Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007) 209–212
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie algébrique

Courbes elliptiques, fibrations et automorphismes des surfaces de Fano

Xavier Roulleau

Université d'Angers, département de mathématiques, 2, boulevard Lavoisier, 49045 Angers cedex 01, France

Reçu le 23 avril 2007 ; accepté après révision le 26 juin 2007

Disponible sur Internet le 30 juillet 2007

Présenté par Jean-Pierre Serre

Résumé

Dans cette Note, nous classifions les configurations formées par les courbes elliptiques des surfaces de Fano. Nous montrons le lien entre courbes elliptiques et automorphismes d'ordre 2 d'une telle surface. Nous étudions alors la surface de Fano de la cubique de Fermat de $\mathbb{P}^4$. ***Pour citer cet article : X. Roulleau, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Abstract

Elliptic curves, fibrations and automorphisms of Fano's surfaces. In this Note we classify the Fano's surfaces according to the configuration of their elliptic curves. We show the link between these curves and order 2 automorphisms of such a surface. Then we examine the Fano's surface of the Fermat's cubic of $\mathbb{P}^4$. ***To cite this article: X. Roulleau, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

1. Cadre théorique de l'étude

Soit $S_{/\mathbb{C}}$ une surface lisse de type général dont le fibré cotangent Ω_S est engendré par l'espace $H^o(\Omega_S)$ de ses sections globales et d'irrégularité $q > 3$. Notons T_S le fibré tangent, $\pi : \mathbb{P}(T_S) \to S$ la projection sur S du projectivisé du fibré tangent et $O_{\mathbb{P}(T_S)}(1)$ le fibré inversible tel que : $\pi_*(O_{\mathbb{P}(T_S)}(1)) \simeq \Omega_S$. Puisque le morphisme $H^o(\Omega_S) \otimes O_S \to \Omega_S$ est surjectif, le morphisme $H^o(\Omega_S) \otimes O_{\mathbb{P}(T_S)} \to O_{\mathbb{P}(T_S)}(1)$ est surjectif et définit un morphisme :

$$\psi : \mathbb{P}(T_S) \to \mathbb{P}\big(H^o(\Omega_S)^*\big) = \mathbb{P}^{q-1}$$

que nous appellerons l'application cotangente de la surface.

Le fibré cotangent est dit ample si les fibres de l'application cotangente ψ sont finies. Si p est un point de $\mathbb{P}^{q-1}$ tel que la fibre $\psi^{-1}p$ ne soit pas finie, alors p est le sommet d'un cône et $\psi^{-1}p$ est de dimension 1. Les composantes irréductibles de dimension 1 de l'image de $\psi^{-1}p$ par π seront qualifiées de courbes non-amples.

Adresse e-mail : xavier.roulleau@etud.univ-angers.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2007.06.022

L'étude de cette application cotangente fait l'objet d'une thèse [3] ; sous la direction du Professeur Reider. La présente note classifie les configurations formées par les courbes non-amples des surfaces de Fano.

2. Courbes elliptiques des surfaces de Fano

Soit F une hypersurface cubique lisse de $\mathbb{P}^4$ et soit S la surface de Fano qui paramètre les droites de F. La surface S vérifie les hypothèses du premier paragraphe, son irrégularité est $q = 5$ et l'image de son application cotangente ψ est une hypersurface cubique F' de $\mathbb{P}(H^o(\Omega_S)^*)$ isomorphe à la cubique F [1] ; nous identifierons F et F'.

Lemme 1. *Les courbes non-amples de la surface de Fano S correspondent bijectivement aux hyperplans de $\mathbb{P}^4$ qui découpent la cubique F en un cône.*

Une courbe $E \hookrightarrow S$ est non-ample si et seulement si elle est lisse de genre 1. *En ce cas E vérifie* : $E^2 = -3$.

Soit $E \hookrightarrow S$ une courbe lisse de genre 1, soit p le sommet du cône $\psi_*\pi^*E$ et soit s un point générique de S, notons X_s le plan contenant le sommet p et la droite $L_s = \psi(\pi^{-1}s) \hookrightarrow F$. Le plan X_s découpe la cubique F en trois droites : (1) la droite L_s, (2) la droite $L_{\gamma_E(s)}$ (contenue dans le cône) passant par le sommet p et par le point intersection de L_s et du cône $\psi_*\pi^*E$, (3) la droite résiduelle $L_{\sigma_E(s)}$ telle que :

$$X_s F = L_s + L_{\gamma_E(s)} + L_{\sigma_E(s)}.$$

Nous avons ainsi défini deux applications rationnelles $\gamma_E : S \to E$, $\sigma_E : S \to S$, ces applications sont des morphismes et σ_E est une involution.

Proposition 1. *L'automorphisme σ_E fixe E et* 27 *points isolés. La fibration γ_E est semi-stable, invariante par σ_E et ses fibres sont de genre* 7.

Notons 1_S le morphisme identité de S.

Proposition 2. *Soit E, E' deux courbes lisses de genre* 1 *distinctes contenues dans S. L'intersection de E et de E' vaut* 0 *ou* 1 *et* : $(\sigma_E\sigma_{E'})^{3-EE'} = 1_S$. *Si $EE' = 0$, alors la surface contient une troisième courbe $\sigma_E^* E' = \sigma_{E'}^* E$.*

La fibration γ_E contracte E' si et seulement si $EE' = 1$, sinon E' est une section de la fibration γ_E.

Notons $Aut(S)$ le groupe d'automorphismes de S. Ce groupe agit sur l'espace $H^o(\Omega_S)$, soit :

$$\begin{aligned} Aut(S) &\to GL\big(H^o(\Omega_S)^*\big), \\ \tau &\to M_\tau \end{aligned}$$

la représentation duale, et soit $q' : GL(H^o(\Omega_S)^*) \to PGL(H^o(\Omega_S)^*)$ le quotient naturel.

Lemme 2. *Le morphisme $\tau \in Aut(S) \to q'(M_\tau)$ est injectif et son image est le groupe $Aut(F)$ des automorphismes de la cubique $F \hookrightarrow \mathbb{P}^4$.*

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des courbes lisses de genre 1 contenues dans S. Pour tout $E \in \mathcal{E}$, le morphisme $-M_{\sigma_E}$ est une réflexion d'ordre 2 ; notons $M_S \subset GL(H^o(\Omega_S)^*)$ le groupe de réflexions complexes engendré par les morphismes $-M_{\sigma_E}$, $E \in \mathcal{E}$. Soit $n > 0$ un entier, notons $\Sigma_n \subset GL_n(\mathbb{C})$ le groupe des matrices de permutations et $A(3,3,n) \subset GL_n(\mathbb{C})$ le groupe des matrices diagonales, de déterminant 1 et d'ordre 3. Notons de plus $G(3,3,n)$ le groupe engendré par $A(3,3,n)$ et Σ_n. On notera $[\,]^2$ le groupe d'ordre 2.

Théorème 1. *Si le groupe M_S est irréductible, alors il est isomorphe à l'un des groupes suivants* :

groupe	$\{1\}$	$[\,]^2$	$G(3,3,2)$	Σ_4	Σ_5	$G(3,3,5)$
nombre de courbes elliptiques de S	0	1	3	6	10	30

Sinon M_S est isomorphe à l'un des groupes suivants :

$[]^2 \times []^2$	$G(3,3,2) \times []^2$	$G(3,3,2) \times G(3,3,2)$	$G(3,3,3) \times G(3,3,2)$
2	4	6	12

Soit $E, E' \in \mathcal{E}$, alors on connait l'intersection EE' et, connaissant la cubique F, il est possible de donner un modèle plan de la courbe E.

Exemple. Si M_S est isomorphe à $G(3,3,3) \times G(3,3,2)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ et des coordonnées homogènes telles que la cubique F soit l'hypersurface : $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3\lambda x_1 x_2 x_3 + x_4^3 + x_5^3 = 0$. Ces cubiques permettent de construire une infinité de surfaces de Fano dont le groupe de Néron–Severi est de rang $25 = h^{1,1}$.

3. Surface de Fano de la cubique de Fermat

Considérons la surface de Fano S de la cubique de Fermat $F : x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 = 0$. Notons μ_3 le groupe des racines troisièmes de l'unité et $\#T$ le cardinal d'un ensemble T.

Théorème 2. *La surface S est l'unique surface de Fano (à isomorphisme près) qui possède* 30 *courbes lisses de genre* 1. *Celles-ci sont numérotées* : E_{ij}^{β}, $1 \leqslant i < j \leqslant 5$, $\beta \in \mu_3$.

(a) *Soit E_{ij}^{γ} et E_{st}^{β} deux courbes elliptiques contenues dans S, alors $E_{ij}^{\gamma} E_{st}^{\beta} = 1$ si et seulement si $\#\{i,j,s,t\} = 4$.*
(b) *Le groupe de Néron–Severi $NS(S)$ de la surface est de rang $25 = h^{1,1}$.*
(c) *Les* 30 *courbes elliptiques engendrent un sous-réseau de $NS(S)$ de rang* 25 *et de discriminant* 3^{20}.
(d) *Elles sont isomorphes à la courbe $x^3 + y^3 + z^3 = 0$.*

4. Fibrations de la surface de Fano de la cubique de Fermat

Étudions la surface de Fano de la cubique de Fermat à travers sa variété d'Albanese A. Notons $NS(A)$ le groupe de Néron–Severi de A et $\vartheta : S \to A$ un morphisme d'Albanese.

Soit α une racine primitive troisième de l'unité, notons Λ_A^* le sous-$\mathbb{Z}[\alpha]$-module libre de rang 5 de $H^o(\Omega_S)$ engendré par les formes : $x_i - \beta x_j$ $(i < j, \beta \in \mu_3)$. Soit $e_1, \ldots, e_5 \in H^o(\Omega_S)^*$ la base duale de $x_1, \ldots, x_5$, définissons le produit hermitien de deux formes $\ell, \ell' \in \Lambda_A^*$ par :

$$\langle \ell, \ell' \rangle = \sum_{k=1}^{k=5} e_k(\ell)\overline{e_k(\ell')}$$

et la norme de ℓ par : $\|\ell\| = \sqrt{\langle \ell, \ell \rangle}$.

Théorème 3. *La variété A est isomorphe à $\mathbb{E}^4 \times \mathbb{E}'$ où $\mathbb{E} = \mathbb{C}/\mathbb{Z}[\alpha]$ et $\mathbb{E}' = \mathbb{C}/\mathbb{Z}[3\alpha]$.*

L'image du morphisme $\vartheta^* : NS(A) \to NS(S)$ est un sous-réseau de rang 25 *et de discriminant* $2^2 3^{18}$.

A toute forme non nulle $\ell \in \Lambda_A^*$, on peut associer une fibration $\gamma_\ell : S \to \mathbb{E}$. Si F_ℓ une fibre de γ_ℓ, l'intersection de F_ℓ et de la courbe $E_{ij}^{\beta} \hookrightarrow S$ vaut :

$$E_{ij}^{\beta} F_\ell = \left|(e_i - \beta e_j)(\ell)\right|^2.$$

La fibre F_ℓ est de genre : $g(F_\ell) = 1 + 3\|\ell\|^2$ et est connexe si les entiers $|(e_i - \beta e_j)(\ell)|^2$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. Soit ℓ' un second élément non nul de Λ_A^*, alors : $F_\ell F_{\ell'} = \|\ell\|^2 \|\ell'\|^2 - \langle \ell, \ell' \rangle \langle \ell', \ell \rangle$.

Exemples. Pour $1 \leqslant i < j \leqslant 5$, notons B_{ij} le diviseur : $B_{ij} = \sum_{\beta \in \mu_3} E_{ij}^{\beta}$. Soit i et $j < r < s < t$ tels que $\{i, j, r, s, t\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, les diviseurs $B_{jr} + B_{st}$, $B_{js} + B_{rt}$ et $B_{jt} + B_{rs}$ sont les 3 fibres singulières de la fibration à fibres connexes γ_{ℓ_i} où $\ell_i = (1-\alpha)x_i \in \Lambda_A^*$.

Le diviseur $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 5} E_{ij}^1$ est une fibre de la fibration de Stein associée à γ_ℓ où $\ell = (1-\alpha)(x_1 + \cdots + x_5) \in \Lambda_A^*$.

Ce théorème permet également de construire une infinité de fibrations à fibres connexes possédant 9 sections.

5. Arrangement de courbes elliptiques

Comme pour les arrangements de droites de $\mathbb{P}^2$ [2], l'arrangement des courbes elliptiques de la surface de Fano de la cubique de Fermat permet la construction de surfaces :

Lemme 3. *Soit* $\{i, j, r, s, t\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $i < j$, $r < s < t$, *le diviseur canonique* K_{ij} *associé à la* 2*-forme* $x_i \wedge x_j \in H^o(S, \omega_S)$ *vérifie* : $K_{ij} = 2B_{ij} + B_{rs} + B_{rt} + B_{st}$.

Soit $k(S)$ le corps de fonctions de S, pour $1 \leqslant i < j \leqslant 5$, notons $f_{ij} \in k(S)$ une fonction rationnelle telle que $\mathrm{div}(f_{ij}) = K_{ij} - K_{12}$ (où $\mathrm{div}(f)$ est le diviseur associé à $f \in k(S)$). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, considérons l'extension :

$$k(S)\big(\sqrt[n]{f_{12}}, \ldots, \sqrt[n]{f_{45}}\big)$$

à ce corps correspond une surface lisse minimale S_n et un morphisme $f : S_n \to S$ de degré n^9. Notons Σ la somme des courbes lisses de genre 1 de S.

Proposition 3. *La nombre d'Euler de* S_n *est* $e(S_n) = 162n^9 - 270n^8 + 135n^7$ *et un diviseur canonique est* : $K_{S_n} = \frac{3n-2}{2n} f^* \Sigma$.

6. Surface de Fano de la cubique de Klein

Soit $F \hookrightarrow \mathbb{P}^4$ une cubique lisse, notons $Aut(F)$ son groupe d'automorphismes, S sa surface de Fano et A la variété d'Albanese de S. Soit $\vartheta : S \to A$ un morphisme d'Albanese, c'est un plongement, de plus :

Lemme 4. *Il existe une polarisation principale* Θ *de* A *telle que la classe de cohomologie de la surface* $\vartheta(S)$ *dans* $H^6(A)$ *soit* $\frac{1}{3!}\Theta^3$ [1]. *Le groupe* $Aut(F)$ *agit sur* A *et préserve* Θ, *son ordre divise* $11.7.5^2 3^6 2^{23}$.

L'unique cubique qui possède un automorphisme d'ordre 11 est la cubique de Klein :

$$F : x_1 x_5^2 + x_5 x_3^2 + x_3 x_4^2 + x_4 x_2^2 + x_2 x_1^2 = 0.$$

Notons $NS(S)$ et $NS(A)$ les groupes de Néron-Severi de sa surface de Fano S et de la variété d'Albanese A de S.

Proposition 4. *La variété* A *est isomorphe à* $\mathbb{E}''^5$ *où* $\mathbb{E}''$ *est la courbe* $\mathbb{C}/\mathbb{Z}[\nu]$ *avec* $\nu = \frac{1+\sqrt{-11}}{2}$. *L'image du morphisme* $\vartheta^* : NS(A) \to NS(S)$ *est un sous-réseau de rang* 25 *et de discriminant* $2^2 11^{10}$.

Références

[1] H. Clemens, P. Griffiths, The intermediate Jacobian of the cubic threefold, Ann. of Math. 95 (1972) 281–356.
[2] F. Hirzebruch, Arrangements of lines and algebraic surfaces, in: Arithmetic and Geometry, in: Progr. Math., vol. 36, Birkhäuser, 1983, pp. 113–140.
[3] X. Roulleau, L'application cotangente des surfaces de type général, Thèse, Université d'Angers, 2007.