Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007) 743–748
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse mathématique

Équations d'Hamilton–Jacobi liées aux jeux différentiels avec coût de type supremum

Oana-Silvia Serea

Département de mathématiques, Université de Perpignan, 52, avenue de Villeneuve, 66860 Perpignan cedex, France

Reçu le 3 mars 2006 ; accepté après révision le 24 avril 2007

Disponible sur Internet le 5 juin 2007

Présenté par Alain Bensoussan

Résumé

Cette Note est consacrée à l'existence et l'unicité des solutions de viscosité discontinues d'une EDP du type Hamilton–Jacobi liée à des problèmes de jeux différentiels avec coût de type supremum. ***Pour citer cet article : O.-S. Serea, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Abstract

Hamilton–Jacobi equations related with differential games with supremum cost. In this Note we present a study of the existence and uniqueness to discontinuous viscosity solutions of Hamilton–Jacobi PDE related with differential games with supremum cost. ***To cite this article: O.-S. Serea, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Abridged English version

We consider the PDE:

$$\begin{cases} \max[(\frac{\partial V}{\partial t}(t,x)+H(x,V(t,x),\frac{\partial V}{\partial x}(t,x)));(h(x)-V(t,x))]=0 \quad (t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^N; \\ \quad \text{with the final condition } V(T,x)=h(x),\, x\in\mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1}$$

where $H:\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\to\bar{\mathbb{R}}$ is a Hamiltonian and $h:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}+$ is a bounded function. As we shall see later, such PDEs appear in control (if H is concave) and in differential games with supremum cost (if H is non-concave). Interesting here is the fact that our approach seems to be the most appropriate if one wishes to study PDEs with non-concave and discontinuous Hamiltonian which has not yet been studied.

It is well known that (1) has an unique viscosity solution if h is Lipschitz (see [9,5]).

Our main aim is to prove existence and uniqueness of a solution in a suitable sense for (1) when h is discontinuous. In the whole paper, we consider the following assumptions:

Adresse e-mail : oana-silvia.serea@univ-perp.fr.

1631-073X/$ – see front matter © 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2007.05.002

(H$_1$) $H(\cdot, r, \cdot)$ is Lipschitz and $H(x, r, 0) \leqslant k$ for all $(x, r) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ with $h(x) \leqslant r$;
(H$_2$) $H(x, r_1, p) = H(x, r_2, p) \leqslant k(1 + |x|)$ for all $p \in \mathbb{R}^N$ when $h(x) \leqslant r_1$, $h(x) \leqslant r_2$ and $H(x, r, p) = \infty$ for all $(x, r, p) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ with $h(x) > r$;
(H$_3$) $H(x, r, \lambda p) = \lambda H(x, r, p)$ for $\lambda \geqslant 0$ and $(x, r, p) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

Let us define (see [1], page 286, Definition 1.1 for the definition of viscosity sub- and supersolutions that we employ here):

$$\Phi(h) := \left\{\varphi \mid \varphi \text{ u.s.c. viscosity subsolution of (1); } \varphi(t, x) \geqslant h(x) \text{ on } [0, T] \times \mathbb{R}^N; \varphi(T, x) \leqslant h(x) \text{ on } \mathbb{R}^N\right\},$$
$$\Psi(h) := \left\{\psi \mid \psi \text{ l.s.c. viscosity supersolution of (1); } \psi(t, x) \geqslant h(x) \text{ on } [0, T] \times \mathbb{R}\right\}.$$

Our main result is that (1) has a unique solution even if h is upper semicontinuous:

Theorem 1. *Suppose* (H$_1$)–(H$_3$) *and one of the following hypotheses,* (H$_4$) *or* (H$_5$)*, hold true*

(H$_4$) *$H(x, r, B(0, 1))$ is a convex set for all $(x, r) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ with $h(x) \leqslant r$,*
(H$_5$) *$H(x, r, \cdot)$ is concave for all $(x, r) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. Then we have*:
(1) *If h is upper semicontinuos* (*u.s.c.*) *there exists an unique function $V : [0, T] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, which is the solution of* (1) *i.e. $V = \max\{\varphi \mid \varphi \in \Phi(h)\}$ and $V(t_0, x_0) = \inf\{\psi(t_0, x_0) \mid \psi \in \Psi(h)\}$ for all $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^N$*;
(2) *If h is lower semicontinuous* (*l.s.c.*) *we have*: $V = \min\{\psi \mid \psi \in \Psi(h)\}$;
(3) *If h is bounded we have*: $V(t_0, x_0) = \inf\{\psi(t_0, x_0) \mid \psi \in \Psi(h)\}$ *for all* $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^N$.

This leads to the following definition for solutions of (1):

Definition 2. (Cf. [11]) A function u is a solution of (1) if and only if for all $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^N$ holds: $u(t, x) = \sup\{\varphi(t, x) \mid \varphi \in \Phi(h)\} = \inf\{\psi(t, x) \mid \psi \in \Psi(h)\}$.

This notion of solutions (cf. [11]) to (1) is inspired by different definitions of discontinuous viscosity solutions, e.g. Ishii–Barles solutions using semicontinuous envelopes (see [2,3]), Barron–Jensen–Frankowska semicontinuous solutions (see [6,10]) for convex Hamiltonians and Subbotin minmax solution (see [1,14]).

Following the idea of some results obtained in [9] with h Lipschitz, we will find a representation formula for the solution of (1) in sense of Definition 2 when h is discontinuous.

Looking at the hypotheses of Theorem 1, we recall that we have two cases: H non-concave and H concave, determined by the choice of (H$_4$) and (H$_5$), respectively.

First, if (H$_4$) is true, i.e. we are in the non-concave case, we obtain an expression for the solution by associating H with a differential game. To do this, we prove that there exists a function $f : \mathbb{R}^N \times U \times V \to \mathbb{R}^N$ satisfying:

$$H(x, r, p) = \max_{v \in V} \min_{u \in U} \big(p \cdot f(x, u, v)\big) \quad \text{if } h(x) \leqslant r \text{ and } +\infty \text{ if } h(x) > r. \tag{2}$$

The dynamics of the game is given by:

$$x'(t) = f\big(x(t), u(t), v(t)\big), \tag{3}$$

where $u \in \mathcal{U}(t_0) := \{u : [t_0, T] \to U,\ \text{measurable}\}$ and $v \in \mathcal{V}(t_0) := \{v : [t_0, T] \to V,\ \text{measurable}\}$ are the controls, and we denote by $x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot), v(\cdot))$ the solution of (3) starting from $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^N$. Here strategies that we recall now, are Elliot–Kalton–Varayia's strategies:

A map $\alpha : \mathcal{V}(t_0) \to \mathcal{U}(t_0)$ ($\beta : \mathcal{U}(t_0) \to \mathcal{V}(t_0)$) is a non-anticipative strategy for the first player (for the second player) if for any $t \geqslant t_0$ and for any v_1 and v_2 (respectively u_1 and u_2) belonging to $\mathcal{V}(t_0)$ (respectively $\mathcal{U}(t_0)$), such that v_1 and v_2 (u_1 and u_2) coincide almost everywhere on $[t_0, t]$, and the images $\alpha(v_1)$ and $\alpha(v_2)$ ($\beta(u_1)$ and $\beta(u_2)$) coincide almost everywhere on $[t_0, t]$. Let $\Gamma(t_0)$ (respectively $\Delta(t_0)$) be the set of such non-anticipative strategies for the first (respectively the second) player.

It is well known that the lower and respectively the upper value associated with (3)

$$V^-(t_0, x_0) := \inf_{\alpha \in \Gamma(t_0)} \sup_{v \in \mathcal{V}(t_0)} C_{t_0, x_0}\big(\alpha(v), v\big) \quad \text{and} \quad V^+(t_0, x_0) := \sup_{\beta \in \Delta(t_0)} \inf_{u \in \mathcal{U}(t_0)} C_{t_0, x_0}\big(u, \beta(u)\big) \tag{4}$$

are the solution to (1) in the case of continuous h. More precisely, if h is continuous, we obtain the existence of the value of the game namely $V = V^+ = V^-$, which is the viscosity solution of (1). If h is upper semicontinuous we modify the value functions. Following the same idea, we obtain a representation formula of the type (4) for the generalized discontinuous solution of (1).

Secondly, if we suppose that (H_5) holds, i.e. we are in the case of a concave H, we will use the same approach as in the non-concave case. Namely, we will find a controlled system with a dynamics given by (7) where f does not depends on v, which Hamiltonian is H. Moreover, we have the representation of the value $V := V^+$ which is the solution of (1).

Note that the previous method does not work and the result is weaker if h is l.s.c. (see (2) and (3) of Theorem 1).

1. Introduction

On considère l'EDP :

$$\begin{cases} \max[(\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + H(x, V(t,x), \frac{\partial V}{\partial x}(t,x))); (h(x) - V(t,x))] = 0 \quad (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^N; \\ \quad \text{avec la condition finale } V(T,x) = h(x), x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{5}$$

où $H : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \bar{\mathbb{R}}$ est un Hamiltonien et $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée que l'on supposera positive. Nous allons voir dans la suite que ce genre d'EDP intervient dans les problèmes de contrôle (si H est concave) et dans les jeux différentiels avec coût en supremum (si H est non concave). Ce qui est intéressant ici est le fait que notre approche semble la plus appropriée pour l'étude de notre problème car elle va permettre de considérer les EDP avec Hamiltonien non concave et discontinu. Notons que ce problème n'a pas été étudié pour le coût semicontinu et pour un Hamiltonien non concave et que c'est donc là où se trouve l'originalité principale de cette note (pour le problème de contrôle avec Hamiltonian convexe et coût continu voir [2,7]).

Quand h est Lipschitzienne, il est montré que l'EDP (5) a une solution de viscosité unique (voir [9,5,14]). Le but de cette Note est d'étudier (5) quand h est semicontinue ou encore plus, discontinue et d'examiner les types de résultats d'unicité pour les solutions semicontinues que l'on peut quand même obtenir.

Dans toute la suite on supposera :

(H_1) $H(\cdot, r, \cdot)$ est Lipschitzienne et $H(x, r, 0) \leqslant k$ pour tout $(x, r) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ avec $h(x) \leqslant r$;
(H_2) $H(x, r_1, p) = H(x, r_2, p) \leqslant k(1 + |x|)$ pour tout $p \in \mathbb{R}^N$ quand $h(x) \leqslant r_1$, $h(x) \leqslant r_2$ et $H(x, r, p) = \infty$ pour tout $(x, r, p) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ avec $h(x) > r$;
(H_3) $H(x, r, \lambda p) = \lambda H(x, r, p)$ pour $\lambda \geqslant 0$ et $(x, r, p) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

Nous allons maintenant étudier le cas h semicontinue supérieurement.[1] Notons par (voir [1], page 286, Définition 1.1 pour les notions de sous- et sur-solution de viscosité utilisées ici) :

$$\begin{aligned} \Phi(h) &:= \big\{\varphi \mid \varphi \text{ s.c.s. sous-solution de viscosité pour (5)}; \varphi(t,x) \geqslant h(x) \text{ sur } [0,T] \times \mathbb{R}^N; \\ &\qquad \varphi(T,x) \leqslant h(x) \text{ sur } \mathbb{R}^N\big\}, \\ \Psi(h) &:= \big\{\psi \mid \psi \text{ s.c.i. sur-solution de viscosité pour (5)}; \psi(t,x) \geqslant h(x) \text{ sur } [0,T] \times \mathbb{R}\big\}. \end{aligned}$$

Le résultat obtenu est :

Théorème 1. *Sous les hypothèses* (H_1)–(H_3) *et si l'une des hypothèses suivantes* (H_4) *ou* (H_5) *est satisfaite,*

(H_4) $H(x, r, B(0,1))$ *est convexe pour* $(x, r) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ *avec* $h(x) \leqslant r$;
(H_5) $H(x, r, \cdot)$ *est concave pour tout* $(x, r) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$, *on a* :
  (1) *Si h est semicontinue supérieurement (s.c.s.) il existe une unique fonction* $V : [0,T] \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, *solution de* (5) *au sens où* $V = \max\{\varphi | \varphi \in \Phi(h)\}$ *et* $V(t_0, x_0) = \inf\{\psi(t_0, x_0) \mid \psi \in \Psi(h)\}$ *pour tout* $(t_0, x_0) \in [0,T] \times \mathbb{R}^N$;

[1] Dans le cas h semicontinue inférieurement, assez différent du cas h semicontinue supérieurement, la méthode précédente ne marche pas, et le résultat est moins fort (voir (2) et (3) du Théorème 1).

(2) *Si h est semicontinue inférieurement* (s.c.i.) *on a* : $V = \min\{\psi \mid \psi \in \Psi(h)\}$;
(3) *Si h est bornée on a* : $V(t_0, x_0) = \inf\{\psi(t_0, x_0) \mid \psi \in \Psi(h)\}$ *pour tout* $(t_0, x_0) \in [0, T] \times \mathbb{R}^N$.

Ceci nous conduit à la définition de solution généralisée suivante :

Définition 2. (Cf. [11]) Une fonction u est solution de (5) si et seulement si pour tout $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^N$ on a : $u(t, x) = \sup\{\varphi(t, x) \mid \varphi \in \Phi(h)\} = \inf\{\psi(t, x) \mid \psi \in \Psi(h)\}$.

Ceci est motivé par des différentes définitions de solutions de viscosité semicontinues pour les EDP ([1,7,6,10]). La définition est empruntée à [11] et est fortement liée aux notions des solutions semicontinues de viscosité introduites par Frankowska et Barron–Jensen [6,10] et aux solutions de type Ishii–Barles présentées dans [2,3], définies en utilisant les enveloppes semicontinues et aux solutions du type minmax de Subbotin [1,14].

Les hypothèses (H_1)–(H_5) jouent un rôle remarcable dans la preuve du Théorème 1 en assurant la régularité nécessaire et standard pour les dynamiques que nous allons définir et utiliser pour le contrôle et les jeux différentiels (voir [11]). La preuve est divisée en deux cas : H non-concave et H concave :

2. Cas des Hamiltoniens non-concaves

La clef de la preuve est d'utiliser le résultat suivant (voir [1,9]) qui conduit à une formule de représentation pour la solution de (5).

Lemme 3. *Si H vérifie les hypothèses* (H_1)–(H_3), (H_4) *il existe un système bicontrôlé donné par une application*[2] $f : \mathbb{R}^N \times U \times V \to \mathbb{R}^N$ *ou* $U = V \subset \mathbb{R}^{2N}$ *où B est la boule unité, vérifiant la condition d'Isaacs* :

$$\max_{v\in V} \min_{u\in U} \big(p, f(x, u, v)\big) = \min_{u\in U} \max_{v\in V} \big(p, f(x, u, v)\big) \quad \text{pour tout } x, p \in R^N \tag{CI}$$

dont H est l'Hamiltonien c.à.d. :

$$H(x, r, p) = \max_{v\in V} \min_{u\in U} \big(p \cdot f(x, u, v)\big) \quad \text{si } h(x) \leqslant r \quad \text{et} \quad +\infty \quad \text{si } h(x) > r. \tag{6}$$

Démonstration. Soit $h(x) \leqslant r$. Il est facile de voir que pour

$$|p| \leqslant \Lambda \quad \text{et} \quad U_1 = B = B(0, 1), \quad V_\Lambda = B(0, \Lambda) \quad \text{on a } H(x, r, p) = \max_{v_1\in V_\Lambda} \min_{u_1\in U_1} \big(pf(u_1) + g(x, u_1, v_1)\big)$$
$$\text{où } f(u_1) = ku_1 \text{ et } g(x, u_1, v_1) = H(x, r, v_1) - ku_1v_1.$$

En effet,

$$H(x, r, p) = \max_{v\in V} \min_{u\in U} \big(pf(x, u, v)\big).$$

où $v = (v_1, v_2)$; $u = (u_1, u_2)$ et $f(x, u, v) = f(u_1) + cv_2 + (g(x, u_1, v_1) - c)u_2$.

L'absence d'hypothèse de concavité sur H conduit à un problème des jeux différentiels.

2.1. Description du jeu différentiel

On considère la dynamique donnée par l'équation suivante[2]

$$x'(t) = f\big(x(t), u(t), v(t)\big) \tag{7}$$

[2] Dans cette Note f vérifie (H_f) : $f : R^N \times U \times V \to R^N$ est continue, $f(\cdot, u, v)$ est Lipschitzienne et à croissance linéaire et $f(x, u, V) = \{f(x, u, v), v \in V\}$, $f(x, U, v) = \{f(x, u, v), u \in U\}$, U et V sont des ensembles convexes, compacts, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et $(u, v) \in U \times V$. Pour éviter une répétition, quand il s'agit du contrôle, on considère les mêmes hypothèses sur f (qui dans ce cas ne dépends pas de v)

gouvernée par deux contrôles, $u(\cdot):[0,T]\to U$ et $v(\cdot):[0,T]\to V$, qui sont des fonctions mesurables et on note par $x(\cdot;t_0,x_0,u(\cdot),v(\cdot))$ la solution de (7) partant de $(t_0,x_0)\in[0,T]\times\mathbb{R}^N$. Le premier joueur (qui choisit le contrôle $u(\cdot)$) cherche à minimiser le coût :

$$C_{t_0,x_0}\big(u(\cdot),v(\cdot)\big)=\sup_{\tau\in[t_0,T]} h\big(x\big(\tau;t_0,x_0,u(\cdot),v(\cdot)\big)\big),$$

tandis que le second joueur (qui choisit le contrôle $v(\cdot)$) cherche à le maximiser. Pour la définition du jeu on utilise les stratégies non anticipatives d'Elliot–Kalton–Varayia [8] :

Une stratégie non anticipative pour le premier (second) joueur est une application $\alpha:\mathcal{V}(t_0)\to\mathcal{U}(t_0)$ $(\beta:\mathcal{U}(t_0)\to\mathcal{V}(t_0))$ *vérifiant : pour tout* $s\in[t_0,T]$, *si deux contrôles* v_1 *et* v_2 *de* $\mathcal{V}(t_0)$ $(u_1$ *et* u_2 *de* $\mathcal{U}(t_0))$ coïncident presque partout sur $[t_0,s]$ *alors* $\alpha(v_1)$ *et* $\alpha(v_2)$ $(\beta(u_1)$ *et* $\beta(u_2))$ *coïncident presque partout sur* $[t_0,s]$.

Ici $\mathcal{U}(t_0):=\{u:[t_0,T]\to U,\ \text{mesurable}\}$, $\mathcal{V}(t_0):=\{v:[t_0,T]\to V,\ \text{mesurable}\}$ et $\Gamma(t_0)$; $\Delta(t_0)$ désignent respectivement les contrôles et l'ensemble des stratégies non-anticipatives pour le premier et le second joueur.

Pour tout (t_0,x_0), on définit la fonction valeur inférieure et respectivement, supérieure :

$$V^-(t_0,x_0):=\inf_{\alpha\in\Gamma(t_0)}\sup_{v\in\mathcal{V}(t_0)} C_{t_0,x_0}\big(\alpha(v),v\big)\quad\text{et}\quad V^+(t_0,x_0):=\sup_{\beta\in\Delta(t_0)}\inf_{u\in\mathcal{U}(t_0)} C_{t_0,x_0}\big(u,\beta(u)\big).\tag{8}$$

Une question importante de la théorie des jeux est l'existence d'une valeur c.à.d. l'égalité $V^+=V^-$.

Dans le cas h Lipschitzienne à l'aide de la Programmation Dynamique (voir [13]) on montre que le jeu a une valeur qui est l'unique solution de viscosité pour (5) (avec H de la forme (6)).

2.2. Un jeu différentiel modifié

Notre démarche va suivre [4,11] avec deux difficultés supplémentaires : les fonctions valeur peuvent être discontinues ici (dans [4] elles sont toujours Lipschitziennes) et les techniques de jeux différentiels de [11] ne sont pas adaptées à notre problème (dans [11] on a le Problème de Mayer où le cas h s.c.s. est similaire avec le cas h s.c.i.), mais nous nous en inspirerons.

Quand h est s.c.s. avec la définition des fonctions valeur (8) les techniques de stabilité et sup-convolution (voir [13]) permetent de montrer seulement l'inégalité $V^+\geqslant V^-$. Nous avons quand même trouvé un moyen d'obtenir l'existence d'une valeur. Plus précisément, nous allons modifier la définition des fonctions valeur. Pour faire ceci regardons plus attentivement (8) et notons pour tout $(t_0,x_0)\in[0,T]\times\mathbb{R}^N$, $\beta\in\Delta(t_0)$, $\alpha\in\Gamma(t_0)$ par

$$B_{\beta,h}(t_0,x_0):=\Big\{\big|x=x(\tau_u)\big|h\big(x(\tau_u)\big)=\sup_{[t_0,T]}h\big(x(\tau)\big);\,x(\cdot):=x\big(\cdot;t_0,x_0,u,\beta(u)\big)\big);\,u\in\mathcal{U}(t_0)\Big\},$$

$$A_\alpha(t_0,x_0):=\big\{x=x\big(\tau;t_0,x_0,v,\alpha(v)\big)\mid v\in\mathcal{V}(t_0),\,\tau\in[t_0,T]\big\}.$$

La définition des fonctions valeur peut se reécrire :

$$V^-(t_0,x_0)=\inf_{\alpha\in\Gamma(t_0)}\sup_{x\in A_\alpha(t_0,x_0)}h(x)\quad\text{et}\quad V^+(t_0,x_0)=\sup_{\beta\in\Delta(t_0)}\inf_{x\in B_{\beta,h}(t_0,x_0)}h(x).$$

Observons qu'en utilisant les propriétés des trajectoires nous pouvons obtenir que

$$\operatorname{adh}B_{\beta,h}(t_0,x_0)\cap\operatorname{adh}A_\alpha(t_0,x_0)\neq\emptyset.\tag{9}$$

La nouvelle définition pour les fonctions valeur dans le cas h *s.c.s.* est :

$$\tilde V^-(t_0,x_0)=\inf_{\alpha\in\Gamma(t_0)}\sup_{x\in\operatorname{adh}A_\alpha(t_0,x_0)}h(x)\quad\text{et}\quad\tilde V^+(t_0,x_0)=\sup_{\beta\in\Delta(t_0)}\inf_{x\in\operatorname{adh}B_{\beta,h}(t_0,x_0)}h(x)\tag{10}$$

où adh$A$ est la fermeture de A. Comme conséquence directe de cette définition et de la propriété (9) nous obtenons l'inégalité : $\tilde V^+\leqslant\tilde V^-$. Il est facile de voir que $V^+=\tilde V^+$. De plus, si h est continue, on peut se dispenser de l'adhérence dans la définition (10) et on a alors $\tilde V^-=\tilde V^+=V^-=V^+$.

Pour obtenir l'existence d'une valeur montrons l'inégalité : $\tilde V^+\geqslant\tilde V^-$. La définition de sur- et sous-solution de viscosité (voir [4]) permet d'obtenir :

Lemme 4. *(Cf. [11]) Si* $\psi\in\Psi(h)$, $\varphi\in\Phi(h)$ *et* $(t_0,x_0)\in(0,T)\times\mathbb{R}^N$ *alors* : $\exists\alpha\in\Gamma(t_0),\forall v\in\mathcal{V}(t_0):\psi(t_0,x_0)\geqslant\psi(t,x(t;t_0,x_0,\alpha(v),v))$ *et* $\exists\beta\in\Delta(t_0),\forall u\in\mathcal{U}(t_0),\forall\tau\in[t_0,T]$ *si* $\varphi(t,x(t))>h(t,x(t))$ *pour* $t\in[t_0\tau]$ *alors* $\varphi(t_0,x_0)\leqslant\varphi(\tau,x(\tau))$, *avec* $x(\cdot):=x(\cdot;t_0,x_0,u,\beta(u))$.

Le Lemme 4 expime que la fonction $t \to (t,\ x(t),\ \psi(t_0, x_0))$ reste dans l'épigraphe de ψ et la fonction $t \to (t,$ $x(t),\ \varphi(t_0, x_0))$ reste dans l'hypographe de φ jusqu'elle touche l'ensemble $[0, T] \times \mathrm{Hypo}(h)$.[3] Pour le contrôle ce phénomène est connu comme la propriété de viabilité avec cible (voir [12]). Cette observation, une technique de sup-convolution (voir [11]) et des résultats de stabilité (voir [3]) permettent de montrer que $\tilde{V}^+ \geqslant \tilde{V}^-$. Alors on peut conclure que le jeu différentiel modifié admet une valeur : $\tilde{V}^+ = \tilde{V}^- := \tilde{V}$, qui satisfait les propriétés du Théorème 1.

3. Cas des Hamiltoniens concaves

Nous allons suivre une démarche similaire que celle du cas nonconcave. On cherche une formule de représentation pour la solution semicontinue de (5) un utilisant le résultat suivant (voir [10]) :

Lemme 5. *Si H vérifie les hypothèses* (H_1)–(H_3), (H_5)*, il existe un système contrôlé dont la dynamique est donnée par* (7) *où f ne dépend pas de v et H est l'Hamiltonien du système* ; *la valeur*

$$V(t_0, x_0) = \inf_{u \in \mathcal{U}(t_0)} \sup_{\tau \in [t_0, T]} h\big(x(\tau; t_0, x_0, u)\big),$$

est alors l'unique solution généralisée pour (5) *satisfaisant les propriétés du Théorème* 1.

Réciproquement si l'on part du système contrôlé dont la dynamique est donnée par (7) où f ne dépend pas de v, alors H est donné par la formule (6) et la valeur V est l'unique solution de viscosité généralisée pour (5).

Notons que ce type de résultats peut être étendu au problème de minimisation d'un coût intégral (*avec l positif*) :

$$C_{t_0, x_0}\big(u(\cdot), v(\cdot)\big) = \sup_{\tau \in [t_0, T]} \left\{ h\big(x(\tau; t_0, x_0, u, v)\big) + \int_{t_0}^{\tau} l\big(x(s; t_0, x_0, u, v)\big)\, \mathrm{d}s \right\}.$$

Références

[1] M. Bardi, I. Capuzzo-Dolcetta, Optimal Control and Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman Equations, Birkhäuser, Boston, 1997.
[2] G. Barles, B. Perthame, Discontinuous solutions of deterministic optimal stopping time problems, RAIRO, Modélisation Math. Anal. Numér. 21 (1987) 557–579.
[3] G. Barles, Solutions de viscosité des équations de Hamilton–Jacobi, Springer, Paris, 1994.
[4] E.N. Barron, Differential games with maximum cost, Nonlinear Anal. 14 (11) (1990) 971–989.
[5] E.N. Barron, H. Ishii, The Bellman equation for minimizing the maximum cost, Nonlinear Anal. 3 (1989) 1067–1090.
[6] E.N. Barron, R. Jensen, Semicontinuous viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations with convex Hamiltonian, Comm. Partial Differential Equations 15 (1990) 1713–1742.
[7] E.N. Barron, W. Liu, Semicontinuous solutions for Hamilton–Jacobi equations and the L^∞-control problem, Appl. Math. Optim. 34 (1996) 325–360.
[8] N.J. Elliot, N.J. Kalton, The existence of value in differential games, Mem. Amer. Math. Soc. (1972) 126.
[9] L.C. Evans, P.E. Souganidis, Differential games and representation formulas for solutions of Hamilton–Jacobi equations, Indiana Univ. Math. J. 33 (1984) 773–797.
[10] H. Frankowska, Lower semicontinuous solutions of the Bellman equation, SIAM J. Control Optim. 31 (1993) 257–272.
[11] S. Plaskacz, M. Quincampoix, Value function for differential games and control systems with discontinuous terminal cost, SIAM J. Control Optim. 39 (5) (2001) 1485–1498.
[12] M. Quincampoix, V. Veliov, Viability with a target: Theory and applications, in: B. Cheshankov, M. Todorov (Eds.), Applications of Mathematical Engineering, Heron Press, Sofia, 1998, pp. 47–58.
[13] O.-S. Serea, Discontinuous differential games and control systems with supremum cost, J. Math. Appl. 270 (2002) 519–542.
[14] A.I. Subbotin, Generalized of First-Order PDEs the Dynamical Optimization Perspective, Birkhäuser, Boston, 1995.

[3] $\mathrm{Hypo}(\varphi) = \{(t, x, r) \in [0, T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \mid \varphi(t, x) \geqslant r\}$ et $\mathrm{Epi}(\psi) = \{(t, x, r) \in [0, T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \mid \psi(t, x) \leqslant r\}$.