Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007) 213–218

Comptes Rendus Mathematique

http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie algébrique

Revêtements hyperelliptiques d-osculateurs et solitons elliptiques de la hiérarchie *KdV*

Armando Treibich

Laboratoire de Mathématique de Lens, Faculté des sciences J. Perrin, université d'Artois, rue J. Souvraz, SP18, 62300 Lens, France

Reçu le 19 septembre 2006 ; accepté le 27 octobre 2006

Disponible sur Internet le 7 août 2007

Présenté par Michel Raynaud

Résumé

Soit d un entier positif, $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique 0 et X une courbe elliptique définie sur $\mathbb{K}$. On étudie les courbes hyperelliptiques munies d'une projection sur X, telles que l'image naturelle de X dans la jacobienne de la courbe, oscule à l'ordre d au plongement de celle-ci, en un point de Weierstrass. On construit des familles $(d-1)$-dimensionnelles de telles courbes, de genre g arbitrairement grand, obtenant, en particulier, des familles $(g+d-1)$-dimensionnelles de solutions de la hiérarchie *KdV*, doublement périodiques par rapport à la d-ième variable. ***Pour citer cet article : A. Treibich, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Abstract

Hyperelliptic d-osculating covers and elliptic solitons of the *KdV* hierarchy. Let d be a positive integer, $\mathbb{K}$ an algebraically closed field of characteristic 0 and X an elliptic curve defined over $\mathbb{K}$. We study the hyperelliptic curves equipped with a projection over X, such that the natural image of X in the Jacobian of the curve osculates to order d to the embedding of the curve, at a Weierstrass point. We construct $(d-1)$-dimensional families of such curves, of arbitrary big genus g, obtaining, in particular, $(g+d-1)$-dimensional families of solutions of the *KdV* hierarchy, doubly periodic with respect to the d-th variable. ***To cite this article: A. Treibich, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Abridged English version

Let $\mathbb{K}$ be an algebraically closed field of characteristic 0 and let $\mathbb{P}^1$ denote the projective line over $\mathbb{K}$. By a curve we will mean hereafter a complete integral curve over $\mathbb{K}$, of arithmetic genus $g>0$. For any curve Γ, let Γ^o and $\operatorname{Jac}\Gamma$ denote, respectively, the open subset of smooth points of Γ and its generalized Jacobian. Recall that for any smooth point $p \in \Gamma^o$, the Abel morphism, $A_p : \Gamma^o \to \operatorname{Jac}\Gamma$, $p' \mapsto \mathcal{O}_\Gamma(p'-p)$, is an embedding and $A_p(\Gamma^o)$ generates the whole Jacobian. Moreover, the flag of hyperosculating spaces to $A_p(\Gamma^o)$ at $A_p(p)=0$ can be constructed as follows.

Adresses e-mail : treibich@euler.univ-artois.fr, treibich@cmat.edu.uy.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2007.06.019

For any marked curve (Γ, p) as above, and any positive integer j, let us consider the exact sequence of O_Γ-modules $0 \to O_\Gamma \to O_\Gamma(jp) \to O_{jp}(jp) \to 0$, as well as the corresponding long exact cohomology sequence:

$$0 \to H^o(\Gamma, O_\Gamma) \to H^o\big(\Gamma, O_\Gamma(jp)\big) \to H^o\big(\Gamma, O_{jp}(jp)\big) \xrightarrow{\delta} H^1(\Gamma, O_\Gamma) \to \cdots,$$

where $\delta : H^o(\Gamma, O_{jp}(jp)) \to H^1(\Gamma, O_\Gamma)$ is the canonical cobord morphism and $H^1(\Gamma, O_\Gamma)$ is canonically identified to the tangent space to Jac Γ at 0. According to the Weierstrass gap Theorem, for any $d = 1, \ldots, g$ (g being the arithmetic genus of Γ), there exists $0 < j < 2g$ such that $\delta(H^o(\Gamma, O_{jp}(jp)))$ is a d-dimensional subspace, denoted hereafter by W_d. For a generic point p of Γ we have $W_d = \delta(H^o(\Gamma, O_{dp}(dp)))$ (i.e.: $j = d$), but if Γ is hyperelliptic and p is a Weierstrass point, then we must choose $j = 2d - 1$.

In any case, the filtration $\{0\} \subsetneq W_1 \cdots \subsetneq W_g = H^1(\Gamma, O_\Gamma)$ is the flag of hyperosculating spaces to $A_p(\Gamma)$ at 0.

Definition 1. (cf. [7]) Let $\pi : (\Gamma, p) \to (X, q)$ be a finite marked morphism ($\pi(p) = q$) and let $\iota_\pi : X \to \mathrm{Jac}\,\Gamma$ denote the canonical (group homo-)morphism $q' \mapsto A_p(\pi^*(q' - q))$. We will say that π is a d-osculating cover iff the tangent to $\iota_\pi(X)$ at 0 is contained in W_d but not in W_{d-1}. If, moreover, Γ is a degree-2 cover of $\mathbb{P}^1$ ramified at p, we will call π a hyperelliptic d-osculating cover.

Remark 2. Besides its intrinsic geometric interest, the above definitions are motivated, when $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, by the following result: any hyperelliptic d-osculating cover of genus g gives rise to a g-dimensional family of exact solutions of the Korteweg-de Vries equation, doubly periodic with respect to the d-th *KdV* flow (cf. [4,3,6,5]).

Definition 3. (cf. [8])

1. Let E denote the unique indecomposable rank-2, degree-0 vector bundle over X and $S := \mathbb{P}(E)$ the corresponding projective bundle. The natural projection $\pi_s : S \to X$ is then a ruled surface over X, characterized up to an isomorphism, by the existence of a unique section, $C_o \subset S$, of self-intersection $C_o.C_o = 0$.
2. The canonical symmetry of (X, q), $[-1] : X \to X$, fixes its origin, $\omega_o := q$, as well as the three other half-periods $\{\omega_j, j = 1, 2, 3\}$, and lifts to an involution $\tau : S \to S$ (i.e.: $\pi_s \circ \tau = [-1] \circ \pi_s$) having two fixed points over each ω_i ($i = 0, \ldots, 3$): one in C_o, denoted by s_i, and the other one denoted by r_i.
3. Let $e : S^\perp \to S$ denote the blow-up of S at $\{s_i, r_i, i = 0, \ldots, 3\}$, the eight fixed points of τ, and $\tau^\perp :\ S^\perp \to S^\perp$ its lift to an involution fixing the corresponding exceptional divisors $s_i^\perp, r_i^\perp, i = 0, \ldots, 3$. Then, the quotient $\tilde{S} := S^\perp/\tau^\perp$ is a smooth rational surface and the canonical degree-2 projection $\psi : S^\perp \to \tilde{S}$ is ramified along $s_i^\perp, r_i^\perp, i = 0, \ldots, 3$.

The following results, already known for $d = 1$ (cf. [8]) and $d = 2$ (cf. [1]), can be proven within the same framework for any $d > 2$:

Proposition 4. *(cf. [7]) Let $\pi : (\Gamma, p) \to (X, q)$ be a hyperelliptic d-osculating cover of degree n and let ρ denote its ramification index at p. Then ρ is odd, bounded by $2d - 1$, and there exists a unique morphism $\iota^\perp : \Gamma \to S^\perp$ such that*:

1. *the surjective morphism $\iota^\perp : \Gamma \to \iota^\perp(\Gamma)$ factors $\pi = \pi_s \circ e \circ \iota^\perp$ and its degree divides $2d - 1$;*
2. *the curve $\iota^\perp(\Gamma)$ is $\tau^\perp$-invariant and projects into $\tilde{S}$, with degree 2 over the rational curve $\tilde{\Gamma} := \varphi(\iota^\perp(\Gamma))$;*
3. *the direct image divisor $(e \circ \iota^\perp)_*(\Gamma)$ is linearly equivalent to $nC_o + (2d - 1)S_o$ and only intersects C_o at $(e \circ \iota^\perp)(p) = C_o \cap S_o$;*
4. *for any $i = 0, \ldots, 3$ let γ_i denote the intersection multiplicity number between the direct image divisor $(\iota^\perp)_*(\Gamma)$ and $r_i^\perp$. Then $(\iota^\perp)_*(\Gamma)$ is linearly equivalent to $e^*(nC_o + (2d - 1)S_o) - \rho s_o^\perp - \Sigma_i \gamma_i r_i^\perp$.*

Definition 5. Let $\gamma := (\gamma_i) \in \mathbb{N}^4$, $\gamma_i := (\iota^\perp)_*(\Gamma).r_i^\perp$ ($i = 0, \ldots, 3$) be the intersection multiplicity vector canonically associated to the hyperelliptic d-osculating cover $\pi : (\Gamma, p) \to (X, q)$. We will call γ the type of π and denote hereafter by $\gamma^{(1)}$ and $\gamma^{(2)}$ the sums $\gamma^{(1)} := \Sigma_i \gamma_i$ and $\gamma^{(2)} := \Sigma_i \gamma_i^2$, respectively.

Theorem 6. *Let $\pi : (\Gamma, p) \to (X, q)$ be a hyperelliptic d-osculating cover, of degree n, type γ, ramification index ρ at p and arithmetic genus g. Then*:

1. $\gamma_o + 1 \equiv \gamma_1 \equiv \gamma_2 \equiv \gamma_3 \equiv n$ *(mod.* 2);
2. $2g + 1 \leqslant \gamma^{(1)}$ *and* $\gamma^{(2)} \leqslant (2d-1)(2n-2) + 4 - \rho^2$.

Let us fix hereafter $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ and choose $\varepsilon = (\varepsilon_i) \in \mathbb{Z}^4$ such that, either $|\varepsilon_i| = (d-1)(1-\delta_{i,k})$, for any $i = 0, \ldots, 3$, or $|\varepsilon_i| = [d/2] - (-1)^d \delta_{i,k}$, for any $i = 0, \ldots, 3$. We prove the following:

Theorem 7. *For any $\mu \in \mathbb{N}^4$ such that $\mu_o + 1 \equiv \mu_j$ (mod. 2) ($j = 1, 2, 3$) and $\gamma := (2d-1)\mu + 2\varepsilon \in \mathbb{N}^4$, there exists a $(d-1)$-dimensional family of smooth hyperelliptic d-osculating covers of genus $g := 1/2\{(2d-1)\mu^{(1)} + 2\varepsilon^{(1)} - 1\}$, degree $n := \frac{1}{2}\{(2d-1)\mu^{(2)} + 4\Sigma_i \mu_i \varepsilon_i + 6d - 7\}$ and type γ.*

1. Introduction

1.1. Soit $\mathbb{K}$ un corps algébriquement clos de caractéristique 0, (X, q) une courbe elliptique définie sur $\mathbb{K}$, pointée en son origine, et notons $\mathbb{P}^1$ la droite projective sur $\mathbb{K}$. Sauf mention contraire, toutes les courbes considérées par la suite seront supposées définies sur $\mathbb{K}$, complètes, intègres et de genre arithmétique positif. Étant donnée une telle courbe Γ, munie du choix d'un point lisse $p \in \Gamma$, on désignera par $A_p : \Gamma \to \operatorname{Jac} \Gamma$ l'application (rationnelle) d'Abel.

Proposition 1.2. *(cf. [7] §1.6) Soit Γ une courbe hyperelliptique de genre positif g, p un point lisse de Weierstrass de Γ et considérons, quel que soit le nombre impair $j = 2d - 1 < 2g$, la suite exacte de O_Γ-modules $0 \to O_\Gamma \to O_\Gamma(jp) \to O_{jp}(jp) \to 0$, ainsi que sa suite exacte longue de cohomologie*

$$0 \to H^o\big(\Gamma, O_\Gamma\big) \to H^o\big(\Gamma, O_\Gamma(jp)\big) \to H^o\big(\Gamma, O_{jp}(jp)\big) \xrightarrow{\delta} H^1(\Gamma, O_\Gamma) \to \cdots,$$

où δ est l'application cobord. Alors $W_d = \delta(H^o(O_{jp}(jp)))$ est le d-ième sous-espace osculateur à $A_p(\Gamma)$ en 0.

Définition 1.3. Soit $\pi : (\Gamma, p) \to (X, q)$ un revêtement ramifié de la courbe elliptique (X, q), p un point lisse de Γ tel que $\pi(p) = q$ et notons $\iota_\pi : (X, q) \to (\operatorname{Jac} \Gamma, 0)$ l'homomorphisme de groupes algébriques, $q' \mapsto A_p(\pi^*(q' - q))$. Nous dirons que π est un revêtement hyperelliptique d-osculateur ($d > 0$) si et seulement s'il satisfait les propriétés ci-après :

1. Γ est un revêtement double de $\mathbb{P}^1$, ramifié en p ;
2. la tangente à $\iota_\pi(X)$ *en* 0 est contenue dans W_d mais pas dans W_{d-1}.

Définition 1.4. (cf. [8])

1. Soit $\pi_s : S \to X$ l'unique surface réglée au dessus de X, ayant une seule section, $C_o \subset S$, d'auto-intersection nulle. La symétrie canonique de (X, q), $[-1] : X \to X$, fixe l'origine $\omega_o := q$ ainsi que les trois autres demi-périodes $\{\omega_j, j = 1, 2, 3\}$, et se remonte en une involution de S, notée $\tau : S \to S$ ($\pi_s \circ \tau = [-1] \circ \pi_s$), ayant deux points fixes au dessus de chaque $\omega_i (i = 0, \ldots, 3)$: un sur C_o, noté s_i, et l'autre noté r_i.
2. Soit d'autre part $e : S^\perp \to S$ l'éclatement des huit points $\{s_i, r_i\} \subset S$ et notons $\{s_i^\perp, r_i^\perp\}$ les diviseurs exceptionnels correspondants. Alors $\tau : S \to S$ se remonte à son tour en une involution $\tau^\perp : S^\perp \to S^\perp (e \circ \tau^\perp = \tau \circ e)$.
3. Il s'en suit que la surface quotient $\tilde{S} := S^\perp / \tau^\perp$ est lisse et que le revêtement double associé, $\varphi : S^\perp \to \tilde{S}$, est ramifié le long des courbes $\{s_i^\perp, r_i^\perp\}$.

Les projections $\pi_s^\perp := \pi_s \circ e : S^\perp \to X$ et $\varphi : S^\perp \to \tilde{S}$, donnent un cadre universel pour les revêtements hyperelliptiques d-osculateurs ($d > 0$) et permettent de démontrer la Proposition 1.6 et le Théorème 1.9 ci-dessous, de façon analogue aux cas particuliers $d = 1$, $d = 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (cf. [8,1]).

Proposition 1.5. *(cf. [8,1,2]) Soit $\pi : (\Gamma, p) \to (X, q)$ un revêtement hyperelliptique d-osculateur de degré n et notons ρ son indice de ramification en p. Alors ρ est un nombre impair majoré par $2d - 1$ et il existe un unique morphisme $\iota^\perp : \Gamma \to S^\perp$ tel que* :

1. *la courbe image $\iota^\perp(\Gamma) \subset S^\perp$ est $\iota^\perp$- invariante et sa projection, $\tilde{\Gamma} := \varphi(\iota^\perp(\Gamma))$, est une courbe rationnelle irréductible de $\tilde{S}$* ;
2. *π se factorise via $\iota^\perp$, $\pi = \pi_s \circ e \circ \iota^\perp$, et $\deg(\iota^\perp : \Gamma \to \Gamma^\perp)$ divise $2d - 1$* ;
3. *le diviseur image directe $(e \circ \iota^\perp)_*(\Gamma)$ est linéairement équivalent à $nC_o + (2d - 1)S_o$ et n'intersecte C_o qu'au point $(e \circ \iota^\perp)(p) = C_o \cap S_o$* ;
4. *Le diviseur $(\iota^\perp)_*(\Gamma)$ est linéairement équivalent à $e^*(nC_o + (2d - 1)S_o) - \rho s_o^\perp - \Sigma_i \gamma_i r_i^\perp$, où, pour tout $i = 0, \ldots, 3$, $\gamma_i := \iota_*^\perp(\Gamma).r_i^\perp$.*

Définition 1.6. Le vecteur $\gamma = (\gamma_i) \in \mathbb{N}^4$, $\gamma_i := (\iota^\perp)_*(\Gamma).r_i^\perp$, canoniquement associé au revêtement hyperelliptique d-osculateur π, sera appelé le type de π. Nous désignerons dorénavant, par $\gamma^{(1)}$ et $\gamma^{(2)}$ les sommes $\Sigma_i \gamma_i$ et $\Sigma_i \gamma_i^2$, respectivement.

Theorème 1.7. *Soit $\pi : (\Gamma, p) \to (X, q)$ un revêtement hyperelliptique d-osculateur, de degré n, type γ, genre arithmétique g et notons ρ son indice de ramification en p. Alors* :

1. $\gamma_o + 1 \equiv \gamma_1 \equiv \gamma_2 \equiv \gamma_3 \equiv n$ *(mod. 2)* ;
2. $2g + 1 \leqslant \gamma^{(1)}$ *et* $\gamma^{(2)} \leqslant (2d - 1)(2n - 2) + 4 - \rho^2$.

Au moyen des critères d'existence et d'irréductibilité ci-après, nous construisons finalement, pour tout n et pour g arbitrairement grand, une famille de dimension $d - 1$ de tels revêtements, de degré n et genre g.

Proposition 1.8. *(cf. [8] §6.2) Soit $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ et $\alpha = (\alpha_i) \in \mathbb{N}^4$ tel que $\alpha_k + 1 \equiv \alpha_j$ $(mod.\ 2)$, quel que soit $j \neq k$. Alors, il existe une unique courbe irréductible tracée dans $S^\perp$, notée ci-après $Z_\alpha^\perp$, qui soit $\tau^\perp$-invariante et linéairement équivalente à $e^*(nC_o + S_k) - s_k^\perp - \Sigma_i \alpha_i r_i^\perp$, où $n := 1/2(-1 + \Sigma_i \alpha_i^2)$.*

Proposition 1.9. *(cf. [7] §3.4) Soit Γ un diviseur effectif de la surface S, lisse en s_o et tel que $\Gamma \cap C_o = s_o$. Alors Γ est une courbe irréductible.*

Proposition 1.10. *Soit $C_o^\perp$ le transformé strict de C_o dans $S^\perp$ et $\Gamma^\perp$ un diviseur effectif de $S^\perp$ satisfaisant les propriétés suivantes* :

1. *la courbe $\Gamma^\perp$ intersecte $C_o^\perp$ uniquement au point $p_o^\perp := C_o^\perp \cap s_o^\perp$ et son support ne contient aucune des courbes dans $\{C_o^\perp, s_i^\perp, r_i^\perp, i = 0, \ldots, 3\}$* ;
2. *quel que soit $i = 0, \ldots, 3$, $\deg(\Gamma^\perp.s_i^\perp) = \delta_{i,0}$.*

Alors $\Gamma^\perp$ est une courbe irréductible.

Preuve. La propriété 1.10.1. nous assure que $\Gamma^\perp$ est le transformé strict de $\Gamma := e_*(\Gamma^\perp)$, son image directe par $e : S^\perp \to S$, et que celle-ci ne contient pas C_o. On vérifie également, grâce aux autres propriétés, que Γ est lisse en s_o et que $\Gamma \cap C_o = s_o$. Il s'en suit, d'après [7] §3.4, que Γ est une courbe irréductible, de même que $\Gamma^\perp$, son transformé strict. □

Theorème 1.11. *Fixons $d \in \mathbb{N}$, $\mu = (\mu_i) \in \mathbb{N}^4$ tel que $\mu_o + 1 \equiv \mu_1 \equiv \mu_2 \equiv \mu_3$ (mod. 2) et choisissons $\varepsilon \in \mathbb{Z}^4$ égal, à moins d'une permutation ou d'un changement des signes des coefficients, soit à $\varepsilon = (0,\ 2d - 2,\ 2d - 2,\ 2d - 2)$, soit à $\varepsilon = (d - 2, d, d, d)$ si d est pair ou à $\varepsilon = (d + 1,\ d - 1,\ d - 1,\ d - 1)$ si d est impair. Notons $\gamma := (2d - 1)\mu + \varepsilon$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$ l'unique naturel positif tel que $\gamma^{(2)} := \Sigma_i \gamma_i^2 = (2d - 1)(2n - 2) + 3$. Alors, le système linéaire $|e^*(nC_o + (2d - 1)S_o) - s_o^\perp - \Sigma_i \gamma_i r_i^\perp|$ contient un sous-espace de dimension $(d - 1)$, dont l'élément générique est* *une courbe irréductible, $\tau^\perp$-invariante et lisse au point $p_o^\perp := C_o^\perp \cap s_o^\perp$, telle que sa projection dans $\tilde{S}$ est isomorphe à $\mathbb{P}^1$.*

Corollaire 1.12. *Soient $\gamma \in \mathbb{N}^4$ et $n \in \mathbb{N}$ (où $\gamma^{(2)} = (2d-1)(2n-2)+3$)) comme ci-dessus. Il existe alors une famille $(d-1)$-dimensionnelle de revêtements hyperelliptiques d-osculateurs, de degré n, type γ et non-singuliers de genre $g := 1/2(-1+\gamma^{(1)})$.*

2. Preuve du théorème

Pour des raisons d'espace nous allons construire uniquement la famille associée à $\gamma = (2d-1)\mu + (0, 2d-2, 2d-2, 2d-2)$, auquel cas le degré n correspondant est tel que $2n = (2d-1)\mu^{(2)} + 4(d-1)(\mu_1+\mu_2+\mu_3) + 6d-7$.

Soient $\mu(1) := \mu + (0,0,1,1)$, $\mu(2) := \mu + (0,1,0,1)$, $\mu(3) := \mu + (0,1,1,0)$, et notons, d'après 1.11 ci-dessus, $Z_{(k)}^\perp (k=1,2,3)$ l'unique courbe $\tau^\perp$-invariante de $S^\perp$, telle que $Z_{(k)}^\perp \sim e^*(m(k)C_o + S_k) - s_k^\perp - \Sigma_i \mu(k)_i r_i^\perp$, où $2m(k)+1 = \Sigma_i \mu(k)_i^2$.

Soient d'autre part $\mu^+ := \mu + (1,1,1,1)$, $\mu' := \mu + (0,2,1,1)$, et notons $Z_+^\perp, Z'^\perp$, les uniques courbes $\tau^\perp$-invariantes de $S^\perp$, linéairement équivalentes à :

1. $Z_+^\perp \sim e^*(m^+C_o + S_o) - s_o^\perp - \Sigma_i \mu_i^+ r_i^\perp$, où $2m^+ + 1 = \mu^{+(2)}$;
2. $Z'^\perp \sim e^*(m'C_o + S_o) - s_1^\perp - \Sigma_i \mu_i' r_i^\perp$, où $2m' + 1 = \mu'^{(2)}$.

De même, si $\mu_o \neq 0$ on note $\mu^- := \mu + (-1,1,1,1)$ et $Z_-^\perp$ l'unique courbe $\tau^\perp$-invariante de $S^\perp$, telle que $Z_-^\perp \sim e^*(m^-C_o + S_o) - s_o^\perp - \Sigma_i \mu_i^- r_i^\perp$, où $2m^- + 1 = \mu^{-(2)}$. Par contre, si $\mu_o = 0$ on notera $Z_-^\perp := Z_+^\perp + 2r_o^\perp$, de telle sorte que dans les deux cas de figure, les diviseurs $D_o^\perp := Z_+^\perp + Z_-^\perp + 2s_o^\perp$ et $D_1^\perp := Z'^\perp + Z_{(1)}^\perp + 2s_1^\perp$ soient linéairement équivalents.

Considérons finalement la courbe $Z^\perp \sim e^*(mC_o + S_o) - s_o^\perp - \Sigma_i \mu_i r_i^\perp$ où $2m+1 = \Sigma_i \mu_i^2$ et remarquons les faits suivants :

1. tout élément $\tau^\perp$-invariant de Λ est l'image réciproque par $\varphi : S^\perp \to \tilde{S}$, d'un diviseur de genre arithmétique nul de $\tilde{S}$;
2. le diviseur $F_j^\perp := C_o^\perp + \Sigma_{k\neq 0}(Z_{(k)}^\perp + s_k^\perp) + jD_o^\perp + (d-2-j)D_1^\perp$, pour tout $j = 0,\dots,d-2$, ainsi que $G^\perp := Z^\perp + (d-1)D_o^\perp$, appartiennent à Λ ;
3. les diviseurs $\{F_j^\perp, j = 0,\dots,d-2\}$ ont $C_o^\perp$ comme unique composante irréductible commune, mais $F_o^\perp$ est le seul à être lisse au point $p_o^\perp := C_o^\perp \cap s_o^\perp$. En particulier ils engendrent un sous-espace $(d-2)$-dimensionnel de Λ, dont l'élément générique est transverse à $s_o^\perp$ en $p_o^\perp$;
4. le diviseur $G^\perp$ intersecte $C_o^\perp$ uniquement au point $p_o^\perp$.

Il en résulte que $\{G^\perp, F_j^\perp, j = 0,\dots,d-2\}$ engendre un sous-espace $(d-1)$-dimensionnel et $\tau^\perp$-invariant de Λ, dont l'élément générique satisfait le critère d'irréductibilité 1.10 et se projette dans $\tilde{S}$ sur une courbe isomorphe à $\mathbb{P}^1$. □

3. Preuve du corollaire

Soit $\Gamma^\perp$ l'élément générique du sous-espace de Λ construit ci-haut. On sait, d'après le Théorème 1.11, que $\varphi : \Gamma^\perp \to \tilde{\Gamma}$ est un revêtement de degré 2, ramifié en $p_o^\perp$, dont l'image est isomorphe à $\mathbb{P}^1$. Donc $\Gamma^\perp$ est une courbe hyperelliptique et $p_o^\perp \in \Gamma^\perp$ est un point de Weierstrass de $\Gamma^\perp$. Il s'en suit que la projection naturelle de $(\Gamma^\perp, p_o^\perp)$ sur (X, q) (restriction de $\pi_s^\perp : S^\perp \to X$ à $\Gamma^\perp$), est un revêtement hyperelliptique d-osculateur de type γ, degré n et genre g, tel que $(2n-2)(2d-1)+3 = \gamma^{(2)}$ et $2g+1 = \gamma^{(1)}$. □

Références

[1] P. Flédrich, Paires 3-tangentielles hyperelliptiques et solutions doublement périodiques en t de l'équation de K-deV, Thèse Univ. d'Artois (12/2003).

[2] A. Flédrich, P. Treibich, Hyperelliptic osculating covers and KdV solutions periodic in t, I.M.R.N. 5 (2006) 1–17, Article ID 73476.

[3] A.R. Its, V. Matveev, Hill's operator, finite number of lacunae and multisoliton solutions of the K-deV equation, Teor. Mat. Fiz. 23 (1975) (1980) 51–67.

[4] I.M. Krichever, Elliptic solutions of the KP equation and integrable systems of particles, Funct. Anal. 14 (4) (1980) 45–54.

[5] G. Segal, G. Wilson, Loop groups and equations of *KdV* type, Publ. Math. IHES 61 (1985) (1980) 5–65.

[6] A.O. Smirnov, Solutions of the KdV equation, elliptic in t, Teor. Mat. Fiz. 100 (2) (1994) 937–947.

[7] A. Treibich, Matrix elliptic solitons, Duke Math. J. 90 (3) (1997) 523–547.

[8] A. Treibich, J.-L. Verdier, Solitons elliptiques, in: The Grothendieck Festschrift, in: Prog. in Math., vol. 88, Birkhäuser, 1990, pp. 437–479, appendix by J. Oesterlé.