Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007) 139–144
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations aux dérivées partielles

La borne de Jacobi pour une diffiété définie par un système quasi régulier

François Ollivier [a], Brahim Sadik [b]

[a] *ALIEN, INRIA Futurs & LIX, UMR CNRS 7161, École polytechnique, 91128 Palaiseau cedex, France*
[b] *Département de mathématiques, faculté des sciences Semlalia, B.P. 2390, avenue Safi, Marrakech, Maroc*

Reçu le 2 janvier 2007 ; accepté après révision le 5 juin 2007

Disponible sur Internet le 17 juillet 2007

Présenté par Bernard Malgrange

Résumé

On montre que la borne de Jacobi pour l'ordre d'un système d'équations différentielles ordinaires est vraie dans le cas d'une diffiété définie par un système quasi régulier. Nous étendons le résultat au cas où il y a moins d'équations que d'inconnues et montrons que la non-nullité du jacobien tronqué est une condition nécessaire et suffisante pour que la borne soit atteinte. ***Pour citer cet article : F. Ollivier, B. Sadik, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Abstract

Jacobi's bound for a diffiety defined by a quasi-regular system. We show that Jacobi's bound for the order of a system of ordinary differential equations stands in the case of a diffiety defined by a quasi-regular system. We extend the result when there are less equations than variables and characterize the case when the bound is reached. ***To cite this article: F. Ollivier, B. Sadik, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007).***

Abridged English version

In [3,4],[1] Jacobi has introduced a bound on the order of a system of m ordinary differential equations in m unknowns. Let $a_{i,j}$ be the order of the ith equation in the jth unknown function and $J = \max_{\sigma \in S_m} \sum_{i=1}^{m} a_{i,\sigma(i)}$. He claims that the order of the system is bounded by J. The bound is still conjectural in the general case. In the setting of differential algebra, Ritt in [10] proved it for linear systems, Lando in [8] for order 1 systems and Kondratieva et al. in [6] under the quasi-regularity hypothesis of [5].

Jacobi gave an algorithm to compute the bound in polynomial time, instead of trying the $m!$ permutations. It has been forgotten and rediscovered by Kuhn in 1955 [7], using Egerváry's results (see [12] for historical details). The idea is to find a *canon*, i.e. $\lambda \in \mathbf{N}^m$ such that, in the matrix $(a_{i,j} + \lambda_i)$ one can select maximal entries in each column

Adresses e-mail : francois.ollivier@lix.polytechnique.fr (F. Ollivier), sadik@ucam.ac.ma (B. Sadik).
[1] Translations are available at url http://www.lix.polytechnique.fr/~ollivier/JACOBI/jacobiEngl.htm.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2007.06.010

that are located in different rows. Jacobi's algorithm computes the unique canon with minimal λ_i. In the case of $r < m$ equations, we need to compute $J = \max_{\sigma\in S_{r,m}} \sum_{i=1}^{r} a_{i,\sigma(i)}$, where $S_{r,m}$ denotes the set of injections $[1,r] \mapsto [1,m]$. That may be done by completing the matrix $(a_{i,j})$ by $m-r$ rows of 0 in order to make it square. Those rows correspond to the orders of $m-r$ generic linear equations of order 0.

We prove the bound in the context of diffiety extensions (see [13,15]) under the same quasi-regularity hypothesis as in [6]. A *diffiety* is a real variety of denumerable dimension equipped with a derivation. *Diffiety morphisms* are $\mathcal{C}^\infty$ mappings commuting with the derivation. A *diffiety extension* V/U is a couple of diffiety with a canonical surjective projection $\pi : V \mapsto U$, which is a diffiety morphism. *Extension morphisms* also commute with projections. The *trivial extension* of differential dimension m, denoted by T^m/U_{δ_0}, is defined in coordinates by a derivation $\delta := \delta_0 + \delta_1$ with $\delta_1 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} x_i^{(k+1)} \partial/\partial x_i^{(k)}$. The *differential dimension* of a diffiety extension V/U is the maximal n such that there is an extension morphism from V/U onto an open subset of T^n/U. If an extension is of differential dimension 0, its order is the dimension of $\pi^{-1}(u \in U)$. For positive dimension, *the order in the coordinates x_j at point* (v,u) is the maximal dimension in the neighbourhood of (v,u) of the intersection of V/U with $m-r$ differential hyperplanes defined by order zero equations $h_i(x) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant m-r$. In may depend of the chosen point. A set of equations $x_i^{(\gamma_i)} = f_i(x)$ defining a diffiety, where the f_i depend only of derivatives smaller than $x_i^{(\gamma_i)}$ for some admissible ordering is said to be a *normal form* of the diffiety in the coordinates x.

Definition 0.1. A system $g(x,y) = 0$ of r equations in m unknowns is *quasi-regular* at some point $(v,u) \in T^m/U$ if for all $s \in \mathbf{N}$ the Jacobian matrix for the derivatives $g_i^{(\ell)}$, $0 \leqslant \ell \leqslant s$ with respect to all the derivatives of the unknowns x appearing in them is of maximal rank $r(s+1)$.

Definition 0.2. Let $g(x,y) = 0$ be a system of r equations in m unknowns defining V on some neighbourhood of a point (v,u). We denote by $\mathrm{ord}_{V,(v,u),x_j} g_i$ the greatest integer k such that $\partial g_i/\partial x_j^{(k)} \neq 0$ on every neighbourhood of (v,u) in V, or $-\infty$ if $\partial g_i/\partial x_j^{(k)} = 0$, $\forall k \in \mathbf{N}$ on some neighbourhood of (v,u) in V. Let λ_i be a canon for the order matrix $(a_{i,j})$, with $a_{i,j} = \mathrm{ord}_{V,(v,u),x_j} g_i$, $\Lambda = \max_i \lambda_i$, $\alpha_i = \Lambda - \lambda_i$ and $\beta_j = \max_i a_{i,j} - \alpha_i$. The *truncated Jacobian matrix* $\nabla_{V,(v,u)}$ is the matrix $(\partial g_i/\partial x_j^{(\alpha_i+\beta_j)})$.

Theorem 0.3. *Let $g(x,y)$ be a system defining a diffiety extension V/U as a subdiffiety of the trivial extension T^m/U on some neighbourhood of $(v,u) \in V$ and $J_{V,(v,u)} = \max_{\sigma\in S_{r,m}} \sum_{i=1}^{r} a_{i,\sigma(i)}$.*

(i) *If g is quasi-regular at $(v,u) \in V$, V/U is of differential dimension $m-r$ and there exists an open set $\mathcal{O}$ whose adherence is a neighbourhood of (v,u) and whose every point admits a neighbourhood of order at most $J_{V,(v,u)}$ and possessing a normal form in coordinates x_i.*
(ii) *If $|\nabla_{V,(v,u)}| \neq 0$ at $(v,u) \in V$, then g is quasi-regular at (v,u), the differential dimension of V/U is $m-r$, and there is a neighbourhood of (v,u) possessing a normal form and of order $J_{V,(v,u)}$ in coordinates x_i.*
(iii) *If g is quasi-regular at (x,u) and $|\nabla_{V,(x,u)}| = 0$ on a neighbourhood of (x,u) in V, then there exists an open set $\mathcal{O}$ whose adherence is a neighbourhood of (v,u) and whose every point admits a neighbourhood possessing a normal form and of order strictly lower than $J_{V,(v,u)}$ in coordinates x_i.*

Sketch of the proof. The proof follows the scheme described by Jacobi in [4] for the computation of a normal form. First, we notice that $\mathrm{ord}_{V,(v,u),x_j} g_i^{(s)} = \mathrm{ord}_{V,(v,u),x_j} g_i + s$, using the commutation rule $[\partial/\partial x_j^{(k+1)}, \delta] = \partial/\partial x_j^{(k)}$.

(ii) Assume that $|\nabla_{V,(v,u)}| \neq 0$ at $(v,u) \in V$. We may reorder the equations g_i by increasing α_i and the x_i so that the principal minors made of the first i rows and columns of $\nabla_{V,(v,u)}$ have a nonvanishing determinant D_i for all $1 \leqslant i \leqslant r$. The Jacobian matrix J_s of the system $G_s := \{g_i^{(k-\alpha_i)} \mid 0 \leqslant k \leqslant s\}$ contains a square submatrix of maximal size obtained by derivating each $g_i^{(k-\alpha_i)}$ with respect to its principal derivatives $x_j^{(\alpha_i+k)}$ such that $\alpha_j \leqslant k$. It is block-wise triangular and its determinant is equal to $\prod_{k=0}^{s} D_{\max\{i \mid \alpha_i \leqslant k\}}$. It is thus of maximal rank, which proves quasi-regularity. Using the implicit function theorem for s great enough, we get, using the fact that g defines V on some neighbourhood of (v,u), a normal form $x_j^{(\alpha_i+\beta_j)} = f_i(v)$, $1 \leqslant i \leqslant r$. The order in coordinates x_i is then $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i + \beta_i = J$.

We prove (i) and (iii) by induction on $J_{V,(v,u)}$. In the case $J = 0$, quasi-regularity implies that $\nabla_{V,(v,u)}$ is of full rank, so the result stands by (ii). If $\nabla_{V,(v,u)}$ is not of full rank in some neigborough of (v, u), then we may build an equivalent system with a strictly smaller $J_{V,(v,u)}$ and use (i) recursively. If not, we consider the open set $\mathcal{O}'$ where $\nabla_{V,(v,u)}$ is of full rank, and the interior $\mathcal{O}''$ of the closed set where $\nabla_{V,(v,u)}$ is not of full rank. Using (ii) on $\mathcal{O}'$ and (iii) on $\mathcal{O}''$, we get (i) on the open set $\mathcal{O}' \cup \mathcal{O}''$. $\square$

1. Introduction

Dans deux articles posthumes [3,4],[2] Jacobi a exposé une borne sur l'ordre d'un système d'équations différentielles ordinaires. Celle-ci demeure conjecturale dans le cas général. Dans le cadre de l'algèbre différentielle, elle a été prouvée par Ritt [10] dans le cas linéaire (et retrouvée indépendamment par Volevich [14] dans un contexte légèrement différent), par Lando [8] dans le cas d'un système d'ordre 1 et par Kondratieva et al. sous l'hypothèse naturelle de quasi-régularité, introduite par Johnson dans [5], qui inclut dans le cas d'une variable les composantes singulières pour lesquelle la « puissance minimale » (low power) définie par Ritt dans ([11] p. 65) est 1.

Signalons aussi la preuve de cette borne pour des systèmes aux différences récemment fournie par Hrushovski dans [2].

Jacobi a également décrit un algorithme permettant de calculer en temps polynomial cette borne sans devoir rechercher le maximum des $n!$ combinaisons possibles. Cette contribution a été totalement oubliée, à l'exception d'une brève remarque de Cohn dans [1] qui n'a pas attiré l'attention. La méthode a été réinventée par Kuhn en 1955 [7], sous le nom de *méthode hongroise*, en hommage au mathématicien hongrois Egerváry (cf. [12] pour plus de détails historiques).

Nous donnons ici une version de la borne de Jacobi dans le cas quasi régulier, dans le cadre de la théorie des diffiétés (cf. [13,15]). Nous prouvons de plus que la borne est atteinte ssi la matrice jacobienne tronquée est de rang maximal, notre preuve reposant sur l'existence dans ce cas d'une forme normale pour un ordre convenable sur les dérivées.

2. Diffiétés

Définition 2.1. Soit J un ensemble dénombrable, on munit $\mathbf{R}^J$ de la topologie la plus grossière rendant pour tout $j_0 \in J$ la projection $\pi_{j_0} : (x_j)_{j\in J} \mapsto x_{j_0}$ continue. On appelle *diffiété* V_δ un ouvert de $\mathbf{R}^I$ pour cette topologie, muni d'une dérivation $\delta = \sum_{j\in J} c_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$, où les c_j sont des applications $\mathcal{C}^\infty$ ne dépendant que d'un *nombre fini* de coordonnées. On note $\mathcal{O}(V)$ l'anneau de telles applications sur la diffiété V.

Définition 2.2. On appelle morphisme de diffiétés une application $\phi : U_{\delta_1} \mapsto V_{\delta_2}$, définie par des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ ne dépendant que d'un nombre fini de coordonnées et telle que $\phi \circ \delta_1 = \delta_2 \circ \phi$.

Ces définitions diffèrent de celles habituellement données, où une diffiété est définie non par une dérivation, mais par l'espace vectoriel qu'elle engendre. Il n'en résulte pas de changement de fond, mais quelques simplifications dans l'exposé de nos résultats.

Définition 2.3. On appellera extension de diffiété et l'on notera V/U un couple de diffiétés muni d'une projection $\pi : V \mapsto U$ surjective qui est un morphisme de diffiétés. On appellera morphime d'extensions une application $\phi : V_1/U \mapsto V_2/U$ qui est un morphisme de diffiétés de V_1 dans V_2 tel que $\pi_2 \circ \phi = \pi_1$.

Cette définition *ad hoc* a pour but principal de correspondre géométriquement aux extensions de corps différentiels qui seraient considérées dans un cadre algébrique.

Définition 2.4. Un ordre $\preceq$ sur les dérivées est dit admissible si (i) $u \prec u'$ et (ii) $u \preceq v$ implique $u' \preceq v'$.

[2] On trouvera la traduction de ces textes sur la page web http://www.lix.polytechnique.fr/~ollivier/JACOBI/jacobi.htm.

Définition 2.5. On appelle *extension triviale* de dimension différentielle m et l'on note T^m/U_{δ_0} l'extension dont la dérivation est donnée dans des coordonnées $x_j^{(k)}$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $k \geqslant 0$, par $\delta_0 + \delta_1$ avec $\delta_1 = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{\infty} x_j^{(k+1)} \partial/\partial x_j^{(k)}$.

Définition 2.6. Soient $(y_\mu)_{\mu \in M}$ (resp. $(x_j^{(k)}, y_\mu)$, $\mu \in M$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $0 \leqslant k \leqslant e_j$ avec $e_{j \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}}$) des coordonnées sur U (resp. une extension V_δ/U_{δ_0}). En identifiant V_δ/U_{δ_0} avec son image dans T^m/U définie en posant $x_j^{(k)} = \delta^k x_j$, $1 \leqslant j \leqslant m$ et $k \in \mathbf{N}$, on dit qu'un système $g_i(x, y) = 0$, $1 \leqslant i \leqslant r$, où $g_i \in \mathcal{O}(T^m/U)$, définit l'extension V/U comme sous-extension de l'extension triviale T^m/U au voisinage d'un point (v, u) s'il existe un ouvert $\mathcal{O} \ni (v, u)$ de T^m/U tel que $\mathcal{O} \cap V/U = \{(x, y) \in \mathcal{O} \mid \forall k \in \mathbf{N}\ \forall i \in [1, r]\ g_i^{(k)}(x, y) = 0\}$.

Une extension est dite *de type fini* si tout point admet un voisinage isomorphe à une sous-extension de l'extension triviale.

Un système de la forme $x_{\alpha_i}^{(\gamma_i)} = f_i(x, y)$, où f_i ne dépend que de dérivées des x_j inférieures à $x_i^{(\gamma_i)}$ pour un ordre admissible, est appelé une *forme normale* de l'extension qu'il définit dans les coordonnées x.

Définition 2.7. Soit V/U une extension de diffiétés, définie comme sous extension de T^m/U par une forme normale $x_i^{(\gamma_i)} = f_i(x, y)$, $1 \leqslant i \leqslant r$. On appelle *dimension differentielle* de l'extension V/U le nombre $m - r$. Si l'extension est de dimension 0, son ordre est la dimension de $\pi^{-1}(u)$ en tout point $u \in U$ et vaut $\sum_{i=1}^{m} \gamma_i$. Sinon, on appelle *ordre de l'extension dans les coordonnées x au voisinage* de (v, u) l'ordre maximal, génériquement atteint, d'une sous-extension de V/U de dimension 0, définie en complétant une forme normale de V/U au voisinage de (v, u) par $m - r$ équations d'ordre nul en les x_i. *Pour $r < m$, l'ordre peut dépendre des coordonnées et du point choisi.*

3. L'algorithme de Jacobi

Nous allons décrire très brièvement l'algorithme de Jacobi, permettant de déterminer, en notant $S_{r,m}$ l'ensemble des injections de $[1, r]$ dans $[1, m]$, le maximum $\max_{\sigma \in S_{r,m}} \sum_{i=1}^{r} a_{i,\sigma(i)}$.

Définition 3.1. Soit $(a_{i,j})$ une matrice $m \times m$, avec $a_{i,j} \in \mathbf{N} \cup \{-\infty\}$, on appelle *maximum* un terme supérieur ou égal à tous les éléments de la même colonne, *maxima transversaux* des maxima situés dans des lignes et des colonnes toutes différentes. On appelle *canon* un m-uplet d'entiers $\lambda \in \mathbf{N}^r$ tels que la matrice $(a_{i,j} + \lambda_i)$ possède m maxima transversaux.

Jacobi a démontré [3] l'existence d'un unique canon minimal pour l'ordre défini par $\ell \leqslant \lambda$ si $\ell_i \leqslant \lambda_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$ et donné un algorithme permettant de calculer calculer en temps polynomial le canon minimal d'une matrice carrée. Si $r = m$, on en déduit directement le maximum $J_{V,(v,u)}$. Sinon, on se ramène au cas d'une matrice carrée en complétant la matrice des ordres par des lignes de 0 (qui s'interprètent comme les ordre des équations génériques de la Définition 2.7). On trouvera dans [9] une version de la méthode hongroise et une étude de sa complexité.

4. La borne

Définition 4.1. On dit qu'un système g_i est *quasi régulier* en un point de V si pour tout $s \in \mathbf{N}$ la matrice jacobienne $J_s(g)$ des applications dérivées $g_i^{(\ell)}$, $0 \leqslant \ell \leqslant s$ par rapport à toutes les dérivées des $x_j^{(k)}$ dont elles dépendent est en ce point de rang maximal égal à $r(s + 1)$.

Définition 4.2. Soit $g(x, y) = 0$ un système de r équations en m inconnues définissant V au voisinage d'un point (v, u) de T^m/U. Par convention, on notera $\mathrm{ord}_{V,(v,u),x_j} g_i$ le plus grand entier k tel que $\partial g_i/\partial x_j^{(k)}$ ne soit pas identiquement nul sur tout voisinage de (v, u) dans V, ou $-\infty$ si $\partial g_i/\partial x_j^{(k)} = 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ sur un voisinage de (v, u) dans V.[3]

[3] Cette convention correspond à la borne de Jacobi stricte. La preuve de Lando n'est valable que pour la borne faible, qui considère que l'ordre est nul dans ce cas. Remarquons aussi que la preuve donnée dans [6] fonctionne avec une borne définie par $\mathrm{ord}_{V,(v,u),x_j} g_i$, mais que le résultat est énoncé pour $\mathrm{ord}_{x_j} g_i$.

Soit $a_{i,j} := \mathrm{ord}_{V,(v,u),x_j} g_i$. Complétons éventuellement cette matrice de lignes de 0 afin de la rendre carrée si $r < m$. Soit λ un canon quelconque.

On posera $\Lambda = \max_i \lambda_i$, $\alpha_i = \Lambda - \lambda_i$ et $\beta_j = \max_i a_{i,j} - \alpha_i$. La *matrice jacobienne tronquée* $\nabla_{V,(v,u)}$ du système g est la matrice $(\partial g_i / \partial x_j^{(\alpha_i+\beta_j)})$. On appelle *ordre de Jacobi* un ordre tel que $x_{j_1}^{(k_1)} < x_{j_2}^{(k_2)}$ si $k_1 - \beta_{j_1} < k_2 - \beta_{j_2}$. Les *dérivées principales* de g_i sont les dérivées $x_j^{(\alpha_i+\beta_j)}$.

Remarque 1. Nous n'avons pas besoin d'utiliser le canon minimal. En supposant la suite α_i croissante, pour $k \geqslant \alpha_{i_0}$, la matrice $(\partial g_i^{(k-\alpha_i)} / x_j^{(k+\beta_j)})$, $1 \leqslant i \leqslant i_0$, $1 \leqslant j \leqslant m$ correspond aux i_0 premières lignes de $\nabla_{V,(v,u)}$.

Théorème 4.3. *Soit V/U une extension de type fini de dimension differentielle* 0*. Supposons-la définie comme sous extension d'un ouvert de T^m/U par un système de r équations $g_i(x) = 0$. On appelle nombre de Jacobi strict de V en (v,u) l'entier $J_{V,(v,u)} := \max_{\sigma \in S_{r,m}} \sum_{i=1}^{r} a_{i,\sigma(i)}$.*

(i) *Si le système g est quasi régulier en un point (v,u) de V/U, alors il existe un ouvert $\mathcal{O}$ dont l'adhérence est un voisinage de (v,u) et dont tout point admet un voisinage possédant une forme normale et d'ordre au plus $J_{V,(v,u)}$ dans les coordonnées x_i.*

(ii) *Si $\nabla_{V,(v,u)}$ est de rang maximal en (v,u), alors g est quasi régulier au voisinage de (v,u), V/U y est de dimension $m - r$, admet une forme normale et est d'ordre $J_{V,(v,u)}$ dans les coordonnées x_i.*

(iii) *Si le système g est quasi régulier en un point (v,u) de V/U et si le rang de $\nabla_{V,(v,u)}$ n'est pas maximal sur un voisinage ouvert de (v,u) dans V, il existe un ouvert $\mathcal{O}$ dont l'adhérence est un voisinage de (v,u) et dont tout point admet un voisinage possédant une forme normale et d'ordre strictement inférieur à $J_{V,(v,u)}$ dans les coordonnées x_i.*

Preuve. Celle-ci suit le schéma décrit par Jacobi dans [4] pour le calcul d'une forme normale. On remarque d'abord que $\mathrm{ord}_{V,x_j} g_i^{(s)} = \mathrm{ord}_{V,x_j} g_i + s$, en utilisant la formule $[\partial/\partial x_j^{(k+1)}, \delta] = \partial/\partial x_j^{(k)}$, où δ est la dérivation dans T^m.

(ii) Supposons que $\nabla_{V,(v,u)}$ soit de rang maximal en (v,u). On peut réordonner les équations g_i de sorte que la suite α_i soit croissante, et les x_i afin que les mineurs principaux constitués des i premières lignes et colonnes de $\nabla_{V,(v,u)}$ aient un déterminant D_i non nul pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$. La matrice jacobienne du système $G_s := \{g_i^{(k-\alpha_i)} \mid 0 \leqslant k \leqslant s\}$ contient une sous matrice carrée de taille maximale obtenue en dérivant chaque équation $g_i^{(k-\alpha_i)}$ par rapport aux dérivées principales $x_j^{(\beta_j+k)}$ telles que $\alpha_j \leqslant k$. En utilisant la remarque 1, celle-ci est triangulaire par blocs et son déterminant est égal à $\prod_{k=0}^{s} D_{\max\{i \mid \alpha_i \leqslant k\}}$. Cette matrice est donc pour tout s de rang maximal, ce qui entraîne la quasi-régularité de g au point (v,u).

En appliquant le théorème des fonctions implicites, on obtiendra alors sur un voisinage de (v,u) une relation de la forme $x_i^{(\alpha_i+\beta_i)} = f_i(v)$, $1 \leqslant i \leqslant r$ où f_i ne dépend pas de $x_j^{(\alpha_i+\beta_i)}$ pour $j \leqslant i$ et $\partial f_i / \partial x_j^{(k)}$ est nul sur V pour $k \geqslant \alpha_j + \beta_j$. Comme g définit V, pour s assez grand, la fonction f_i obtenue à partir du système G_s ne dépendra que de dérivées inférieures à $x_i^{(\alpha_i+\mu_i)}$ pour l'ordre de Jacobi tel que $x_{j_1}^{s+\beta_{j_1}} > x_{j_2}^{s+\beta_{j_2}}$ si $j_1 < j_2$. L'ordre dans les coordonnées x_i est alors $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i + \beta_i = J$ si $r = m$ et la diffiété est de dimension 0. En dimension positive, on se ramène à ce cas en ajoutant $m - r$ équations génériques d'ordre 0, c'est-à-dire telles que la matrice jacobienne tronquée demeure de rang maximal.

Pour (iii) et (i), on procède par récurrence sur $J_{V,(v,u)}$. Si $J = 0$, la quasi-régularité implique que $\nabla_{V,(v,u)}$ est de rang maximal et on utilise (ii) pour montrer (i) ; (iii) est alors trivial puisque son hypothèse est impossible.

(iii) Supposons que le système soit quasi régulier et que $\nabla_{V,(v,u)}$ s'annule identiquement sur un voisinage de (v,u). Supposant les équations ordonnées par α_i croissant, soit k le plus petit indice tel que les k premières lignes de $\nabla_{V,(v,u)}$ soient dépendantes. On peut procéder pour le système $g_1, \ldots, g_{i-1}$ comme dans la preuve de (ii) et calculer au voisinage de (v,u) une forme normale de la diffiété qu'il définit. Les équations $g_i^* := x_i^{(\alpha_i+\beta_i)} - f_i(v) = 0$ sont équivalentes à g_i pour $i < k$. On peut alors remplacer g_k par une équation équivalente en substituant aux dérivées principales $x_j^{(\alpha_k+\beta_j)}$, $1 \leqslant j < k$ les expressions $f_j^{(\lambda_j-\lambda_k)}$. On obtient ainsi une nouvelle équation g_k^* dont les dérivées $x_i^{(\alpha_i+\beta_i)}$, $i \leqslant k$ ont été éliminées et telle que le système $g_1^*, \ldots, g_k^*, g_{k+1} \ldots, g_r$ soit quasi régulier, équivalent à g_k avec

$\partial g_k/\partial x_i^{(\alpha_i+\beta_i)}$ nul sur V au voisinage de (v,u). Le nouveau système a donc un nombre de Jacobi strict J^* strictement inférieur à $J_{V,(v,u)}$, et on utilise (i) par récurrence.

(i) Supposons que $|\nabla_{V,(v,u)}| = 0$ au voisinage de (v,u), en utilisant (iii) on se ramène à un système équivalent avec une borne de Jacobi strictement inférieure. Sinon, soit $\mathcal{O}'$ l'ouvert où $|\nabla_{V,(v,u)}| \neq 0$, $\mathcal{O}''$ l'intérieur du fermé où $|\nabla_{V,(v,u)}| = 0$. En utilisant (ii) sur $\mathcal{O}'$ et (iii) sur $\mathcal{O}''$, on obtient (i) sur $\mathcal{O}' \cup \mathcal{O}''$ et (v,u) appartient à l'adhérence de cet ouvert. $\square$

5. Conclusion

La borne de Jacobi fournit un résultat théorique meilleur que la « borne de Bézout » différentielle $\sum_{j=1}^{m} \max_{i=1}^{r} a_{i,j}$, ce qui permet d'affiner les résultats où celle-ci intervient, comme le calcul de l'index.

Lorsque $\deg_{V,(v,u),x_j} g_i = \deg_{x_j} g_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant m$ et $\nabla_{V,(v,u)} \neq 0$, on peut calculer une forme normale de V en dérivant l'équation g_i au plus λ_i fois, si λ est le canon minimal, ce qui est d'un grand intérêt pratique.

Références

[1] R.M. Cohn, Order and dimension, Proc. Amer. Math. Soc. 87 (1) (1983) 1–6.
[2] E. Hrushovski, The elementary theory of the Frobenius automorphisms, preprint http://arXiv.org/abs/math/0406514, 2004.
[3] C.G.J. Jacobi, De investigando ordine systematis aequationum differentialum vulgarium cujuscunque, in: C.G.J. Jacobi's gesammelte Werke, fünfter Band, Bruck und Verlag fun Georg Reimer, Berlin, 1890, pp. 193–216.
[4] C.G.J. Jacobi, De aequationum differentialum systemate non normali ad formam normalem revocando, in: C.G.J. Jacobi's gesammelte Werke, fünfter Band, Bruck und Verlag fun Georg Reimer, Berlin, 1890, pp. 485–513.
[5] J. Johnson, Systems of *n* partial differential equations in *n* unknown functions: the conjecture of M. Janet, Trans. Amer. Math. Soc. 242 (August 1978).
[6] M.V. Kondratieva, A.V. Mihalev, E.V. Pankratiev, O granitse Yakobi dlya sistem obyknovennykh differentsialnykh mnogochlenov, in: Algebra, MGU, Moscow, 1982, pp. 79–85 (in Russian).
[7] H.H. Kuhn, The Hungarian method for the assignment problem, Naval Res. Logist. Quart. 2 (1955) 83–97.
[8] B.A. Lando, Jacobi's bound for the order of systems of first order differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 152 (1970) 119–135.
[9] J. Munkres, Algorithms for the assignment and transportation problems, J. Soc. Industr. Appl. Math. 5 (1957) 32–38.
[10] J.F. Ritt, Jacobi's problem on the order of a system of differential equations, Ann. Math. 36 (1935) 303–312.
[11] J.F. Ritt, Differential Algebra, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 33, Amer. Math. Soc., New York, 1950.
[12] A. Schrijver, On the history of combinatorial optimization (till 1960), in: K. Aardal, G.L. Nemhauser, R. Weismantel (Eds.), Handbook of Discrete Optimization, Elsevier, Amsterdam, 2005, pp. 1–68.
[13] I.S. Krasil'shchik, V.V. Lychagin, A.M. Vinogradov, Geometry of Jet Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations, Gordon and Breach, New York, 1986.
[14] L.R. Volevich, Ob obshchikh sistemax differentsialnykh uravnenij, Doklady AN SSSR 132 (1) (1960) 20–23 (in Russian); Traduction anglaise: On general systems of differential equations, Soviet. Math. 1 (1960) 458–465.
[15] V. Zharinov, Geometrical Aspects of Partial Differential Equations, in: Series on Soviet and East European Mathematics, vol. 9, World Scientific, Singapore, 1992.