Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006) 705–710
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse complexe

Nombre de Lelong directionnel d'un courant positif plurisousharmonique

Moncef Toujani

Université 7 Novembre de Carthage, ISSAT de Mateur 7030 Mateur, Tunisie

Reçu le 16 octobre 2006 ; accepté le 2 novembre 2006

Disponible sur Internet le 6 décembre 2006

Présenté par Jean-Pierre Demailly

Résumé

Soit T un courant positif psh de bidegré (k,k) dans un voisinage Ω de 0 dans $\mathbb{C}^N = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ $(n = N - m \geqslant k)$, soient $L = \{0\} \times \mathbb{C}^m$ et B un borélien dans L tel que $B \subset\subset \Omega$. On note $(z,t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ et on considère deux fonctions de classe C^2 positives psh et semi-exhaustives sur Ω, $(z,t) \mapsto \varphi(z)$ et $(z,t) \mapsto v(t)$ telles que $\log \varphi$ soit également psh sur l'ouvert $\{\varphi > 0\}$. Nous montrons que T admet un nombre de Lelong directionnel relativement à φ et v. Si $m = 0$ et $\varphi(z) = |z|^2$, on retrouve le nombre de Lelong classique au point 0. Si $m = 0$ et T est un courant positif d-fermé, on retrouve celui introduit par J.-P. Demailly. Si $\varphi(z) = |z|^2$ et $v(t) = |t|^2$, on retrouve celui introduit par Alessandrini–Bassanelli. Pour cela, nous démontrons une formule de type Lelong–Jensen. Nous démontrons enfin un théorème sur l'existence d'une fonction f psh positive sur un voisinage ouvert de 0 dans L tel que ce nombre de Lelong de T soit donné par f. Ce théorème généralise un résultat antérieur dû à Alessandrini–Bassanelli pour $\varphi(z) = |z|^2$ et $v(t) = |t|^2$. ***Pour citer cet article : M. Toujani, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).***

Abstract

Directional Lelong numbers of positive plurisubharmonic currents. Let T be a positive psh current of bidegree (k,k) on a neighborhood Ω of 0 in $\mathbb{C}^N = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ $(n = N - m \geqslant k)$, let $L = \{0\} \times \mathbb{C}^m$ and B a Borel subset of L such that $B \subset\subset \Omega$. We denote $(z,t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ and consider two C^2 positive semi-exhaustive psh functions on Ω, $(z,t) \mapsto \varphi(z)$ et $(z,t) \mapsto v(t)$ such that $\log \varphi$ is also psh on the open set $\{\varphi > 0\}$. We prove here that T admits a directional Lelong number along L with respect to the functions φ and v. If $m = 0$ and $\varphi(z) = |z|^2$, we get the classical Lelong number of T at 0. If $m = 0$ and T is a d-closed positive current, we get the number introduced by J.-P. Demailly. If $\varphi(z) = |z|^2$ and $v(t) = |t|^2$, we get the number introduced by Alessandrini–Bassanelli. The method first consists in proving a Lelong–Jensen type formula. Finally we prove a theorem on the existence of a positive psh function f on L such that the Lelong number of T is given by f. This theorem generalizes a result proved by Alessandrini–Bassanelli with $\varphi(z) = |z|^2$ and $v(t) = |t|^2$. ***To cite this article: M. Toujani, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).***

Adresse e-mail : moncef_toujani@yahoo.fr (M. Toujani).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2006.11.004

Abridged English version

Let T be a positive psh current of bidegree (k,k) on a neighborhood Ω of 0 in $\mathbb{C}^N=\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m$ $(n=N-m\geqslant k)$, let $L=\{0\}\times\mathbb{C}^m$ and B a Borel subset of L, such that $B\subset\subset\Omega$. We denote $(z,t)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m$ and consider two C^2 positive psh functions on Ω, $(z,t)\mapsto\varphi(z)$ and $(z,t)\mapsto v(t)$ such that $\log\varphi$ is also psh on the open set $\{\varphi>0\}$. We denote

$$B(r)=\{z\in\Omega;\ \varphi(z)<r\},\qquad S(r)=\{z\in\Omega;\ \varphi(z)=r\},$$
$$B(r_1,r_2)=\{z\in\Omega;\ r_1\leqslant\varphi(z)<r_2\},\quad \text{for } r_1<r_2<R.$$

We also suppose $\varphi:\Omega\cap(\mathbb{C}^n\times\{0\})\to[-\infty,+\infty[$ semi-exhaustive i.e., such that for all $c\in\,]-\infty,R[$, we have $\{z,\ \varphi(z)<c\}\subset\subset\Omega\cap(\mathbb{C}^n\times\{0\})$, and similarly that v is semi-exhaustive. For simplicity we use the following notation:

$$\beta_z=dd^c(\varphi(z)),\quad \gamma_t=dd^c(v(t)),\quad \alpha_z=dd^c(\log(\varphi(z))),\quad \omega_t=dd^c(|t|^2),\quad \omega_z=dd^c(|z|^2)$$

(notice that $\omega=\omega_t+\omega_z$ is the Euclidean form on $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m$) and $d=\partial+\bar\partial$, $d^c=\mathrm{i}(\bar\partial-\partial)$. We introduce the inclusion map $j_s:S(s)\to\Omega$. Then by [3] we have $j_s^*(\alpha_z)=j_s^*(\beta_z)/s$. We first prove the following proposition which is a Lelong–Jensen type formula, see [4] and [1].

Proposition. *For every $0<r_1<r_2$ such that $B(r_2)\times B\subset\subset\Omega$, for every $1\leqslant p\leqslant n-k$, $0\leqslant q<p$, we have*

$$\begin{aligned}\int_{B(r_1,r_2)\times B} T\wedge\left(\frac{\alpha_z}{\pi}\right)^p\wedge\beta_z^{n-k-p}\wedge\gamma_t^m &=\frac{1}{(\pi r_2)^{q+1}}\int_{B(r_2)\times B} T\wedge\left(\frac{\alpha_z}{\pi}\right)^{p-q-1}\wedge\beta_z^{n-k-p+q+1}\wedge\gamma_t^m\\
&-\frac{1}{(\pi r_1)^{q+1}}\int_{B(r_1)\times B} T\wedge\left(\frac{\alpha_z}{\pi}\right)^{p-q-1}\wedge\beta_z^{n-k-p+q+1}\wedge\gamma_t^m\\
&-\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{1}{(\pi s)^{q+1}}-\frac{1}{(\pi r_2)^{q+1}}\right)ds\int_{B(s)\times B} dd^cT\wedge\left(\frac{\alpha_z}{\pi}\right)^{p-q-1}\wedge\beta_z^{n-k-p+q}\wedge\gamma_t^m\\
&-\int_0^{r_1}\left(\frac{1}{(\pi r_1)^{q+1}}-\frac{1}{(\pi r_2)^{q+1}}\right)ds\int_{B(s)\times B} dd^cT\wedge\left(\frac{\alpha_z}{\pi}\right)^{p-q-1}\wedge\beta_z^{n-k-p+q}\wedge\gamma_t^m.\end{aligned}$$

Our main result is

Theorem. *There exist an open neighborhood X of 0 in L and a plurisubharmonic function $f:X\to\mathbb{R}_+$, such that for all Borel subsets B in L with $B\subset\subset X$ one has*

$$\nu(T,L,B)=\lim_{r\to0}\frac{1}{(\pi r)^{n-k}}\int_{B(r)\times B}T\wedge\beta_z^{n-k}\wedge\gamma_t^m=\int_B f(t)\gamma_t^m.$$

This theorem generalizes a result proved by [1] with $\varphi(z)=|z|^2$, $v(t)=|t|^2$ and B an open ball in L.

1. Introduction et préliminaires

Soit T un courant positif psh de bidegré (k,k) dans un voisinage Ω de 0 dans $\mathbb{C}^N=\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m$ $(n=N-m\geqslant k)$, soient $L=\{0\}\times\mathbb{C}^m$ et B un borélien dans L, tel que $B\subset\subset\Omega$. On note $(z,t)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m$ et on considère deux fonctions de classe C^2 positives psh sur Ω, $(z,t)\mapsto\varphi(z)$ et $(z,t)\mapsto v(t)$ telles que $\log\varphi$ soit également psh sur l'ouvert $\{\varphi>0\}$. On pose

$$B(r)=\{z\in\Omega;\ \varphi(z)<r\},\qquad S(r)=\{z\in\Omega;\ \varphi(z)=r\},$$
$$B(r_1,r_2)=\{z\in\Omega;\ r_1\leqslant\varphi(z)<r_2\},\quad \text{pour } r_1<r_2<R.$$

On suppose ici $\varphi:\Omega\cap(\mathbb{C}^n\times\{0\})\to[-\infty,+\infty[$ semi-exhaustive, c'est-à-dire que pour tout $c\in]-\infty,R[$, on a $\{z,\ \varphi(z)<c\}\subset\subset\Omega\cap(\mathbb{C}^n\times\{0\})$, et on suppose de même que v est semi-exhaustive. Pour simplifier on utilise les notations suivantes

$$\beta_z=dd^c(\varphi(z)),\quad \gamma_t=dd^c(v(t)),\quad \alpha_z=dd^c(\log(\varphi(z))),\quad \omega_t=dd^c(|t|^2),\quad \omega_z=dd^c(|z|^2),$$

de sorte que $\omega=\omega_t+\omega_z$ est la forme volume sur $\mathbb{C}^N$, et on pose $d=\partial+\bar\partial$, $d^c=\mathrm{i}(\bar\partial-\partial)$. Si $j_s:S(s)\to\Omega$ est l'injection canonique, pour tout s valeur régulière de φ ($d\varphi(z)\neq0$ pour tout z dans Ω tel que $\varphi(z)=s$), on a d'après [3] $j_s^*(\alpha_z)=j_s^*(\beta_z)/s$. On montre d'abord une formule de type Lelong–Jensen, voir [4] et [1].

Proposition. *Pour tout* $0<r_1<r_2$ *tels que* $B(r_2)\times B\subset\subset\Omega$; *pour tout* $1\leqslant p\leqslant n-k,\ 0\leqslant q<p$, *on a*

$$\begin{aligned}\int\limits_{B(r_1,r_2)\times B} T\wedge\left(\frac{\alpha_z}{\pi}\right)^p\wedge\beta_z^{n-k-p}\wedge\gamma_t^m &= \frac{1}{(\pi r_2)^{q+1}}\int\limits_{B(r_2)\times B} T\wedge\left(\frac{\alpha_z}{\pi}\right)^{p-q-1}\wedge\beta_z^{n-k-p+q+1}\wedge\gamma_t^m\\
&-\frac{1}{(\pi r_1)^{q+1}}\int\limits_{B(r_1)\times B} T\wedge\left(\frac{\alpha_z}{\pi}\right)^{p-q-1}\wedge\beta_z^{n-k-p+q+1}\wedge\gamma_t^m\\
&-\int_{r_1}^{r_2}\left(\frac{1}{(\pi s)^{q+1}}-\frac{1}{(\pi r_2)^{q+1}}\right)ds\int\limits_{B(s)\times B} dd^cT\wedge\left(\frac{\alpha_z}{\pi}\right)^{p-q-1}\wedge\beta_z^{n-k-p+q}\wedge\gamma_t^m\\
&-\int_{0}^{r_1}\left(\frac{1}{(\pi r_1)^{q+1}}-\frac{1}{(\pi r_2)^{q+1}}\right)ds\int\limits_{B(s)\times B} dd^cT\wedge\left(\frac{\alpha_z}{\pi}\right)^{p-q-1}\wedge\beta_z^{n-k-p+q}\wedge\gamma_t^m.\end{aligned}$$

Conséquence. D'après la proposition, pour $p=n-k,\ q=p-1$, la quantité

$$A=\frac{1}{(\pi r_2)^{n-k}}\int\limits_{B(r_2)\times B} T\wedge\beta_z^{n-k}\wedge\gamma_t^m-\frac{1}{(\pi r_1)^{n-k}}\int\limits_{B(r_1)\times B} T\wedge\beta_z^{n-k}\wedge\gamma_t^m$$

est positive, car les courants $T\wedge\beta_z^{n-k}\wedge\gamma_t^m$ et $dd^cT\wedge\beta_z^{n-k-1}\wedge\gamma_t^m$ sont des mesures positives et on a $0\leqslant\int_{B(r_1,r_2)}T\wedge(\frac{\alpha_z}{\pi})^{n-k}\wedge\gamma_t^m\leqslant A$. Donc l'application $r\to\frac{1}{(\pi r)^{n-k}}\int_{B(r)\times B}T\wedge\beta_z^{n-k}\wedge\gamma_t^m$ est croissante en r, et la limite quand r tend vers zéro de $\frac{1}{(\pi r)^{n-k}}\int_{B(r)\times B}T\wedge\beta_z^{n-k}\wedge\gamma_t^m$, notée $\nu(T,L,B)$, existe.

Définition. Le nombre $\nu(T,L,B)=\lim_{r\to0}\frac{1}{(\pi r)^{n-k}}\int_{B(r)\times B}T\wedge\beta_z^{n-k}\wedge\gamma_t^m$ est appelé nombre de Lelong directionnel de T, suivant la direction L, relativement à φ et v.

Notre résultat principal est le suivant :

Théorème. *Il existe un voisinage ouvert* X *de* 0 *dans* L *et une fonction psh* $f:X\to\mathbb{R}_+$, *telles que pour tout borélien* B *dans* L *avec* $B\subset\subset X$ *on ait*

$$\nu(T,L,B)=\lim_{r\to0}\frac{1}{(\pi r)^{n-k}}\int\limits_{B(r)\times B}T\wedge\beta_z^{n-k}\wedge\gamma_t^m=\int\limits_B f(t)\gamma_t^m.$$

Ce théorème généralise un résultat prouvé dans [1] dans le cas où $\varphi(z)=|z|^2$, $v(t)=|t|^2$ et où B est une boule ouverte dans L.

2. Preuve du théorème principal

2.1. Cas où $k = n$

On a $\nu(T, L, B) = \lim_{r\to 0} \int_{B(r)\times B} T \wedge \gamma_t^m$. Soit $R = 1_{\Omega\setminus Y} T$ avec $Y = L \cap \Omega$, qui est un ensemble analytique de codimension $k = n$ dans Ω, et $1_{\Omega\setminus Y}$ qui est la fonction caractéristique de $\Omega \setminus Y$. Comme T est d'ordre nul, la masse $\|T\|_K$ est finie pour tout compact K dans Ω, et donc R a une masse localement finie au voisinage des points de $Y = L \cap \Omega$. Or T est positif psh, d'après [2] les courants T et R sont $\mathbb{C}$-plats, et on a $T = 1_Y T + \widetilde{R}$, où $\widetilde{R}$ est l'extension triviale de R par zéro au dessus de Y. Comme $k = n$, alors $1 \leqslant k < N$, et d'après [2] il existe une fonction $f \geqslant 0 \in L^1_{\mathrm{loc}(Y)}$ psh telle que $1_Y T = f[Y]$, où $[Y]$ est le courant d'intégration sur Y. Par conséquent $T = f[Y] + \widetilde{R}$, ce qui donne

$$\int\limits_{B(r)\times B} T \wedge \gamma_t^m = \int\limits_{B} f(t)\gamma_t^m + \int\limits_{B(r)\times B} \widetilde{R} \wedge \gamma_t^m \quad \text{pour } r \ll 1.$$

On va montrer que $\lim_{r\to 0} \int_{B(r)\times B} \widetilde{R} \wedge \gamma_t^m = 0$. Comme v est une fonction psh C^2, $\gamma_t^m = (dd^c v)^m$ est positive à coefficients continus, donc il existe $C_1 > 0$ tel que $\gamma_t^m \leqslant C_1 \omega_t^m$, d'où $\gamma_t^m \leqslant C_1 \omega^m$. Par conséquent on aura

$$0 \leqslant \int\limits_{B(r)\times B} \widetilde{R} \wedge \gamma_t^m \leqslant C_1 \int\limits_{B(r)\times B} \widetilde{R} \wedge \omega^m \leqslant C_2 \|\widetilde{R}\|_{B(r)\times B} \quad \text{avec } C_2 > 0.$$

Il s'ensuit

$$0 \leqslant \lim_{r\to 0} \int\limits_{B(r)\times B} \widetilde{R} \wedge \gamma_t^m \leqslant C' \lim_{r\to 0} \|\widetilde{R}\|_{B(r)\times B} = \|\widetilde{R}\|_B = 0 \quad \text{avec } C' > 0,$$

ce qui donne $\lim_{r\to 0} \int_{B(r)\times B} \widetilde{R} \wedge \gamma_t^m = 0$, et donc on a

$$\nu(T, L, B) = \lim_{r\to 0} \int\limits_{B(r)\times B} T \wedge \gamma_t^m = \int\limits_{B} f(t)\gamma_t^m.$$

Dans toute la suite, on suppose que $0 \leqslant k < n$.

Lemme 1. *Soit $(T_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ une suite régularisée de T dans Ω. Pour tous $1 \leqslant p \leqslant n - k$, $0 \leqslant q < p$, $0 < r$ tels que $B(r) \times B \subset\subset \Omega$ on a*

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B(r)\times B} T_\nu \wedge \left(\frac{\alpha_z}{\pi}\right)^p \wedge \beta_z^{n-k-p} \wedge \gamma_t^m &= \frac{1}{(\pi r)^{q+1}} \int\limits_{B(r)\times B} T_\nu \wedge \left(\frac{\alpha_z}{\pi}\right)^{p-q-1} \wedge \beta_z^{n-k-p+q+1} \wedge \gamma_t^m \\
&\quad - \int_0^r \frac{1}{(\pi s)^{q+1}}\, ds \int\limits_{B(s)\times B} dd^c T_\nu \wedge \left(\frac{\alpha_z}{\pi}\right)^{p-q-1} \wedge \beta_z^{n-k-p+q} \wedge \gamma_t^m \\
&\quad + \frac{1}{(\pi r)^{q+1}} \int_0^r ds \int\limits_{B(s)\times B} dd^c T_\nu \wedge \left(\frac{\alpha_z}{\pi}\right)^{p-q-1} \wedge \beta_z^{n-k-p+q} \wedge \gamma_t^m.
\end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 1 on trouve l'estimation suivante :

Lemme 2. *Soit (T_ν) une suite régularisée de T dans Ω, pour tous $0 \leqslant p \leqslant n - k$ et $r > 0$ tels que $U = B(r) \times B \subset\subset \Omega$, on a*

$$\sup_\nu \int\limits_U T_\nu \wedge \left(\frac{\alpha_z}{\pi}\right)^p \wedge \beta_z^{n-k-p} \wedge \gamma_t^m < +\infty.$$

L'estimation précédente joue un grand rôle dans la preuve du Lemme 3, et ce dernier constitue le lemme principal de cette Note. Dans [1] les auteurs avaient prouvé le Lemme 3 dans le cas $\varphi(z) = |z|^2$ et $v(t) = |t|^2$.

Lemme 3. *Il existe des courants $T^{(0)}, T^{(1)}, \ldots, T^{(n-k)}$ définis sur U, tels que pour une sous-suite $\{T_{\nu_\mu}\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ bien choisie, on ait*

(i) $\lim_{\mu\to+\infty} (\widetilde{T_{\nu_\mu} \wedge (\frac{\alpha_z}{\pi})^p}) = T^{(p)}$ *faiblement sur U*, $(0 \leqslant p \leqslant n-k)$.
(ii) *Il existe une fonction positive $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$ telle que $1_X T^{(n-k)} = f[X]$ avec $X = U \cap L$.*

2.2. Preuve du Lemme 3

Soit $\tilde{\varphi}(z) = \varphi(z)\mathrm{e}^{|z|^2}$. Comme φ est une fonction positive de classe C^2 semi-exhaustive et que $\log\varphi$ est psh, $\tilde{\varphi}$ est aussi psh de classe C^2 et semi-exhaustive. On a

$$\log\tilde{\varphi}(z) = \log\varphi(z) + |z|^2, \quad \text{d'où} \quad dd^c\log\tilde{\varphi}(z) = dd^c\log\varphi(z) + dd^c|z|^2.$$

Par suite $\widetilde{\alpha_z} = \alpha_z + \omega_z$, avec $\widetilde{\alpha_z} = dd^c\log\tilde{\varphi}(z)$. D'après le Lemme 2 on a

$$\sup_\nu \int_{U\setminus L} T_\nu \wedge \left(\frac{\widetilde{\alpha_z}}{\pi}\right)^{n-k} \wedge \omega_t^m < +\infty.$$

En écrivant la formule du binôme de Newton pour $\widetilde{\alpha_z} = \alpha_z + \omega_z$, on aura

$$\sup_\nu \int_{U\setminus L} T_\nu \wedge \left(\frac{\alpha_z}{\pi}\right)^p \wedge \omega_z^{n-k-p} \wedge \omega_t^m < \sup_\nu \int_{U\setminus L} T_\nu \wedge \left(\frac{\widetilde{\alpha_z}}{\pi}\right)^{n-k} \wedge \omega_t^m < +\infty. \tag{$*$}$$

Soit $\omega = \omega_z + \omega_t$. D'après [5], si $h \geqslant m$, on a $\omega^h \leqslant C\omega_z^{h-m} \wedge \sum_I \omega_I^m$ (on pose ici $\omega_I = dd^c|w_I|^2$ avec $(z, w_I) = (z_1, \ldots, z_n, w_{i_1}, \ldots, w_{i_m})$ un système de coordonnées de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m = \mathbb{C}^N$, la somme $\sum_I$ est faite sur tous les $I = (i_1, \ldots, i_m)$ tels que $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leqslant m + n$, et C est une constante positive). L'inégalité $(*)$ implique que

$$\sup_\nu \int_{U\setminus L} T_\nu \wedge \left(\frac{\alpha_z}{\pi}\right)^p \wedge \omega^{N-k-p} < +\infty.$$

Comme le courant $T_1 = T_\nu \wedge (\frac{\alpha_z}{\pi})^p$ est positif psh de bidegré $(k+p, k+p)$, on a $\|T_1\|_{U\setminus L} < +\infty$. D'après [5], il existe des courants $T^{(0)}, T^{(1)}, \ldots, T^{(n-k)}$ vérifiant les conditions de l'énoncé, qui sont définis dans U et tels que $\lim_{\mu\to+\infty} \widetilde{R^p_\mu} = T^{(p)}$ faiblement sur U, où $R^p_\mu = T_{\nu_\mu} \wedge (\frac{\alpha_z}{\pi})^p$, $(0 \leqslant p \leqslant n-k)$. Le courant $T^{(n-k)}$ est de bidegré (n, n) et on a $\mathrm{codim}(X) = N - m = n$. D'après [2], il existe $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(X)$ $f \geqslant 0$, et P un courant positif qui s'annule sur X, tels que $T^{(n-k)} = f[X] + P$, $(P = \widetilde{S}$ avec $S = 1_{U\setminus(L}T^{(n-k)})$, ce qui achève la preuve du lemme.

2.3. Preuve du théorème pour T positif pluriharmonique

Soit $\{T_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ une suite régularisée de T. Alors T_ν est positif pluriharmonique ; d'après le Lemme 3, il existe un courant $T^{(n-k)}$ et une sous-suite T_{ν_μ} de (T_ν) tels que $\lim_{\mu\to+\infty} \widetilde{R^{n-k}_\mu} = T^{(n-k)}$ faiblement sur U. Le courant $T^{(n-k)}$ est positif, et on va montrer qu'il est pluriharmonique. En effet soit ψ une forme différentielle C^∞ à support compact dans U. Puisque $dd^cT_\nu = 0$, on aura

$$dd^c\big(\widetilde{R^{n-k}_\mu}\big)(\psi) = \lim_{s\to 0} \int_{\varphi>s} T_\nu \wedge \left(\frac{\alpha_z}{\pi}\right)^{n-k} \wedge dd^c\psi.$$

D'après le théorème de Stokes, ceci est égal à

$$\lim_{s\to 0} \int_{\varphi=s} d^cT_\nu \wedge \left(\frac{\alpha_z}{\pi}\right)^{n-k} \wedge \psi - T_\nu \wedge \left(\frac{\alpha_z}{\pi}\right)^{n-k} \wedge d^c\psi.$$

Par conséquent on aura $|dd^c(\widetilde{R_\mu^{n-k}})(\psi)| \leqslant C.\mathrm{Vol}(K)$, $\quad C > 0$, avec $K = \{\varphi = 0\} = \{\log\varphi = -\infty\}$. L'ensemble K est un compact pluripolaire complet, d'où $\mathrm{Vol}(K) = 0$, et donc $T^{(n-k)}$ est un courant positif pluriharmonique de bidegré (n, n). Comme $\mathrm{codim}(L) = n$, d'après le cas $k = n$ il existe un voisinage X' de 0 dans L et une fonction psh $f : X' \to \mathbb{R}_+$, tels que $\nu(T^{n-k}, B, L) = \int_B f(t)\gamma_t^m$. Pour $p = n - k$, $q = p - 1$ et $dd^c T_\nu = 0$ le Lemme 1 implique

$$\int_{B(r)\times B} T_{\nu_\mu} \wedge \left(\frac{\alpha_z}{\pi}\right)^{n-k} \wedge \gamma_t^m = \frac{1}{(\pi r)^{n-k}} \int_{B(r)\times B} T_{\nu_\mu} \wedge \beta_z^{n-k} \wedge \gamma_t^m.$$

En faisant tendre μ vers $+\infty$, puis r vers 0 on aura

$$\nu(T, L, B) = \nu\big(T^{(n-k)}, L, B\big) = \int_B f(t)\gamma_t^m.$$

Pour montrer le théorème dans le cas où T est positif psh on a besoin du lemme suivant, voir [1].

Lemme 4. *Il existe un voisinage ouvert X de 0 dans L tel que $X \subset\subset \Omega$, et pour tout borélien B dans L tel que $B \subset\subset X$, on a $\nu(T, L, B) = \nu(T^{(1)} + S^{(0)}, L, B)$ avec $T^{(1)} = \lim_{\mu\to+\infty} \widetilde{R_\mu^1}$, où $R_\mu^1 = T_{\nu_\mu} \wedge \frac{\alpha_z}{\pi}$ et $S^{(0)} = \lim_{\mu\to+\infty} \widetilde{R_\mu'^0}$, où $R_\mu'^0 = \frac{-\log(\varphi)}{\pi} dd^c T_{\nu_\mu}$, pour une sous-suite (T_{ν_μ}) de (T_ν).*

2.4. *Preuve du théorème pour T positif psh*

Le courant $T^{(1)} + S^{(0)}$ est positif pluriharmonique, on sait qu'il existe une fonction $f : X \to \mathbb{R}_+$ psh telle que $\nu(T^{(1)} + S^{(0)}, L, B) = \int_B f(t)\gamma_t^m$. Le Lemme 4 nous donne

$$\nu(T, L, B) = \int_B f(t)\gamma_t^m.$$

Remerciements

Je remercie les Professeurs H. Ben Messaoud et J.-P. Demailly pour leurs remarques qui ont permis d'améliorer cette Note.

Références

[1] L. Alessandrini, G. Bassanelli, Lelong numbers of positive plurisubharmonic currents, Results Math. 30 (1996).
[2] G. Bassanelli, Cut off theorem of plurisubharmonic currents, Forum Math. 6 (1994) 576–595.
[3] J.-P. Demailly, Sur les nombres de Lelong associés à l'image directe d'un courant positif fermé, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 32 (1982) 37–66.
[4] J.-P. Demailly, Formules de Jensen en plusieurs variables et applications arithmétiques, Bull. Soc. Math. France 110 (1982) 75–102.
[5] Y.T. Siu, Analycity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents, Invent. Math. 27 (1974) 53–156.