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ une partition de poids d. On a un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués :*

$$H^*_{\mathcal{P}}\big(GL, S^{\mu(r)}gl\big) \simeq \bigoplus_{|\lambda_1|=\mu_1 \cdots |\lambda_n|=\mu_n} \mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}\big(W^{(r)}_{(\lambda_1|\lambda_2|\cdots|\lambda_n)}, S^{(r)}_{(\lambda_1|\lambda_2|\cdots|\lambda_n)}\big).$$

Remarque 1. Si la caractéristique p est grande, l'isomorphisme de la proposition peut s'obtenir directement en observant que la filtration scinde. En effet, si $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est une partition de poids $k < p$, l'application structurelle $\Lambda^\lambda \twoheadrightarrow S_\lambda$ admet une section b_λ. En notant $m : \otimes^k \twoheadrightarrow S^k$ le produit et $\Delta : \Lambda^\lambda \hookrightarrow \otimes^k$ le coproduit, on peut alors définir ϕ_λ comme la composée :

$$\mathcal{H}om(W_\lambda, S_\lambda) \xrightarrow{\mathcal{H}om(b^\sharp_\lambda, b_\lambda)} \mathcal{H}om\big(\Lambda^\lambda, \Lambda^\lambda\big) \xrightarrow{\mathcal{H}om(\Delta^\sharp, \Delta)} gl^{\otimes k} \xrightarrow{\frac{m}{\lambda_1! \cdots \lambda_n!}} S^k gl.$$

L'examen de la construction d'Akin Buchsbaum et Weyman montre alors que $\oplus\phi_\lambda : \oplus\mathcal{H}om(W_\lambda, S_\lambda) \to S^k gl$ est un isomorphisme.

Étape 2. Si F est un foncteur polynomial de degré d, on peut lui associer une symétrisation injective [2, Def 3.2, Prop 3.4], notée par la minuscule f. En particulier, f est un foncteur des $\mathfrak{S}_d$-modules à gauche vers les espaces vectoriels vérifiant $f(V^{\otimes d}) = F(V)$. Par exemple, si N est un $\mathfrak{S}_d$-module à gauche, $s^\mu(N) = {}_{\mathfrak{S}_\mu}N$ et $s_\mu(N)$ désigne l'image de la composée : ${}^{\mathfrak{S}_\mu \mathrm{alt}}N \hookrightarrow N \twoheadrightarrow {}_{\mathfrak{S}_{\tilde{\mu}}}N$.

Si M est un $\mathfrak{S}_d$-bimodule, on note Mf (resp. fM) le $\mathfrak{S}_d$-module à gauche (resp. à droite) obtenu en appliquant f à la structure de droite (resp. de gauche). On désigne également par Δ^*M le $\mathfrak{S}_d$-module à gauche obtenu par restriction de l'action de $\mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d^{\mathrm{op}}$ au sous-groupe $\mathfrak{S}_d = \{(\sigma, \sigma^{-1})\} \subset \mathfrak{S}_d \times \mathfrak{S}_d^{\mathrm{op}}$.

La Proposition 2.2 et [2, Th 6.1] donnent une description de $H^*_{\mathcal{P}}(GL, S^{\mu(r)}gl)$ à partir du $\mathfrak{S}_d$-bimodule $H^*_{\mathcal{P}}(GL, \otimes^{d(r)}gl)$ décrit dans [4, Th 1.8] et [2, p. 780] :

$$H^*_{\mathcal{P}}\big(GL, S^{\mu(r)}gl\big) \simeq \bigoplus_{|\lambda_1|=\mu_1 \cdots |\lambda_n|=\mu_n} \big(s_{(\lambda_1|\cdots|\lambda_n)}\, H^*_{\mathcal{P}}(GL, \otimes^{d(r)}gl)\big) s_{(\lambda_1|\cdots|\lambda_n)}.$$

Dans cette deuxième étape, nous simplifions cette expression. Pour cela, on peut tout d'abord supposer qu'on travaille sur un corps de base $\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{F}_p$ d'après [4, Prop 3.1]. On peut décomposer $H^*_{\mathcal{P}}(GL, \otimes^{d(r)}gl)$ en une somme directe de bimodules élémentaires dans le sens suivant :

Définition 2.3. Soit R un anneau. On appelle bimodule élémentaire sur R un R-module de la forme : $R\mathfrak{S}_d/\mathfrak{S}_\gamma \otimes R\mathfrak{S}_d$ avec $\mathfrak{S}_\gamma$ un sous-groupe de Young, muni de la structure de bimodule donnée par l'action suivante sur la base :

$$\lambda.e_{[\tau]} \otimes e_\sigma.\mu = e_{[\lambda.\tau]} \otimes e_{\lambda.\sigma.\mu}.$$

Lorsque p est assez grand ($p > d$), la multiplication $m : \otimes^d gl \to S^\mu gl$ induit un isomorphisme de $s^\mu \Delta^* H^*_{\mathcal{P}}(GL, \otimes^{d(r)}gl)$ vers $H^*_{\mathcal{P}}(GL, S^{\mu(r)}gl)$. Utilisons les notations de la remarque 1. D'après [2, Th 6.1], l'isomorphisme $\oplus\phi_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{\lambda_n}$ induit une transformation naturelle :

$$\bigoplus_{|\lambda_1|=\mu_1 \cdots |\lambda_n|=\mu_n} \big(s_{(\lambda_1|\cdots|\lambda_n)} -\big)\, s_{(\lambda_1|\cdots|\lambda_n)} \to s^\mu \Delta^*$$

dont l'évaluation sur le $\mathfrak{S}_d$-bimodule $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{P}}(\otimes^{d(1)}, \otimes^{d(1)})$ est un isomorphisme. Si M est un $\mathfrak{S}_d$-bimodule élémentaire, M est facteur direct dans ce bimodule et on a donc (toujours avec $p > d$) :

$$\dim s^\mu \Delta^* M = \dim \bigoplus_{|\lambda_1|=\mu_1 \cdots |\lambda_n|=\mu_n} \big(s_{(\lambda_1|\cdots|\lambda_n)} M\big) s_{(\lambda_1|\cdots|\lambda_n)} \tag{$*$}$$

Mais la dimension de $s^\mu \Delta^* M$ est indépendante de la caractéristique, et d'après la Proposition 3.5, il en va de même pour la dimension des $(s_{(\lambda_1|\cdots|\lambda_n)} M) s_{(\lambda_1|\cdots|\lambda_n)}$. L'égalité $(*)$ est donc valable pour tout bimodule élémentaire M et toute valeur de la caractéristique p.

Le théorème découle maintenant du fait que $H^*_{\mathcal{P}}(GL, \otimes^{d(r)}gl)$ est une somme directe de bimodules élémentaires.

3. Changement de base pour les bimodules élémentaires

Lemme 3.1. *Soit M un bimodule élémentaire sur $\mathbb{F}_p$ et μ et λ deux diagrammes gauches. Les applications naturelles* : $(s_\mu M)_{\mathfrak{S}_\lambda} \to s_\mu(M_{\mathfrak{S}_\lambda})$ *et* $s_\mu(M^{\mathrm{alt}\mathfrak{S}_\lambda}) \to (s_\mu M)^{\mathrm{alt}\mathfrak{S}_\lambda}$ *sont des isomorphismes.*

Démonstration. Nous démontrons le premier isomorphisme. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(s_\mu M)_{\mathfrak{S}_\lambda} \arrow[r, "(1)"] & s_\mu(M_{\mathfrak{S}_\lambda}) \\
({}^{\mathfrak{S}_\mu\mathrm{alt}}M)_{\mathfrak{S}_\lambda} \arrow[u] \arrow[r, "(2)"] & {}^{\mathfrak{S}_\mu\mathrm{alt}}(M_{\mathfrak{S}_\lambda}). \arrow[u, two heads]
\end{tikzcd}$$

La flèche (2) est un isomorphisme car les actions sont définies sur une base de M. Par conséquent, (1) est surjective. On peut conclure car la source et le but de (1) ont la même dimension d'après [2, Th 6.1]. □

Définition 3.2. Soit M un $\mathfrak{S}_d$-bimodule et λ et μ des diagrammes gauches. On définit $s_\mu M s_\lambda$ comme l'image de l'application composée :

$$ {}^{\mathfrak{S}_\mu\mathrm{alt}}\big(M^{\mathrm{alt}\mathfrak{S}_\lambda}\big) \hookrightarrow M \twoheadrightarrow ({}_{\mathfrak{S}_{\tilde{\mu}}}M)_{\mathfrak{S}_{\tilde{\lambda}}}.$$

Lemme 3.3. *Soit M un bimodule élémentaire sur $\mathbb{Z}$ et λ et μ des diagrammes gauches. On a* :

$$\dim\big(s_\mu(\mathbb{F}_p \otimes M)\big)s_\lambda \leqslant \operatorname{rang} s_\mu M s_\lambda.$$

De plus, l'inégalité est en fait une égalité si p est assez grand.

Démonstration. Notons $M_{\mathbb{F}_p}$ le bimodule élémentaire $M \otimes \mathbb{F}_p$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
{}^{\mathfrak{S}_\mu\mathrm{alt}}(M_{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{alt}\mathfrak{S}_\lambda}) \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & s_\mu(M_{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{alt}\mathfrak{S}_\lambda}) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, hook] & (s_\mu M_{\mathbb{F}_p})^{\mathrm{alt}\mathfrak{S}_\lambda} \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & (s_\mu M_{\mathbb{F}_p})_{\mathfrak{S}_{\tilde{\lambda}}} \arrow[d, "i_{\mathfrak{S}_{\tilde{\lambda}}}"] \\
M_{\mathbb{F}_p} \arrow[r, two heads] & {}_{\mathfrak{S}_{\tilde{\mu}}}M_{\mathbb{F}_p} \arrow[r, "="] & {}_{\mathfrak{S}_{\tilde{\mu}}}M_{\mathbb{F}_p} \arrow[r, two heads] & ({}_{\mathfrak{S}_{\tilde{\mu}}}M_{\mathbb{F}_p})_{\mathfrak{S}_{\tilde{\lambda}}}.
\end{tikzcd}$$

On vérifie que $i_{\mathfrak{S}_{\tilde{\lambda}}}$ est injective. Une chasse dans le diagramme montre alors que $s_\mu M_{\mathbb{F}_p} s_\lambda = (s_\mu M_{\mathbb{F}_p})s_\lambda$.

Regardons maintenant le diagramme de $\mathbb{Z}$-modules dont les flèches verticales sont des surjections induites par la réduction modulo p : $M \twoheadrightarrow M_{\mathbb{F}_p}$:

$$\begin{tikzcd}
{}^{\mathfrak{S}_\mu\mathrm{alt}}(M^{\mathrm{alt}\mathfrak{S}_\lambda}) \arrow[r, hook] \arrow[d] & M \arrow[r, two heads] \arrow[d] & ({}_{\mathfrak{S}_{\tilde{\mu}}}M)_{\mathfrak{S}_{\tilde{\lambda}}} \arrow[d] \\
{}^{\mathfrak{S}_\mu\mathrm{alt}}(M_{\mathbb{F}_p}^{\mathrm{alt}\mathfrak{S}_\lambda}) \arrow[r, hook] & M_{\mathbb{F}_p} \arrow[r, two heads] & ({}_{\mathfrak{S}_{\tilde{\mu}}}M_{\mathbb{F}_p})_{\mathfrak{S}_{\tilde{\lambda}}}.
\end{tikzcd}$$

Puisque $({}_{\mathfrak{S}_{\tilde{\mu}}}M)_{\mathfrak{S}_{\tilde{\lambda}}}$ est un $\mathbb{Z}$-module libre, il en va de même pour $s_\mu M s_\lambda$ et on en déduit le résultat. □

Lemme 3.4. *Soient λ et μ des diagrammes gauches et k un entier. La dimension de* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(W_\mu \circ kI, S_\lambda)$ *ne dépend pas du corps.*

Démonstration. Grâce à [1, Th II.2.16 et II.3.16], les foncteurs de Schur S_λ et de Weyl W_μ sont en fait des foncteurs polynomiaux stricts sur $\mathbb{Z}$ au sens de [7, Section 2]. En copiant la démonstration de [7, Prop 2.8], on montre que le foncteur $S_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$ (resp. $W_\mu \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$) obtenu par changement de base n'est autre que le foncteur de Schur (resp. Weyl) défini sur $\mathbb{F}_p$. On utilise alors [7, Prop 2.6] pour conclure. □

Proposition 3.5. *Soient λ, μ des diagrammes gauches de poids d. Pour tout bimodule élémentaire $M = \mathbb{F}_p\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_\gamma \otimes \mathbb{F}_p\mathfrak{S}_n$ la dimension de $(s_\mu M)s_\lambda$ ne dépend pas de p.*

Démonstration. Les démonstrations de [2, Th 4.4 et Th 6.1] montrent l'égalité suivante, valable pour tout entier k et tout nombre premier p :

$$\dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{P},\mathbb{F}_p}(W_\mu \circ kI, S_\lambda) = \dim\big(s_\mu \operatorname{Hom}_{\mathcal{P},\mathbb{F}_p}\big((kI)^{\otimes d}, \otimes^d\big)\big)s_\lambda \tag{$*$}$$

Soient p et q des nombres premiers, avec q suffisamment grand pour que l'inégalité du lemme 3.3 soit une égalité pour tout $\mathfrak{S}_d$-bimodule élémentaire. (Ceci est possible car il n'y en a qu'un nombre fini à isomorphisme près.) Alors pour tout bimodule élémentaire M sur $\mathbb{Z}$ on a l'inégalité :

$$\dim\big(s_\mu(M \otimes \mathbb{F}_p)\big)s_\lambda \leqslant \dim\big(s_\mu(M \otimes \mathbb{F}_q)\big)s_\lambda.$$

Mais $\operatorname{Hom}_{\mathcal{P},\mathbb{F}_p}((dI)^{\otimes d}, \otimes^d)$ contient tous les bimodules élémentaires comme facteurs directs. En conséquence, $(*)$ et le lemme 3.4 montrent que l'inégalité précédente est en fait une égalité, ce qui achève la démonstration. □

Références

[1] K. Akin, D.A. Buchsbaum, J. Weyman, Schur functors and Schur complexes, Adv. in Math. 44 (3) (1982) 207–278.

[2] M. Chałupnik, Extensions of strict polynomial functors, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 38 (5) (2005) 773–792.

[3] L. Evens, E.M. Friedlander, On $K^*(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ and related homology groups, Trans. Amer. Math. Soc. 270 (1982) 1–46.

[4] V. Franjou, E.M. Friedlander, Cohomology of bifunctors, Proc. London Math. Soc., à paraître, math/0509089 v2.

[5] V. Franjou, E.M. Friedlander, A. Scorichenko, A. Suslin, General linear and functor cohomology over finite fields, Ann. of Math. 150 (2) (1999) 663–728.

[6] E.M. Friedlander, A. Suslin, Cohomology of finite group scheme over a field, Invent. Math. 127 (1997) 235–253.

[7] A. Suslin, E.M. Friedlander, C.P. Bendel, Infinitesimal 1-parameter subgroups and cohomology, J. Amer. Math. Soc. 10 (3) (1997) 693–728.

[8] W. van der Kallen, Cohomology with Grosshans graded coefficients. Invariant theory in all characteristics, in: CRM Proc. Lecture Notes, vol. 35, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, pp. 127–138.