

Problèmes mathématiques de la mécanique

Une remarque sur les bifurcations avec une singularité quadratique pour les systèmes $O(3)$ invariants

Pascal Chossat ^{a,b}

^a I.N.L.N. (UMR 6618 CNRS), Sophia Antipolis, 06560 Valbonne, France

^b Laboratoire J.-A. Dieudonné (UMR 6621 CNRS), Université de Nice Sophia Antipolis, Parc Valrose, 06108 Nice cedex 2, France

Reçu le 2 mars 2007 ; accepté le 14 mars 2007

Disponible sur Internet le 20 avril 2007

Présenté par Gérard Iooss

Résumé

Pour les systèmes invariants par une représentation irréductible du groupe $O(3)$, le diagramme de bifurcation est différent selon qu'on considère une représentation « naturelle » (c'est-à-dire agissant sur les champs scalaires) ou « anti-naturelle » (agissant sur les champs pseudoscalaires). Cette propriété est mise à profit pour étudier la singularité de codimension 2 qui apparaît dans le cas d'une représentation naturelle de degré ℓ pair, lorsque le coefficient de l'unique terme quadratique dans l'équation de bifurcation est voisin de 0. Une conséquence de cette approche est de montrer que certaines solutions d'isotropie non maximale qui bifurquent pour la représentation naturelle, peuvent être considérées comme des « vestiges » de solutions d'isotropie maximale pour la représentation anti-naturelle. *Pour citer cet article : P. Chossat, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).*

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

A remark on $O(3)$ -invariant bifurcations with a quadratic singularity. For invariant systems under an irreducible action of the group $O(3)$, the bifurcation diagram is different whether the group action is 'natural' (acting on scalar fields) or 'antinatural' (acting on pseudoscalar fields). This property is exploited to study the codimension 2 singularity which appears in the case of a natural representation with even degree ℓ , when the coefficient of the unique quadratic term in the equations is close to 0. A consequence of this approach is that a class of bifurcated solutions which exist for the natural representation, can be seen as 'remains' of solutions with maximal isotropy for the antinatural representation. *To cite this article: P. Chossat, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).*

© 2007 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

In classical bifurcation problems with spherical symmetry such as the onset of convection of a fluid in a self-gravitating spherical shell, the bifurcation equations reduce to an $O(3)$ invariant system in the space V_ℓ spanned by the spherical harmonics (1) where ℓ depends on the physical set up of the problem and tends to infinity as the thickness of the shell tends to 0. The space V_ℓ is irreducible under the action of the rotation group $SO(3)$. Moreover,

Adresse e-mail : pascal.chossat@cirm.univ-mrs.fr.

the antipodal symmetry acts on each $Y_{\ell,m}$ as in (2). This representation T^ℓ of $\mathbf{O}(3)$ is called ‘natural’. It follows that when ℓ is odd, there is no quadratic term (more generally, no term of even order) in the equations. When ℓ is even on the contrary, there exists precisely one quadratic equivariant map in V_ℓ , no matter what the value of ℓ is. In this case, the bifurcation branches are transcritical and the bifurcated solutions are unstable near onset. It turns out, however, that in the problem of convection, due to the special form of the nonlinearity in the momentum and heat equations, the coefficient in front of this quadratic term vanishes or at least, is small (see [6]). Finding turning points on the bifurcated branches, secondary bifurcations and stable solutions are then accessible to a local analysis by considering the codimension 2 singularity which occurs when the quadratic coefficient is a second free parameter in the equations. This problem was completely solved in the $\ell = 2$ case [5] and it was tackled in the $\ell = 4$ case by [4–6].

If terms of order higher than 3 in the bifurcation equations are neglected, this problem can also be seen as a perturbation, breaking the symmetry S , of a problem which is invariant under the same representation of $\mathbf{SO}(3)$ but where S acts as in (3) (‘antinatural’ representation of degree ℓ which we write \tilde{T}^ℓ). Under some generic assumptions, these truncated equations read like (4) where λ is the bifurcation parameter and ϵ is close to 0. Q is the (unique) quadratic term and C is the nonradial cubic part in the bifurcation equations. Clearly when $\epsilon = 0$, this equation commutes with \tilde{T}^ℓ , while if $\epsilon \neq 0$, the S symmetry is broken.

We now denote by $\text{Fix}(H)$ the subspace of V_ℓ formed by all the elements which are invariant under the action of the isotropy subgroup H . Each isotropy subgroup belongs to a conjugacy class $[H]$ which we call the ‘isotropy type’ of H . Set inclusion induces a partial order on isotropy types and we can define the ‘isotropy lattice’ of the action of $\mathbf{O}(3)$ in V_ℓ . For subgroups of $\mathbf{O}(3)$ we use the notation of [5], see also [2] for a correspondence table with Schönflies notation. Thanks to the $\mathbf{O}(3)$ invariance of the bifurcation equations, these equations leave each subspace $\text{Fix}(H)$ invariant. When $\dim \text{Fix}(H) = 1$, this leads to the existence (under generic conditions) of a bifurcated branch of solutions with isotropy type $[H]$. When $\dim \text{Fix}(H) > 1$ no such general result exists and the existence of solutions with that isotropy depend on the form of the dominant terms in the bifurcation equation up to a high enough order [3].

The following lemmas are straightforward (the second lemma is a consequence of the computations of isotropy types and dimensions of fixed-point subspaces provided in [5]):

Lemma 0.1. *Every isotropy type for the representation of degree ℓ of $\mathbf{SO}(3)$ is an isotropy type for the representation \tilde{T}^ℓ of $\mathbf{O}(3)$, and the associated fixed-point subspaces are identical.*

Suppose now that $[H] < [H']$ where H' is an isotropy type for $\mathbf{O}(3)$ but not for $\mathbf{SO}(3)$, such that $\dim \text{Fix}(H') = 1$ and there exist no $[\tilde{H}]$ satisfying the relation $[H] < [\tilde{H}] < [H']$.

Lemma 0.2. *For H and H' as above, the only possibilities are: (i) $H = \mathbf{D}_m$ and $H' = \mathbf{D}_{2m}^d$ (all $\ell > 2$ and $\ell/3 < m \leq \ell$), (ii) $H = \mathbb{T}$ and $H' = \mathbb{O}^-$ (for $\ell = 6, 10, 12, 14, 16, 20$).*

Moreover $\dim \text{Fix}(H) = 3$ if $H = \mathbf{D}_m$ with $\ell/3 < m \leq \ell/2$, or if $H = \mathbb{T}$ with $\ell = 12$. In all other cases, $\dim \text{Fix}(H) = 2$.

We now have the following proposition:

Proposition 0.3. *Under the hypotheses of Lemma 0.2, let us assume that $\ell > 2$. Then for $\lambda > 0$ and ϵ close to 0, there exists a family of solutions with isotropy H and the leading part of which is equal in the limit $\epsilon = 0$ to the solution with isotropy H' of (4).*

When $\dim \text{Fix}(H) = 2$, the proof of this proposition relies on the fact that a system of coordinates can be found such that the bifurcation equations restricted to $\text{Fix}(H)$ take the form (5), (6), where x has isotropy $H_0 \subset \mathbf{SO}(3)$ and y has isotropy H' . Moreover the coefficients satisfy the conditions $\beta \neq 0$ and $b - d \neq 0$. Then the existence of a family of solutions with isotropy H and ‘close’ to the generic solutions of (4) in $\text{Fix}(H')$ can be easily established. A similar proof can be made when $\dim \text{Fix}(H) = 3$.

In general, the plane $\text{Fix}(H)$ contains three axes of symmetry $H_0, H'_0, H''_0 \subset \mathbf{SO}(3)$, which ‘saturates’ the quadratic part of (5), (6), see [3] or [2]. Solutions with isotropy type $[H]$ then result from secondary bifurcations on these axes. This, however, is not always the case. If for example $H = D_\ell$ with $\ell \geq 6$, then there is only one axis of symmetry $\text{Fix}(\mathbf{O}(2)) \subset \text{Fix}(H)$. If, in addition, $(\alpha - \gamma)\beta < 0$, then a branch of solutions with isotropy H generically bifurcates

from 0 (no matter the value of ϵ is). This happens when $\ell = 6 + 4j$ ($j \geq 0$), as shown in [1]. Proposition 0.3 then allows for (4) with $\epsilon = 0$.

In Section 3 below, the relevant part of the lattice of isotropy types is shown when $\ell = 6$. The numbers in parentheses indicate dimensions of the subspaces $\text{Fix}(H)$ for types on the corresponding line. When ϵ is close to 0 secondary branches with isotropy \mathbf{D}_3 , \mathbf{D}_4 , \mathbf{D}_5 and \mathbb{T} occur. Solutions with isotropy \mathbf{D}_6 bifurcate from 0. The computation of the bifurcation diagram and the stability of the solutions requires a precise knowledge of the quadratic and cubic equivariants.

1. Position du problème

L'intérêt pour les problèmes de bifurcation en présence de symétrie sphérique s'est surtout développé à partir de l'étude de la convection géophysique et astrophysique. Une première et importante approximation de ces systèmes consiste à supposer que le fluide est confiné dans une coque sphérique, que celle-ci est immobile dans un repère galiléen et que le fluide est soumis à un champ de gravitation central. On sait alors que la première instabilité convective apparaît par une bifurcation stationnaire pour des modes propres sphériques associés à une représentation naturelle irréductible du groupe $\mathbf{O}(3)$, lui-même égal à $\mathbf{SO}(3) \cup -\text{Id} \cdot \mathbf{SO}(3)$. L'espace V_ℓ de cette représentation admet une base orthogonale formée par les harmoniques sphériques

$$Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) = P_\ell^m(\cos \theta)e^{mi\varphi}, \quad -\ell \leq m \leq \ell, \ell > 0 \tag{1}$$

où P_ℓ^m sont les polynômes de Legendre associés et le degré ℓ de la représentation dépend de l'épaisseur de la coque fluide et croît lorsque celle-ci diminue. La symétrie par rapport à l'origine transforme chaque $Y_{\ell,m}$ de la façon suivante :

$$S \cdot Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) = Y_{\ell,m}(\pi - \theta, \varphi + \pi) = (-1)^\ell Y_{\ell,m}(\theta, \varphi). \tag{2}$$

On note T^ℓ cette représentation « naturelle ». Il découle de ces relations que lorsque ℓ est pair, S agit trivialement et il existe un terme équivariant quadratique générique dans les équations de bifurcation, tandis que lorsque ℓ est impair, les premiers termes nonlinéaires sont cubiques. Dans le cas pair, les branches bifurquées sont transcritiques et de plus les solutions correspondantes sont toujours instables près du seuil (voir [3]). Cependant le problème de convection possède une autre propriété fondamentale qui est liée à la nature de la nonlinéarité dans les équations du problème : le coefficient du terme quadratique s'annule ou est proche de 0, voir par exemple [6]. La détermination des points de retournement sur les branches bifurquées, des bifurcations secondaires et des familles de solutions stables, est alors accessible à l'analyse locale en considérant la singularité de codimension 2 qui apparaît lorsque le coefficient du terme quadratique est un second paramètre libre, ce qui a été fait complètement dans le cas $\ell = 2$ (voir [5]) et en grande partie dans le cas $\ell = 4$ par [4–6]. Les cas où $\ell \geq 6$, de complexité rapidement croissante, n'ont pas été étudiés dans cette perspective.

Si l'on néglige les termes d'ordre supérieur à 3 dans les équations de bifurcation, l'étude de cette singularité de codimension 2 revient en fait à considérer le problème comme une perturbation brisant la symétrie S d'un système invariant par la même représentation de $\mathbf{SO}(3)$, mais où S agit comme $-\text{Id}$, c'est-à-dire

$$S \cdot Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) = -Y_{\ell,m}^\ell(\theta, \varphi). \tag{3}$$

On notera \tilde{T}^ℓ cette représentation « anti-naturelle » $\mathbf{O}(3)$. En effet écrivons le développement de Taylor de l'équation de bifurcation à l'ordre 3 (après une normalisation des coefficients qui suppose qu'on se place dans des conditions génériques et que les branches bifurquées quand $\epsilon = 0$ sont supercritiques) :

$$0 = (\lambda - \|X\|^2)X + \epsilon Q(X) + C(X), \quad x \in V_\ell, \tag{4}$$

où $\epsilon \in \mathbb{R}$ et λ sont voisins de 0 (λ est le paramètre de bifurcation), Q est l'unique terme équivariant quadratique, et C est la partie cubique équivariante *non radiale* (c'est-à-dire $C(X)$ n'est pas en tous points colinéaire à X). Lorsque $\epsilon = 0$, cette équation est invariante par $X \mapsto -X$, donc par \tilde{T}^ℓ . Lorsque $\epsilon \neq 0$, le terme quadratique brise la symétrie S . On peut donc considérer cette singularité comme une brisure « forcée » de la symétrie S .

2. Bifurcations invariantes par \tilde{T}^ℓ (ℓ pair) et leurs perturbations $\mathbf{SO}(3)$ invariantes

Pour un sous-groupe d'isotropie H (pour la représentation considérée), on considère $\text{Fix}(H) = \{X \in V_\ell \mid h \cdot X = X, h \in H\}$. Ce sous-espace est invariant par l'équation de bifurcation. Lorsque $\dim \text{Fix}(H) = 1$, l'existence d'une branche de solutions avec symétrie H est générique. Quand $\dim \text{Fix}(H) > 1$ il n'existe pas de résultat aussi général et l'existence de solutions avec cette isotropie dépend de la forme des termes dominants dans l'équation de bifurcation restreinte à $\text{Fix}(H)$ [3]. Les groupes d'isotropie sont définis à conjugaison près et on appelle type d'isotropie $[H]$ la classe d'équivalence de H . L'inclusion ensembliste induit une relation d'ordre partiel sur les types d'isotropie, ce que l'on représente sous la forme d'un graphe (voir un exemple au paragraphe suivant). La liste exhaustive des types d'isotropie et des dimensions des sous espaces $\text{Fix}(H)$ est présentée dans [5]. On note $\mathbf{D}_m, \mathbb{T}, \mathbb{O}, \mathbb{I} \subset \mathbf{SO}(3)$, les groupes resp. diédral d'ordre $2m$, tétraédral, octaédral, icosaédral. Pour les sous-groupes de $\mathbf{O}(3)$ non contenus dans $\mathbf{SO}(3)$, on utilise les notations de [5] (voir aussi [2] pour une table de correspondance avec les notations de Schoenflies). Ainsi $\mathbf{D}_{2m}^d = \mathbf{D}_m \cup \kappa \cdot \mathbf{D}_m$ (groupe isomorphe à \mathbf{D}_{2m}) et $\mathbb{O}^- = \mathbb{T} \cup \kappa \cdot \mathbb{T}$ (groupe isomorphe à \mathbb{O}), où κ est une réflexion par rapport à un plan. On a le lemme suivant dont la preuve est élémentaire :

Lemme 2.1. *Chaque type d'isotropie pour la représentation de degré ℓ de $\mathbf{SO}(3)$ est un type d'isotropie pour la représentation anti-naturelle de $\mathbf{O}(3)$ de même degré, et les sous-espaces $\text{Fix}(H)$ associés sont identiques.*

Supposons $[H] < [H']$ où H' est un type d'isotropie pour $\mathbf{O}(3)$ mais pas pour $\mathbf{SO}(3)$, tel que $\dim \text{Fix}(H') = 1$ et tel qu'il n'existe pas de type $[\tilde{H}]$ vérifiant $[H] < [\tilde{H}] < [H']$.

Lemme 2.2. *Pour H et H' satisfaisant les conditions ci-dessus, seuls les cas suivants existent : (i) $H = \mathbf{D}_m$ et $H' = \mathbf{D}_{2m}^d$ (tout $\ell > 2$ et $\ell/3 < m \leq \ell$), (ii) $H = \mathbb{T}$ et $H' = \mathbb{O}^-$ (pour $\ell = 6, 10, 12, 14, 16, 20$).*

De plus $\dim \text{Fix}(H) = 3$ si $H = \mathbf{D}_m$ avec $\ell/3 < m \leq \ell/2$, ou si $H = \mathbb{T}$ avec $\ell = 12$. Dans tous les autres cas, $\dim \text{Fix}(H) = 2$.

Démonstration. Ceci découle aisément des calculs de [5] (chap. XIII). \square

Proposition 2.3. *Sous les hypothèses du Lemme 2.2, supposons $\ell > 2$. Alors pour $\lambda > 0$ et ϵ voisin de 0, il existe une famille de solutions d'isotropie H dont la partie principale se confond quand $\epsilon = 0$ avec la solution d'isotropie H' de (4).*

Démonstration. On suppose $\dim \text{Fix}(H) = 2$. Le cas $\dim \text{Fix}(H) = 3$ se traite de façon identique. On a la décomposition suivante : $\text{Fix}(H) = \text{Fix}(H_0) \oplus^\perp \text{Fix}(H')$ où $H_0 = \mathbf{O}(2)$ si $H = \mathbf{D}_m$ et $H_0 = \mathbb{O}$ si $H = \mathbb{T}$ ($\ell \neq 12$). Dans ces coordonnées, l'équation (4) restreinte à $\text{Fix}(H)$ s'écrit :

$$0 = (\lambda - x^2 - y^2)x + \epsilon(\alpha x^2 - \beta y^2) + x(ax^2 + by^2), \quad (5)$$

$$0 = (\lambda - x^2 - y^2)y + \epsilon\gamma xy + y(cx^2 + dy^2) \quad (6)$$

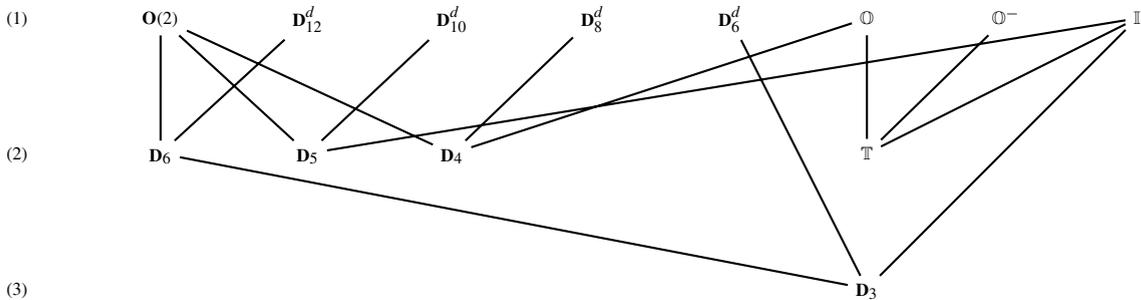
où α, β, γ ne dépendent que de ℓ et $\beta \neq 0$ (ces coefficients s'expriment avec les 3-j symboles de Wigner ce qui permet de vérifier l'inégalité, voir [1]). Si $a \neq c$ et $b \neq d$, un calcul de perturbation de la solution $x = 0$ quand $\epsilon = 0$ permet de conclure. Le cas $\ell = 2$ est exclu car alors $H = D_2$ et $N(H)/H \simeq D_3$ ($N(H)$ est le normalisateur de H dans $\mathbf{SO}(3)$). Par conséquent le groupe D_3 agit naturellement dans le plan $\text{Fix}(H)$ ce qui force la dégénérescence $a = b = c = d$ et nécessite de prendre en compte les termes d'ordre 5 dans les équations (voir [5] pour détails). Cette situation ne se produit pas pour $\ell > 2$. \square

En général, le plan $\text{Fix}(H)$ contient trois axes de symétrie $H_0, H'_0, H''_0 \subset \mathbf{SO}(3)$, ce qui « sature » les termes quadratiques dans (5), (6), voir [3] ou [2]. Les solutions d'isotropie H résultent alors de bifurcations secondaires sur ces axes de symétrie. Cependant si par exemple $H = D_\ell$ avec $\ell \geq 6$, il n'existe qu'un axe de symétrie $\text{Fix}(\mathbf{O}(2))$. Si de plus $(\alpha - \gamma)\beta < 0$, alors une branche d'isotropie H bifurque génériquement à partir de 0 (indépendamment de la valeur de ϵ). Ce cas se présente lorsque $\ell = 6 + 4j$ ($j \geq 0$), comme cela a été montré dans [1]. La Proposition 2.3 permet alors de voir ces solutions comme un « vestige » des solutions d'isotropie maximale $\mathbf{D}_{2\ell}^d$ bifurquant pour le

système (4) avec $\epsilon = 0$. La Proposition 2.3 s’applique en particulier au cas $\ell = 4$ étudié en détail dans [4]. On donne ci-dessous l’exemple $\ell = 6$.

3. L’exemple $\ell = 6$

Le diagramme ci-dessous montre la partie du graphe des types d’isotropie pour $\ell = 6$ satisfaisant les conditions de la Proposition 2.3. Le chiffre entre parenthèses indique la dimension de $\text{Fix}(H)$ sur la ligne correspondante. Quand ϵ est voisin de 0 des branches secondaires de solutions d’isotropie \mathbf{D}_3 , \mathbf{D}_4 , \mathbf{D}_5 et \mathbb{T} apparaissent. Les solutions d’isotropie \mathbf{D}_6 bifurquent à partir de 0. La détermination du diagramme de bifurcation et de la stabilité des solutions nécessite la connaissance des coefficients des termes quadratiques et cubiques.



Références

[1] P. Chossat, Solutions avec symétrie diédrale dans les problèmes de bifurcation invariants par symétrie sphérique, Comptes-Rendus de l’Académie des Sciences de Paris 297 (1983) 639–642.

[2] P. Chossat, R. Lauterbach, Equivariant Bifurcation Theory and its Applications, Advanced Series in Nonlinear Dynamics, vol. 15, World Scientific, Singapore, 2000.

[3] P. Chossat, R. Lauterbach, I. Melbourne, Steady-state bifurcation with $O(3)$ -symmetry, Arch. Ration. Mech. Anal. 113 (1990) 313–376.

[4] C. Geiger, G. Dangelmayr, J.D. Rodriguez, W. Guttinger, Symmetry breaking bifurcations in spherical Benard convection. I: Results from singularity theory, in: Fields Institute Communications, vol. 5, American Mathematical Society, Providence, RI, 1993, pp. 225–237.

[5] M. Golubitsky, I. Stewart, D. Schaeffer, Singularities and Groups in Bifurcation Theory, vol. 2, Appl. Math. Sci., vol. 69, Springer-Verlag, 1988.

[6] J.D. Rodriguez, C. Geiger, G. Dangelmayr, W. Guttinger, Symmetry breaking bifurcations in spherical Benard convection. II : Numerical results, in: Fields Institute Communications, vol. 5, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996, pp. 239–253.