Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007) 295–298
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse complexe

Ensembles localement pics dans les bords faiblement pseudoconvexes de $\mathbb{C}^n$

Borhen Halouani

Université du littoral côte d'opale, centre universitaire de la mi-voix, LMPA, maison de la recherche Blaise-Pascal, 50, rue F. Buisson, BP 699, 62228 Calais cedex, France

Reçu le 27 janvier 2006 ; accepté après révision le 16 janvier 2007

Présenté par Jean-Pierre Demailly

Résumé

On donne des conditions suffisantes pour qu'une sous variété C^ω (resp. C^∞), totalement réelle, complexe-tangentielle, de dimension $(n-1)$ dans le bord bD d'un domaine D faiblement pseudoconvexe dans $\mathbb{C}^n$ et à bord C^ω (resp. C^∞), soit un ensemble localement pic pour la class $\mathcal{O}$ (resp. A^∞). De plus, on donne un résultat sur les ensembles localement d'interpolations pour la classe A^∞. ***Pour citer cet article : B. Halouani, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Abstract

Local peak sets in weakly pseudoconvex boundaries in $\mathbb{C}^n$. We give some sufficient conditions for a C^ω (resp. C^∞)-totally real, complex-tangential, $(n-1)$-dimensional submanifold in a weakly pseudoconvex boundary of class C^ω (resp. C^∞) to be a local peak set for the class $\mathcal{O}$ (resp. A^∞). Moreover, we give a result about interpolation submanifolds for the class A^∞. ***To cite this article: B. Halouani, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 344 (2007).***

Ce travail avait pour point de départ l'article de L. Boutet de Monvel et A. Iordan [1]. Soit D un domaine pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ à bord bD de classe C^ω (resp. C^∞). On note pour un ouvert $\mathcal{U}$, $\mathcal{O}(\mathcal{U})$ (resp. $A^\infty(\mathcal{U})$) l'ensemble des fonctions holomorphes dans $\mathcal{U}$ (resp. la classe des fonctions holomorphes dans $\mathcal{U}$ qui admettent une extension de classe C^∞ à $\overline{\mathcal{U}}$).

On dit que $\mathbf{M} \subset bD$ est un ensemble localement pic pour la classe $\mathcal{O}$ (resp. A^∞) en un point $p \in \mathbf{M}$, s'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de p dans $\mathbb{C}^n$ et une fonction $f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ (resp. $A^\infty(D \cap \mathcal{U})$) tels que $|f| < 1$ sur $(\overline{D} \cap \mathcal{U}) \backslash \mathbf{M}$ et $f = 1$ sur $\mathbf{M} \cap \mathcal{U}$ ou, ce qui est équivalent, une fonction $g \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$ (resp. $A^\infty(D \cap \mathcal{U})$) telle que $g = 0$ sur $\mathbf{M} \cap \mathcal{U}$ et $\Re g < 0$ sur $(\overline{D} \cap \mathcal{U}) \backslash \mathbf{M}$. On dit qu'un sous ensemble $\mathbf{M} \subset bD$ est localement d'interpolation pour la classe A^∞ en un point $p \in \mathbf{M}$, s'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de p tel que toute fonction $f \in C^\infty(\mathbf{M} \cap \mathcal{U})$ soit la restriction à $\mathbf{M} \cap \mathcal{U}$ d'une fonction de $A^\infty(D \cap \mathcal{U})$.

Adresse e-mail : halouani@lmpa.univ-littoral.fr.

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2007.01.016

Une sous variété $\mathbf{M}$ de bD est dite complexe-tangentielle si pour tout point $p \in \mathbf{M}$ on a $T_p(\mathbf{M}) \subseteq T_p^{\mathbb{C}}(bD)$, où $T_p^{\mathbb{C}}(bD)$ est l'espace tangent complexe en p à bD.

Si pour tout point $p \in \mathbf{M}$, $T_p(\mathbf{M}) \cap iT_p(\mathbf{M}) = \{0\}$, on dit que $\mathbf{M}$ est totalement réelle.

Soient D un domaine de $\mathbb{C}^n$ à bord C^∞, $\mathbf{M}$ une sous variété de bD et $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Nous disons suivant une terminologie due à L. Hörmander qu'une fonction $\phi \in C^\infty(\mathcal{U})$ est presque-analytique par rapport à $\mathbf{M} \cap \mathcal{U}$ si $D^\alpha\ \bar{\partial}\phi|_{\mathbf{M}\cap\mathcal{U}} = 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{2n}$, où D^α désigne une dérivée partielle d'ordre $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{2n}$.

Soit D un domaine pseudoconvexe à bord bD de classe C^ω (resp. C^∞). Soit $\mathbf{M}$ une sous variété C^ω (resp. C^∞) de bD, totalement réelle, de dimension $(n-1)$, complexe-tangentielle dans un voisinage d'un point $p \in \mathbf{M}$. Soit (V, θ) une paramétrisation de classe C^ω (resp. C^∞) de $\mathbf{M}$ au voisinage de p où V est un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^{n-1}$ et $\theta(0) = p$. Soit $\mathbf{X}$ un champ de vecteurs C^ω (resp. C^∞) sur $\mathbf{M}$ tel que $\mathbf{X}(p) = 0$. Notons $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1})$ les coordonnées d'un point de V. Alors, $\mathbf{X}$ s'écrit sous la forme : $\mathbf{X} = \sum_i\ d_i(\zeta)\ \frac{\partial}{\partial \zeta_i}$, où les d_i sont des fonctions C^ω (resp. C^∞) sur V. On note D la matrice jacobienne à l'origine : $\{\frac{\partial d_i}{\partial \zeta_j}(0)\}_{1 \leqslant i,j \leqslant n-1}$. Maintenant, nous énonçons notre première hypothèse :

$(\mathcal{H}_1)$ D est diagonalisable admettant $\widetilde{m}_1 \geqslant \cdots \geqslant \widetilde{m}_{n-1}$ comme valeurs propres avec $\widetilde{m}_i \in \mathbb{N}^*$, $\forall i$.

On dira que $\mathbf{M}$ admet un champ de vecteurs $\mathbf{X}$ admissible à poids $(\widetilde{m}_1, \ldots, \widetilde{m}_{n-1})$ de classe C^ω (resp. C^∞) au voisinage de p. On remarque que $(\mathcal{H}_1)$ ne dépend pas de la paramétrisation choisie et les $\widetilde{m}_i$, ainsi que leurs multiplicités, sont univoquement déterminés. Sous l'hypothèse $(\mathcal{H}_1)$, on peut montrer qu'il existe un changement de coordonnées sur V de classe C^ω (resp. C^∞) tel que $\mathbf{X} = \sum_i\ \widetilde{m}_i\zeta_i\ \frac{\partial}{\partial \zeta_i}$. Cette représentation de $\mathbf{X}$ est invariante si on effectue une transformation polynômiale des paramètres comme suit :

Lemme 1. *Soit $\Lambda = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1})$ un changement de coordonnées sur V de classe C^ω (resp. C^∞) tel que $\Lambda(0) = 0$ et $d\Lambda(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$. Alors, Λ est polynômial. Plus précisément, si pour $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}) \in V$, $I = (i_1, \ldots, i_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$ on pose $|I|_* = \sum_\nu i_\nu \widetilde{m}_\nu$, alors pour tout $1 \leqslant j \leqslant n-1$, $\Lambda_j(\zeta) = \sum_{|I|_* = \widetilde{m}_j} a_I^j \zeta_1^{i_1} \cdots \zeta_{n-1}^{i_{n-1}}$ avec $a_I^j \in \mathbb{R}$. Réciproquement, tout Λ de ce genre préserve $\mathbf{X}$.*

Soit désormais la paramétrisation θ de $\mathbf{M}$ choisie telle que $\mathbf{X} = \sum_i \widetilde{m}_i \zeta_i \frac{\partial}{\partial \zeta_i}$. Pour $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1})$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ et λ, $\mu \in \mathbb{R}$, on pose $\sigma := \zeta + \mathrm{i} \cdot \eta \in \mathbb{C}^{n-1}$, $\kappa_\zeta(\lambda) := (\lambda^{\widetilde{m}_1}\zeta_1, \ldots, \lambda^{\widetilde{m}_{n-1}}\zeta_{n-1})$ et $\kappa_\sigma(\mu, \lambda) := \kappa_\zeta(\mu) + \mathrm{i} \cdot \kappa_\eta(\lambda)$. Notons ρ la fonction définissante de D au voisinage de $p \in bD$ et $\tilde{\theta} : \widetilde{V} \to \tilde{\theta}(\widetilde{V}) =: \widetilde{\mathbf{M}}$ le prolongement holomorphe (resp. presque-analytique) de θ de $\mathbf{M}$ où $\widetilde{V}$ est un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbb{C}^{n-1}$. Moyennant la paramétrisation θ, κ_ζ est la paramétrisation des courbes intégrales de $\mathbf{X}$ sur $\mathbf{M}$. Moyennant la paramétrisation de $\tilde{\theta}$, κ_σ est le prolongement naturel de cette famille des courbes au complexifiée de $\mathbf{M}$, $\widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{M} + \mathrm{i}\mathbf{M}$: en faisant opérer κ_ζ séparemment à $\mathbf{M}$ et à $\mathrm{i}\mathbf{M}$ par rapport aux coordonnées locales de la Proposition 4 ci-dessous. Maintenant, nous énonçons notre deuxième hypothèse sur ρ restreint à la famille des courbes κ_σ : Soit M, $K \in \mathbb{N}^*$ tels que $M \leqslant K$, $m_j := M/\widetilde{m}_j \in \mathbb{N}^*$ et $k_j := K/\widetilde{m}_j \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbf{E} = \{\zeta \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \sum_j \zeta_j^{2m_j} = 1\}$.

$(\mathcal{H}_2)$ Il existe des constantes $\varepsilon > 0$, $0 < c \leqslant C$ telles que $\forall \sigma = \zeta + \mathrm{i} \cdot \eta \in \mathbf{E} + \mathrm{i} \cdot \mathbf{E}$, $|\lambda| < \varepsilon$, $|\mu| < \varepsilon$, on ait : $c|\lambda|^{2M}(|\mu| + |\lambda|)^{2(K-M)} \leqslant \rho(\tilde{\theta}(\kappa_\sigma(\mu, \lambda))) \leqslant C|\lambda|^{2M}(|\mu| + |\lambda|)^{2(K-M)}$.

$(\mathcal{H}_2)$ tient compte de différentes anisotropies de $\rho|_{\kappa_\sigma}$ tant par rapport aux données $\widetilde{m}_i$ qu'aux deux directions principales de $\widetilde{\mathbf{M}}$, à savoir $\mathbf{M}$ et $\mathrm{i}\mathbf{M}$. Les bornes de l'estimée de $(\mathcal{H}_2)$ mesurent l'annulation de ρ suivant ces directions. Une estimée équivalente sera donnée plus bas, voir $(\mathcal{H})$.

Définition 2. Si un champ de vecteurs $\mathbf{X}$ de classe C^ω (resp. C^∞) sur $\mathbf{M}$ vérifie $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_2)$ on dira que $\mathbf{X}$ est un champ de vecteurs pic-admissible de pic-type $(K, M; \widetilde{m}_1, \ldots, \widetilde{m}_{n-1})$ au voisinage de $p \in \mathbf{M}$ pour la classe $\mathcal{O}$ (resp. A^∞).

On remarque que $(\mathcal{H}_2)$ ne dépend ni du choix de la fonction définissante du bord bD ni du choix du prolongement holomorphe (resp. presque-analytique).

1. Condition suffisante pour l'existence des ensembles localement pics pour la classe $\mathcal{O}$

Théorème 3. *Soit D un domaine pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ à bord C^ω. Soit $\mathbf{M}$ une sous variété C^ω du bord bD, totalement réelle, de dimension $(n-1)$, complexe-tangentielle dans un voisinage d'un point $p \in \mathbf{M}$. On suppose que $\mathbf{M}$ admet un champ de vecteurs $\mathbf{X}$, C^ω, pic-admissible de pic-type $(K, M; \widetilde{m}_1, \ldots, \widetilde{m}_{n-1})$ au voisinage de p pour $\mathcal{O}$. Alors la sous variété $\mathbf{M}$ est un ensemble localement pic en p pour la classe $\mathcal{O}$.*

Preuve. La preuve est fondée sur les deux Propositions 4 et 5 ci-dessous en effectuant des changements des coordonnées holomorphes à plusieurs reprises comme suit :

Proposition 4. *Soit D un domaine pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ à bord C^ω (resp. C^∞). Soit $\mathbf{M}$ une sous variété C^ω (resp. C^∞) de dimension $(n-1)$ du bord bD, totalement réelle, complexe-tangentielle dans un voisinage d'un point $p \in \mathbf{M}$. Alors, il existe un changement de variables holomorphe (resp. presque-analytique par rapport à $\mathbf{N}$ ci-dessous) (Z, w), avec $Z = X + \mathrm{i} \cdot Y \in \mathbb{C}^{n-1}$ et $w = u + \mathrm{i}v \in \mathbb{C}$, qui ramène p à l'origine tel qu'on ait dans un voisinage $\mathcal{U}$ de l'origine :*

(i) *La sous variété $\mathbf{M}$ s'écrit sous la forme : $\mathbf{M} = \{(Z, w) \in \mathcal{U} \mid Y = w = 0\}$. De plus, $\mathbf{M}$ est contenue dans la sous variété $\mathbf{N} = \{(Z, w) \in \mathcal{U} \mid Y = u = 0\}$ totalement réelle de dimension n de bD.*
(ii) *Pour tout $c \in \mathbb{R}$, $\mathbf{M}_c := \{(Z, w) \in \mathcal{U} \mid Y = u = 0$ et $v = c\}$ est complexe-tangentielle ou vide.*
(iii) *$D \cap \mathcal{U} = \{(Z, w) \in \mathcal{U} \mid \rho(Z, w) < 0\}$, avec $\rho(Z, w) = u + A(Z) + vB(Z) + v^2 R(Z, v)$.*
(iv) *A, B et R sont des fonctions de classe C^ω (resp. C^∞) nulles d'ordre $\geqslant 2$ pour $Y = 0$.*

Concernant la preuve, on peut voir le Lemme 6 [2]. Maintenant, on applique le changement de variables de la Proposition 4 à $\mathbf{X}$ qui vérifie $(\mathcal{H}_2)$. On peut montrer que les propriétés sur les fonctions A et B restent invariantes. Nous posons $\kappa := K/M = k_j/m_j \geqslant 1$. Comme κ ne dépend pas de j, on définit dans un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ suffisamment petit de l'origine de $\mathbb{C}^{n-1}$ les pseudo-normes suivantes par rapport aux nouvelles coordonnées $Z = (z_1, \ldots, z_{n-1})$ de la Proposition 4 : $\|Y\|_* = (\sum_j {y_j}^{2m_j})^{1/2M}$ et $\|Z\|_* = (\sum_j |z_j|^{2k_j})^{1/2K}$. On remarque que $A(Z) = \rho(\tilde{\theta}(\kappa_\sigma(\mu, \lambda)))$ où $Z = X + \mathrm{i} \cdot Y = \kappa_\sigma(\mu, \lambda)$. Ainsi, dans ce qui suit, on pourra supposer que A vérifie la propriété suivante :

($\mathcal{H}$) Il existe deux constantes $0 < c \leqslant C$ telles que, pour tout $Z = X + \mathrm{i} \cdot Y$ assez proche de l'origine de $\mathbb{C}^{n-1}$, on ait : $c\|Y\|_*^{2M}\|Z\|_*^{2K-2M} \leqslant A(Z) \leqslant C\|Y\|_*^{2M}\|Z\|_*^{2K-2M}$.

Proposition 5. *S'il existe une constante $T > 0$ telle que, pour tout Z assez proche de l'origine de $\mathbb{C}^{n-1}$, on ait $B^2 \leqslant TA$ alors, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de l'origine et une fonction ψ holomorphe (resp. presque-analytique par rapport à $\mathbf{N}$) sur $\mathcal{U}$ telle que : $\Re\psi < 0$ sur $\overline{D} \cap \mathcal{U}$ si $w \neq 0$ et $\psi = 0$ si $w = 0$.*

Voir [1] concernant la preuve. Pour appliquer le résultat de la Proposition 5, il faut déterminer l'ordre d'annulation de certaines fonctions sur $\mathbf{M}$ au voisinage de $p = 0 \in \mathbf{M}$. Nous commençons à définir le Z-poids et le Y-poids d'une fonction. Ces notions sont purement techniques. Bien que des définitions invariantes de quelques unes sont possibles, il vaut mieux de les donner dans le système de coordonnées locales de la Proposition 4, car c'est là où les démonstrations sont effectuées.

Définition 6. Soit $\chi = a_{I,J}\, z_1^{i_1}\bar{z}_1^{j_1} \cdots z_{n-1}^{i_{n-1}}\bar{z}_{n-1}^{j_{n-1}}$ avec $a_{I,J} \neq 0$ un monôme en $Z = (z_1, \ldots, z_{n-1})$ et $\overline{Z}$. On dit que χ admet un Z-poids, noté $\mathcal{P}_Z(\chi)$, donné par : $\mathcal{P}_Z(\chi) = \sum_\nu \widetilde{m}_\nu(i_\nu + j_\nu)$.

Soit $\Xi = \alpha_{I,J}\, y_1^{i_1} \cdots y_{n-1}^{i_{n-1}} x_1^{j_1} \cdots x_{n-1}^{j_{n-1}}$ avec $\alpha_{I,J} \neq 0$ un monôme en X et Y. On dit que Ξ admet un Y-poids, noté $\mathcal{P}_Y(\Xi)$, donné par : $\mathcal{P}_Y(\Xi) = \sum_\nu \widetilde{m}_\nu i_\nu$.

Si $f \not\equiv 0$ est une fonction C^ω dans un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^{n-1}$, on définit les poids $\mathcal{P}_Z(f)$ et $\mathcal{P}_Y(f)$ comme étant les minima respectifs des poids $\mathcal{P}_Z(\chi)$ et $\mathcal{P}_Y(\Xi)$ des monômes constituants f.

Si g est une somme des monômes du même poids L, on dit que g est homogène de poids L.

Lemme 7. *Soit $F(X, Y) = \sum_{I,J} F_{I,J}\, Y^I X^J$ une fonction C^ω dans un voisinage ouvert de l'origine de $\mathbb{C}^{n-1}$ tels que, pour tout multi-indices $I = (i_1, \ldots, i_{n-1})$, $J = (j_1, \ldots, j_{n-1})$ dans $\mathbb{N}^{n-1}$, $F_{I,J} = 0$ ou $\mathcal{P}_Y(F_{I,J} Y^I X^J) \geqslant S$ et*

$\mathcal{P}_Z(F_{I,J}Y^I X^J) \geqslant R \geqslant S$. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $Z = X + \mathrm{i}\cdot Y$ assez proche de l'origine, on ait : $|F(Z)| \leqslant C\|Y\|_*^S \|Z\|_*^{R-S}$.

Lemme 8. *Soit, sous les hypothèses du Lemme 7, $S \geqslant M$ et $R \geqslant K = \kappa M$. Alors, $\frac{|F|^2}{A}$ est uniformément borné sur un voisinage suffisamment petit de l'origine.*

Maintenant, on cherche à connaître les restrictions imposées sur les fonctions A, B par la pseudoconvexité de bD. On suppose que $B \not\equiv 0$ et on pose $(\mathcal{P}_Y(B), \mathcal{P}_Z(B)) = (S, R)$. L'hypothèse $(\mathcal{H})$ faite sur A nous permet d'avoir $(\mathcal{P}_Y(A), \mathcal{P}_Z(A)) = (2M, 2K)$. Un calcul de la forme de Lévi (notée $\mathcal{L}\acute{e}v\,\rho[t]$) de bD en un point proche de l'origine, pour $t = \sum_\nu \widetilde{m}_\nu y_\nu\, \chi_\nu \in T^{\mathbb{C}}(bD)$ avec $\chi_\nu = \mathrm{i}[\frac{\partial}{\partial z_\nu} - \frac{\mathrm{i}}{\eta}\frac{\partial\rho}{\partial z_\nu}\frac{\partial}{\partial w}]$ et $\eta = \frac{1}{2}(\mathrm{i} + B + 2vR + v^2\frac{\partial R}{\partial v})$, nous conduit à écrire : $\mathcal{L}\acute{e}v\,\rho[t] = \mathcal{A} + v\mathcal{B} + v^2\mathcal{R}$ où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ne dépendent que du vecteur $Z \in \mathbb{C}^{n-1}$, Z parcourant la complexifiée $\widetilde{\mathbf{M}} = \{(Z, w) \mid w = 0\}$ de $\mathbf{M}$. Grâce à la pseudoconvexité de bD, il existe une constante $T^* > 0$ telle qu'on ait $\mathcal{B}^2 \leqslant T^*\mathcal{A}$. En étudiant les Z-poids et les Y-poids de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{B}$, les Lemmes 9 et 10 ci-dessous nous permettent d'avoir $S \geqslant M$ et $R \geqslant K$. Le Lemme 8 montre que $\frac{|B|^2}{A}$ est uniformément borné. La Proposition 5 achève la preuve du théorème. □

Lemme 9. *Soient $X \in \mathbb{R}^{n-1}$ fixé et $P_X(y_1, \ldots, y_{n-1}) = \sum_{I=(i_1,\ldots,i_{n-1})} a_I(X)\, y_1^{i_1}\cdots y_{n-1}^{i_{n-1}}$ un polynôme, homogène de poids $\mathcal{P}_Y(P_X) = L$ où $L = \sum_\nu \widetilde{m}_\nu i_\nu$. Alors, on a :*

(1) $\sum_\nu \frac{\partial P_X}{\partial y_\nu}(y_1, \ldots, y_{n-1})\widetilde{m}_\nu y_\nu = L P_X(y_1, \ldots, y_{n-1})$.

(2) $\sum_{\nu,\mu} \frac{\partial^2 P_X}{\partial y_\nu \partial y_\mu}(y_1, \ldots, y_{n-1})\widetilde{m}_\nu\widetilde{m}_\mu y_\nu y_\mu + \sum_\nu \frac{\partial P_X}{\partial y_\nu}(y_1, \ldots, y_{n-1})\widetilde{m}_\nu^2 y_\nu = L^2 P_X(y_1, \ldots, y_{n-1})$.

Lemme 10. *Si $P_X \not\equiv 0$ est un polynôme dans $\mathbb{R}[y_1, \ldots, y_{n-1}]$, homogène de poids $L \geqslant 2$ alors, $\sum_{\nu,\mu} \frac{\partial^2 P_X}{\partial y_\nu \partial y_\mu}(y_1, \ldots, y_{n-1})\widetilde{m}_\nu\widetilde{m}_\mu y_\nu y_\mu$ est non identiquement nul.*

Example 11. Considérons dans $\mathbb{C}^3$, le domaine D défini par $\rho(z_1, z_2, w) < 0$ où $\rho(z_1, z_2, w) = \Re w + y_1^4 + y_2^6 - 1$, $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2 \in \mathbb{C}$. La sous variété $\mathbf{M} = \{(x_1, x_2, 1) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ du bord bD est de classe C^ω, totalement réelle, de dimension 2 et complexe-tangentielle au voisinage de $p = (0, 0, 1)$. Le champ de vecteurs $\mathbf{X} = 3x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_2\frac{\partial}{\partial x_2}$ sur $\mathbf{M}$ est pic-admissible de pic-type $(6, 6; 3, 2)$ en p pour la classe $\mathcal{O}$. Donc $\mathbf{M}$ est un ensemble localement pic en p pour la classe $\mathcal{O}$ (on peut prendre $f(z_1, z_2, w) = w$ comme fonction pic).

2. Condition suffisante pour l'existence des ensembles localement pics pour la classe A^∞

Théorème 12. *Soit D un domaine pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$ à bord C^∞. Soit $\mathbf{M}$ une sous variété C^∞ du bord bD, totalement réelle, de dimension $(n-1)$, complexe-tangentielle dans un voisinage $\mathcal{U}$ d'un point $p \in \mathbf{M}$. On suppose qu'il existe deux constantes C et L positives telles que l'on ait : $\mathcal{L}\acute{e}v\,\rho(q)[t] \geqslant C|t|^2\,\mathrm{dist}(q, \mathbf{M})^L$, $\forall q \in \mathcal{U}$, $\forall t \in T_q^{\mathbb{C}}(bD)$ et $\mathbf{M}$ admet un champ de vecteurs $\mathbf{X}$ de classe C^∞ pic-admissible de pic-type $(K, M; \widetilde{m}_1, \ldots, \widetilde{m}_{n-1})$ au voisinage de p pour A^∞. Alors,*

(i) *la sous variété $\mathbf{M}$ est un ensemble localement pic en p pour la classe A^∞.*

(ii) *la sous variété $\mathbf{M}$ est un ensemble localement d'interpolation en p pour la classe A^∞.*

Preuve. Avec un raisonnement analogue à celui de la preuve du Théorème 3, on peut montrer (i) en tenant compte de l'hypothèse faite sur la forme de Lévi qui nous garantit que la pseudoconvexité de bD est conservé par le changement de variables presque-analytique. Pour la preuve de (ii), on suit la construction faite par M. Hakim et N. Sibony dans le cas des ensembles pics dans les domaines strictement pseudoconvexes [3] en résolvant une équation $\overline{\partial}$ avec un théorème de J. Michel [4]. □

Références

[1] L. Boutet de Monvel, A. Iordan, Peak curves in weakly pseudoconvex boundaries in $\mathbb{C}^2$, J. Geom. Anal. 7 (1) (1997) 1–15.
[2] J.E. Fornæss, N. Ovrelid, Finitely generated ideals in $A(\Omega)$, Ann. Inst. Fourier 33 (2) (1983) 77–85.
[3] M. Hakim, N. Sibony, Ensembles pics dans les domaines strictement pseudoconvexes, Duke Math. J. 45 (1978) 601–617.
[4] J. Michel, Integral representations on weakly pseudoconvex domains, Math. Z. 208 (3) (1991) 437–462.