Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006) 689–694
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Logique

Quelques remarques sur les corps D-valués

Nicolas Guzy [1]

Université Mons-Hainaut, 20, place du Parc, BE-7000 Mons, Belgique

Reçu le 7 octobre 2006 ; accepté après révision le 27 octobre 2006

Disponible sur Internet le 6 décembre 2006

Présenté par Jean-Yves Girard

Résumé

On prouve un théorème sur le 17ème problème d'Hilbert et un théorème d'approximation à la Greenberg dans le cas des corps D-valués discrets dans le sens de T. Scanlon. ***Pour citer cet article : N. Guzy, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).***

Abstract

Some remarks on *D*-valued fields. We prove a Hilbert's Seventeenth problem theorem and an approximation theorem in the style of Greenberg in the case of discrete D-valued fields in the sense of T. Scanlon. ***To cite this article: N. Guzy, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).***

Abridged English version

In what it follows, all fields and rings are of characteristic 0 (including the residue fields). Let us recall that a valued field $\langle K, v\rangle$ is a field K equipped with a valuation map $v: K \to \Gamma \cup \{\infty\}$, where $\Gamma := v(K^\times)$ is a totally ordered abelian group, called the value group. The subring $\mathcal{O}_K := \{x \in K\colon\ v(x) \geqslant 0\}$ of K is the valuation ring of $\langle K, v\rangle$ and the residue field of K is $k_K := \mathcal{O}_K/\mathcal{M}_K$, where $\mathcal{M}_K := \{x \in K\colon\ v(x) > 0\}$.

In this Note we are interested in a particular class of D-valued fields introduced by T. Scanlon in [10]. A differential field $\langle K, D\rangle$ is called D-valued if it is equipped with a valuation v which satisfies the following condition: $\forall x\,[v(Dx) \geqslant v(x)]$. Thus v is called a D-valuation.

First we are interested in a canonical example of D-valued field with respect to a fixed differentially closed field $\langle \mathbf{k}, \delta\rangle$. More precisely we consider the D-valued field $\langle \mathbf{k}((t)), D_t, v_t, t\rangle$ of Laurent series over the differentially closed field $\mathbf{k}$ with respect to its canonical valuation v_t and its canonical derivation D_t (defined term by term with δ). We use the model completeness of the $\mathcal{L}$-theory $T := Th(\langle \mathbf{k}((t)), D_t, v_t, t\rangle)$ (deduced from [10] and [11]) in the language $\mathcal{L} := \{+, -, \cdot, D, \mathcal{D}, 0, 1, t\}$ (where D is interpreted as a derivation and $\mathcal{D}$ is a linear divisibility relation for the valuation) to show a differential analogue of the Hilbert's Seventeenth problem theorem in [1]. It consists of a characterization of the differential rational functions which are integral on a subset S in the field $K\langle \underline{X}\rangle$ of differential rational functions over any model K of T (in several differential indeterminates $\underline{X} := (X_1, \ldots, X_n)$).

Adresse e-mail : nicolas.guzy@umh.ac.be (N. Guzy).

[1] Chargé de Recherche F.N.R.S.

1631-073X/$ – see front matter © 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2006.10.025

Let $\langle K, D, v\rangle$ be a D-valued field, $r \in K\langle \underline{X}\rangle$ and S a finite subset of $K\langle \underline{X}\rangle \setminus K$. We say that r is integral on S if for any $a \in K^n$ such that $r(a)$ is defined, if for all $s \in S$ such that $s(a)$ is defined we have $v(s(a)) \geqslant 0$, then $v(r(a)) \geqslant 0$.

Now we can state the theorem about rational functions which are integral on S.

Let $\langle K, D, v, t\rangle$ be a model of the $\mathcal{L}$-theory T, $r \in K\langle \underline{X}\rangle$ and S a finite subset of $K\langle \underline{X}\rangle \setminus K$. Then r is integral on S if and only if r is integral over the ring $\mathbb{Z}[\gamma(K\langle \underline{X}\rangle), (K\langle \underline{X}\rangle)^{\dagger}, S]_U$ where $U := \{1 + ta\colon a \in \mathbb{Z}[\gamma(K\langle \underline{X}\rangle), (K\langle \underline{X}\rangle)^{\dagger}, S]\}$, the operator $\gamma(X)$ is defined as $\frac{X}{X^2-t}$, $(X)^{\dagger}$ denotes $\frac{DX}{X}$ and $(A)^{\dagger}$ denotes the set $\{\frac{Da}{a}\colon a \in A\}$ for any subset A of a differential field.

Results in the same vein were independently announced by D. Haskell and Y. Yaffe in [7] but in a different context since they deal with valued D-fields whose value group is divisible.

Secondly we consider valuation differential rings $\langle A, D\rangle$ of discrete valued D-fields $\langle K, D, v\rangle$ which have enough constants (i.e. $\forall x\ \exists y\ Dy = 0 \wedge v(y) = v(x)$) and satisfy the following D-Hensel's Lemma (see Axiom 8, Section 5 in [10]).

Let $\langle K, D, v\rangle$ be a D-valued field. We say that K satisfy the D-Hensel's Lemma if for any $f \in \mathcal{O}_K\{X\}$ given by $f(X_0, \ldots, X_n) \in \mathcal{O}_K[X_0, \ldots, X_n]$ (i.e. $f = f(X, DX, \ldots, D^{(n)}X)$) and for any $y \in \mathcal{O}_K$ such that $f(y)$ is a non unit in $\mathcal{O}_K$ but $\frac{\partial f}{\partial X_i}(y, Dy, \ldots, D^{(n)}y)$ is a unit in $\mathcal{O}_K$ for some i, then there exists some $x \in \mathcal{O}_K$ such that $f(x) = 0$ and $x - y$ is a non unit in $\mathcal{O}_K$. In particular, we will say that $\langle \mathcal{O}_K, D\rangle$ is D-henselian.

In this situation we prove the following theorem which is a differential version of a theorem "à la Greenberg" in [2]:

Let $\langle A, D\rangle$ be a discrete D-henselian valuation ring which has enough constants, let t be a uniformizing parameter and let $f := (f_1, \ldots, f_m)$ be in the differential polynomial ring $A\{\underline{X}\}$ over A. Then there exists an integer $N \in \mathbb{N}$ such that for all $\alpha \in \mathbb{N}^{>0}$, for all $\underline{x} \in A$ such that $f(\underline{x}) = 0 \bmod t^{\alpha N}$, there exists $\underline{y} \in A$ such that $f(\underline{y}) = 0$ and $\underline{y} = \underline{x} \bmod t^{\alpha}$.

A stronger version of this result has been independently announced by L. Bélair (see [3]).

We finish this Note with the differential version of the 'Nullstellensatz theorem' proved in [2].

Let K be the D-valued field $\mathbf{k}((t))$ of Laurent series over the differentially closed field $\langle \mathbf{k}, \delta\rangle$, let $\Lambda = \mathbb{Z}[\underline{X}, \gamma(K\langle X\rangle), (K\langle X\rangle)^{\dagger}]$, let $R = \Lambda[(1 + t\Lambda)^{-1}]$ and let $f_1, \ldots, f_m$ be in $K\{\underline{X}\}$.

If $f_1, \ldots, f_m$ have no common zero in $\mathcal{O}_K$ then $(f_1, \ldots, f_m)_{R\cdot K\{\underline{X}\}} = R \cdot K\{\underline{X}\}$ where $(f_1, \ldots, f_m)_{R\cdot K\{\underline{X}\}}$ is the ideal generated by the f_i's in the ring $R \cdot K\{\underline{X}\}$.

1. Introduction

Dans ce qui suit, tous les corps et anneaux considérés sont de caractéristique nulle (y compris les corps résiduels). Nous allons nous intéresser à une classe particulière de corps D-valués introduits par T. Scanlon dans [10]. Un corps différentiel $\langle K, D\rangle$ est dit D-valué s'il est muni d'une valuation v qui satisfait une condition de continuité forte pour la dérivation par rapport à la topologie de la valuation : $\forall x \in K^{\times}\ v(Dx) \geqslant v(x)$. On appelle dès lors v une D-valuation. En particulier, tous les idéaux de l'anneau de valuation sont différentiels. Un exemple canonique de corps D-valué pour un corps différentiel résiduel fixé $\langle \mathbf{k}, \delta\rangle$ et un groupe de valeurs fixé $\mathbf{G}$ est le corps de séries de puissances généralisées $\mathbf{k}((t; \mathbf{G}))$ muni de la valuation canonique v_t par rapport à t et de la dérivation D_t définie composante par composante grâce à la dérivation δ sur le corps $\mathbf{k}$ (voir Section 6 de [10]). En particulier, $\mathbf{k}((t; \mathbf{G})) \models \forall g \in \mathbf{G}\ \ (D_t(t^g) = 0)$. Dans la suite, nous allons considérer des analogues différentiels du 17ème problème de Hilbert et du théorème de Greenberg (voir [6]) pour les corps D-valués de séries de Laurent (i.e. $\mathbf{G} = \mathbb{Z}$) où $\langle \mathbf{k}, \delta\rangle$ est un corps différentiellement clos. Nous établissons donc dans les sections suivantes l'analogue différentiel des résultats de [1] et [2] dans le cadre des corps D-valués. Dans [7], D. Haskell et Y. Yaffe ont annoncé des résultats similaires à ceux de la Section 2 mais dans un contexte différent : le corps résiduel est différentiellement clos mais le groupe de valeurs est divisible. Le Théorème 3.3 de la Section 3 a été annoncé indépendamment par L. Bélair qui prouve aussi le Lemme 3.2 (voir [3]) qui découle du Théorème 4.7 de [5].

2. Fonctions rationnelles sur les corps D-valués des séries de Laurent

Rappelons qu'un corps valué $\langle K, v\rangle$ est un corps K muni d'une valuation $v : K \to \Gamma \cup \{\infty\}$, où $\Gamma := v(K^{\times})$ est un groupe abélien totalement ordonné appelé groupe de valeurs. Le sous-anneau $\mathcal{O}_K := \{x \in K\colon\ v(x) \geqslant 0\}$ de K est l'anneau de valuation de $\langle K, v\rangle$ et le corps résiduel de K est $k_K := \mathcal{O}_K/\mathcal{M}_K$, où $\mathcal{M}_K := \{x \in K\colon\ v(x) > 0\}$.

L'application résiduelle est notée $\pi : \mathcal{O}_K \mapsto k_K$. Si un corps est muni de plusieurs valuations, on ajoutera un indice pour distinguer les différentes structures se rapportant à une valuation précise. On utilise la notation $v(x) = 1$ pour un élément x de valeur positive minimale dans un groupe de valeurs discret et on note $\langle K, D, v, t\rangle$ le corps D-valué discret où $v(t) = 1$. Si K est un corps valué, L est un corps contenant K muni d'une valuation w, on dira que w est une valuation de L au-dessus de K si w étend la valuation de K.

Rappelons maintenant un résultat important de S. Kochen :

Lemme 2.1. (Voir Lemme 3 de [9]) *Soient $\langle K, v\rangle$ un sous-corps valué d'un corps L et A un sous-anneau de L tel que $\mathcal{O}_K = A \cap K$. Soit $U = \{1+ma\colon m \in \mathcal{M}_K,\ a \in A\}$ (en particulier $0 \notin T$ et T est un sous-ensemble multiplicativement clos). Alors la clôture intégrale de l'anneau A_U (le localisé de A en U) est l'intersection des anneaux de valuation $\mathcal{O}_L$ de L tel que $A \subset \mathcal{O}_L$ et $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_L \cap K$.*

Remarque 1. Soient $K \subset L$, v et A comme ci-dessus, et supposons que $t \in K$ soit tel que $v(t)$ est le plus petit élément strictement positif de $v(K^\times)$. Alors $U = \{1 + ta\colon a \in A\}$. De plus, puisque $\frac{1}{t} \notin \mathcal{O}_K = K \cap A$, on déduit comme dans [9] que $\frac{1}{t}$ ne peut être entier sur A_U.

Lemme 2.2. (Voir [8]) *Soit $\langle K, v\rangle$ un corps valué avec un élément distingué t.*

Alors on a les équivalences suivantes :

(i) $v(t) = 1$;
(ii) *$t \in \mathcal{M}_K$ et $\gamma(K) \subset \mathcal{O}_K$ où $\gamma(X)$ est l'opérateur défini par $\frac{X}{X^2-t}$.*

Nous donnons maintenant une caractérisation des extensions de corps D-valué non ramifiée au-dessus de $\langle K, D, v, t\rangle$. Nous introduisons la notation $X^\dagger$ pour $\frac{DX}{X}$ et $(A)^\dagger = \{\frac{Da}{a}\colon a \in A\}$ pour un sous-ensemble A d'un corps différentiel.

Proposition 2.3. *Soient $\langle K, D, v, t\rangle$ un corps D-valué discret et $\langle L, D\rangle$ une extension de $\langle K, D\rangle$. Alors $\langle L, D\rangle$ admet une D-valuation w telle que $\langle L, D, w, t\rangle$ est une extension non ramifiée de $\langle K, D, v, t\rangle$ (et donc $w(t) = 1$) si et seulement si $\frac{1}{t} \notin \mathcal{O}_K[\gamma(L), (L)^\dagger]$ (si et seulement si $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_K[\gamma(L), (L)^\dagger] \cap K$).*

Preuve. ($\rightarrow$) Soit $\mathcal{O}_{L,w}$ un anneau de valuation tel que $\langle L, D, w\rangle$ satisfait $w(t) = v(t) = 1$. Alors par le Lemme 2.2, $\gamma(L) \subset \mathcal{O}_{L,w}$ et puisque w est une D-valuation, on a $(L)^\dagger \subset \mathcal{O}_{L,w}$, ce qui implique $\mathcal{O}_K[\gamma(L), (L)^\dagger] \subset \mathcal{O}_{L,w}$. Puisque $\frac{1}{t} \notin \mathcal{O}_{L,w}$, on obtient $\frac{1}{t} \notin \mathcal{O}_K[\gamma(L), (L)^\dagger]$.

($\leftarrow$) Supposons $\frac{1}{t} \notin \mathcal{O}_K[\gamma(L), (L)^\dagger]$ alors $\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_K[\gamma(L), (L)^\dagger] \cap K$. Par la Remarque 1, puisque $t \in \mathcal{O}_K$, on a que $\frac{1}{t}$ n'est pas entier sur $\mathcal{O}_K[\gamma(L), (L)^\dagger]_U$ (voir notations du Lemme 2.1 pour $A := \mathcal{O}_K[\gamma(L), (L)^\dagger]$). Par le Lemme 2.1 appliqué à $A = \mathcal{O}_K[\gamma(L), (L)^\dagger]$, il existe une valuation w sur L étendant v et telle que $A \subset \mathcal{O}_{L,w}$ et $t \in \mathcal{M}_{L,w}$. Par le Lemme 2.2, nous avons $w(t) = v(t) = 1$ et, $(L)^\dagger \subset \mathcal{O}_{L,w}$ implique que c'est une D-valuation sur L. □

Proposition 2.4. *Soient $\langle K, D, v, t\rangle$ un corps D-valué discret, $\langle L, D\rangle$ une extension du corps différentiel $\langle K, D\rangle$, $a \in L$ et $S \subset L \setminus K$. Supposons que L possède une D-valuation non ramifiée au-dessus de K telle que $S \subset \mathcal{O}_L$. Alors $w(a) \geqslant 0$ pour toute valuation w de L non ramifiée au-dessus de K telle que $w(S) \geqslant 0$ si et seulement si a est entier sur $\mathcal{O}_K[\gamma(L), (L)^\dagger, S]_U$ où $U := \{1 + ta\colon a \in \mathcal{O}_K[\gamma(L), (L)^\dagger, S]\}$.*

Preuve. Raisonnant comme dans la preuve de la Proposition 2.3 en utilisant le Lemme 2.1, on déduit que : a est entier sur $\mathcal{O}_K[\gamma(L), (L)^\dagger, S]_U$ si et seulement si pour toute valuation w de L avec $\mathcal{O}_K[\gamma(L), (L)^\dagger, S] \subset \mathcal{O}_{L,w}$, on a $a \in \mathcal{O}_{L,w}$. Par le Lemme 2.2 et puisque $(L)^\dagger \subset \mathcal{O}_{L,w}$, c'est équivalent à ce que la valuation w de L soit une D-valuation non ramifiée au-dessus de K telle que $S \subset \mathcal{O}_{L,w}$. □

Lemme 2.5. (Voir [8]) *Soit $\langle K, v, t\rangle$ un corps valué hensélien discret. Alors $\gamma(K) = \mathcal{O}_K$.*

Du Lemme 2.5, on obtient le corollaire suivant

Corollaire 2.6. *Soient $\langle K, D, v, t\rangle$ un corps hensélien D-valué discret, $\langle L, D\rangle$ une extension du corps différentiel $\langle K, D\rangle$ et $a \in L$. Supposons que L possède une D-valuation non ramifiée w au-dessus de K. Alors $w(a) \geqslant 0$ pour toute D-valuation w de L non ramifiée au-dessus de K si et seulement si a est entier sur $\mathbb{Z}[\gamma(L), (L)^{\dagger}]_U$.*

On va dans la suite considérer l'anneau des polynômes différentiels (ou D-polynômes) en les variables $\underline{X} := (X_1, \ldots, X_n)$ sur K, noté $K\{\underline{X}\}$, ainsi que son corps de fractions $K\langle \underline{X}\rangle$.

Considérons maintenant le corps D-valué $\langle \mathbf{k}((t)), D_t, v_t, t\rangle$ des séries de Laurent sur un corps différentiellement clos $\langle \mathbf{k}, \delta\rangle$. Les résultats suivants se rapportent aux modèles K de la $\mathcal{L}$-théorie $T := Th(\langle \mathbf{k}((t)), \mathcal{D}, D, t\rangle)$ dont on déduit, grâce aux résultats de [10] et [11], la modèle-complétude dans le language $\mathcal{L} := \{+, -, \cdot, D, \mathcal{D}, 0, 1, t\}$ où $\mathcal{D}$ est un symbole de relation binaire de divisibilité linéaire pour la valuation, D est une fonction interprétée comme la dérivation et t est une constante interprétée comme un élément de valuation minimale positive dans le groupe de valeurs.

Afin d'appliquer les résultats précédents au corps différentiel $K\langle \underline{X}\rangle$ tel que $K \models T$, on doit montrer que $\langle K\langle \underline{X}\rangle, D\rangle$ possède une D-valuation non ramifiée au-dessus de K. Pour cela, il suffit de considérer une $\mathcal{L}$-extension élémentaire suffisamment saturée de K que l'on note L ; et on voit aisément par saturation de L, qu'il existe des éléments x_l dans L ($l \in \{1, \ldots, n\}$) tels que les $\{D^{(i)}x_l\}_{i,l}$ soient algébriquement indépendants sur K.

Définition 2.7. Soient $\langle K, D, v\rangle$ un corps D-valué, $r \in K\langle \underline{X}\rangle$ et S une partie finie de $K\langle \underline{X}\rangle \setminus K$. On dit que r est à valeurs S-entières, si pour tout $a \in K^n$ tel que $r(a)$ soit défini, si pour tout $s \in S$ tel que $s(a)$ soit défini on a $v(s(a)) \geqslant 0$, alors $v(r(a)) \geqslant 0$.

Théorème 2.8. *Soient $\langle K, D, v, t\rangle$ un modèle de la $\mathcal{L}$-théorie T, $r \in K\langle \underline{X}\rangle$ et S une partie finie de $K\langle \underline{X}\rangle \setminus K$. Alors r est à valeurs S-entières si et seulement si r est entier sur $\mathbb{Z}[\gamma(K\langle \underline{X}\rangle), (K\langle \underline{X}\rangle)^{\dagger}, S]_U$ où $U := \{1 + ta\colon a \in \mathbb{Z}[\gamma(K\langle \underline{X}\rangle), (K\langle \underline{X}\rangle)^{\dagger}, S]\}$.*

Preuve. L'implication de droite à gauche découle directement de $K \models T$. Prouvons l'autre implication en contraposant. Premièrement, on peut supposer $K := \mathbf{k}((t))$ puisque la conclusion du théorème est une collection d'énoncés du premier ordre dans le langage $\mathcal{L}$. Puisqu'il existe une D-valuation de $K\langle \underline{X}\rangle$ non ramifiée au-dessus de K, on applique la Proposition 2.4 et on obtient une D-valuation w sur $K\langle \underline{X}\rangle$ non ramifiée au-dessus de K telle que $S \subset \mathcal{O}_{K\langle \underline{X}\rangle}$ et $r \notin \mathcal{O}_{K\langle \underline{X}\rangle}$. En utilisant les résultats de [10] et [11], on étend $K\langle \underline{X}\rangle$ en un modèle L de la $\mathcal{L}$-théorie T. Donc r n'est pas à valeurs S-entières en appliquant la modèle-complétude de la $\mathcal{L}$-théorie T, ce qui achève la preuve. □

Corollaire 2.9. *Sous les mêmes hypothèses que précédemment, on obtient* :

(i) $(S = \emptyset)$ *r est à valeurs S-entières sur K si et seulement si r est entier sur* $\mathbb{Z}[\gamma(K\langle \underline{X}\rangle), (K\langle \underline{X}\rangle)^{\dagger}]_U$;
(ii) $(S = \{\underline{X}\})$ *r est à valeurs S-entières sur $\mathcal{O}_K$ si et seulement si r est entier sur* $\mathbb{Z}[\underline{X}, \gamma(K\langle \underline{X}\rangle), (K\langle \underline{X}\rangle)^{\dagger}]_U$.

3. Théorème différentiel de Greenberg

Soit $\langle A, D\rangle$ un anneau différentiel qui soit un anneau de valuation tel que $D(\mathcal{M}_A) \subset \mathcal{M}_A$ (où $\mathcal{M}_A$ est l'idéal maximal de A) et induit une dérivation δ sur le corps résiduel $k_A := A/\mathcal{M}_A$. On désignera aussi par $A\{\underline{X}\}$ l'anneau des D-polynômes à coefficients sur A en les indéterminées différentielles $\underline{X} := (X_1, \ldots, X_n)$.

Définition 3.1. On dit que A est D-hensélien si pout tout $f \in A\{X\}$ donné par $f(X_0, \ldots, X_n) \in A[X_0, \ldots, X_n]$ (i.e. $f = f(X, DX, \ldots, D^{(n)}X)$) et pour tout $y \in A$ tel que $f(y)$ soit non inversible mais $\frac{\partial f}{\partial X_i}(y, Dy, \ldots, D^{(n)}y)$ soit inversible pour un certain i, alors il existe $x \in A$ tel que $f(x) = 0$ et $x - y$ est non inversible.

Par la Proposition 6.1 dans [10], l'anneau D-valué $\mathbf{k}[[t]]$ est D-hensélien où $\langle \mathbf{k}, \delta\rangle$ est un corps différentiellement clos.

En pratique, il faut que le corps résiduel k_A de l'anneau différentiel A soit D-linéairement clos (c'est-à-dire que si L est un opérateur qui est une k_A-combinaison linéaire de puissances de D, alors $L(k_A) = k_A$). De plus, on a besoin d'avoir « assez de constantes » dans l'anneau A (voir Définition 7.3 dans [10]) pour vérifier cela ; plus précisément il faut que tout élément de A soit de la forme $u \cdot b$ où u est inversible et $Db = 0$. Désormais, on suppose que tous les anneaux différentiels ont « assez de constantes ».

Soit $\langle A, D\rangle$ un anneau de valuation différentiel D-hensélien discret (donc, par le Lemme 5.3 de [10], le corps résiduel est D-linéairement clos). Considérons un paramètre uniformisant t de A tel que $Dt = 0$ (il en existe par la remarque précédente).

Soient A^* une ultrapuissance sur $\mathbb{N}$, $k^* = A^*/(t)$ et $\mathbb{Z}^*$ les ultrapuissances correspondantes de $k := A/(t)$ et de $\mathbb{Z}$ ainsi que v^* la valuation de A^* dans $\mathbb{Z}^*$. Soient H un sous-groupe convexe de $\mathbb{Z}^*$ contenant $\mathbb{Z}$ et $I_H := \{x \in A^* : v^*(x) \notin H\}$. Alors I_H est un idéal différentiel tel que $I_H \cap A = (0)$. Posons dès lors $A^H := A^*/I_H$ qui est un anneau différentiel, la projection naturelle $\pi_H : A^* \to A^H$ et l'injection naturelle $i : A \hookrightarrow A^*$.

Lemme 3.2. *Sous les hypothèses précédentes, l'anneau différentiel A^H se relève en un sous-anneau différentiel de A^*, i.e. il existe un homomorphisme d'anneaux différentiels $\psi : A^H \to A^*$ tel que $\psi_{|A} = i$ et $\pi_H \circ \psi = id_{A^H}$.*

Preuve. Soit A_0 un D-sous-anneau de A^* maximal par rapport à la propriété : $(x \in A_0 \Rightarrow v^*(x) \in H \cup \{\infty\})$. Alors la restriction de π_H à A_0 envoie A_0 sur un sous-anneau différentiel de A^H. Ce morphisme différentiel est clairement injectif et on suppose afin d'aboutir à une contradiction qu'il n'est pas surjectif.

Soit $a^* \in A^*$ tel que $\pi_H(a^*) \notin \pi_H(A_0)$, c'est-à-dire $v^*(a^*) \in H$ et $v^*(a^* - a_0) \in H$ pour tout $a_0 \in A_0$.

Premièrement, on note que $\pi_H(a^*)$ ne peut être D-transcendant sur $\pi_H(A_0)$, car l'application π_H serait alors injective sur $A_0\{a^*\}$, contredisant la maximalité de A_0. Ensuite on considère un D-polynôme $F(X)$ à coefficients dans A_0 d'ordre minimal et de degré total minimal (voir le formalisme différentiel dans la Section 3 de [10]) tel que $\pi_H(F(a^*)) = 0$ (et donc $v^*(F(a^*)) > H$). Ainsi, pour tout $G(X)$ de degré total inférieur, on a $0 < v^*(G(a^*)) \in H$; et en particulier, il existe i tel que $\pi_H(\frac{\partial F}{\partial X_i}(a^*)) \neq 0$, c'est-à-dire que $v^*(\frac{\partial F}{\partial X_i}(a^*)) \in H$. Puisque H est convexe, on a $v^*(F(a^*)) > 2v^*(\frac{\partial F}{\partial X_i}(a^*))$.

En appliquant les Lemmes 5.3 de [10] et 8.4 de [11], le corps de fractions K^* de A^* muni de la valuation v^* satisfait cette version plus forte de la propriété de « D-Hensel » :

pout tout $f \in \mathcal{O}_{K^*}\{X\}$ et pour tout $y \in A$ tel que $v^*(f(y)) > 2v^*(\frac{\partial f}{\partial X_i}(y))$ pour un certain i alors il existe $x \in A^*$ tel que $f(x) = 0$ et $v^*(x - y) \geqslant v^*(f(y)) - v^*(\frac{\partial f}{\partial X_i}(y))$.

D'où il existe un élément $b \in A^*$ tel que $F(b) = 0$ et $v^*(b - a^*) > H$; i.e. $\pi_H(a^*) = \pi_H(b)$. Les conditions de minimalité de F implique l'injectivité de π_H sur $A\{b\}$. Pour tout $y \in A_0\{b\}$, on a $v^*(y) \in H$ et on conclut que $b \in A_0$ ce qui contredit le fait que $v^*(a^* - b) > H$.

En suivant la preuve du Théorème 2.1 dans [4], on prouve le théorème suivant : □

Théorème 3.3. *Soit $\langle A, D\rangle$ un anneau différentiel de valuation discrète qui est D-hensélien. Soit t un paramètre uniformisant de A, soient $f := (f_1, \dots, f_m) \subset A\{\underline{X}\}$. Alors il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ (qui dépend de f) tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{>0}$, pour tout $\underline{x} \in A$ tel que $f(\underline{x}) = 0 \bmod t^{\alpha N}$, il existe $\underline{y} \in A$ tel que $f(\underline{y}) = 0$ et $\underline{y} = \underline{x} \bmod t^{\alpha}$.*

Voici une version plus faible de ce théorème qui est l'analogue pour $\mathbf{k}[[t]]$ du Théorème 2.1 dans [2] :

Théorème 3.4. *Si pour tout entier $N \geqslant 1$, il existe $\underline{y}$ dans $\mathbf{k}[[t]]$ tel que $f_i(\underline{y}) = 0 \bmod t^N$, $i \in \{1, \dots, m\}$ alors il existe $\underline{x}$ in $\mathbf{k}[[t]]$ tel que $f_i(\underline{x}) = 0$, $i \in \{1, \dots, m\}$.*

Définition 3.5. Soient $\langle K, D, v\rangle$ un corps D-valué et $r \in K\langle \underline{X}\rangle$. On dit que r est régulier sur $\mathcal{O}_K$ s'il existe $\lambda \in K^\times$ tel que $v(r(\underline{a})) \geqslant v(\lambda)$ $\forall a \in \mathcal{O}_K$ où $r(\underline{a})$ est définie.

La proposition suivante se déduit aisément du Corollaire 2.9 :

Proposition 3.6. *Soient $\langle K, D, v\rangle := \langle \mathbf{k}((t)), D_t, v_t\rangle$, $r \in K\langle \underline{X}\rangle$, $\Lambda = \mathbb{Z}[\underline{X}, \gamma(K\langle X\rangle), (K\langle X\rangle)^\dagger]$ et l'anneau de fractions $R = \Lambda[(1 + t\Lambda)^{-1}]$. Alors r est régulier sur $\mathcal{O}_K$ si et seulement si r est entier sur l'anneau $R \cdot K$.*

Preuve. En appliquant le Corollaire 2.9 pour $S := \{\underline{X}\} \subset K\{\underline{X}\} \setminus K$, $v(\lambda^{-1}r(a)) \geqslant 0$ pour tout $\bar{a} \subset \mathcal{O}_K$ tel que $r(\bar{a})$ est défini, si et seulement si $\lambda^{-1}r$ est entier sur l'anneau Λ, d'où le résultat.

Le lemme suivant se déduit aisément du Théorème 3.4 : □

Lemme 3.7. *Soient* $\langle K, D, v\rangle$ *comme dans la proposition précédente et* h *dans* $K\{\underline{X}\}$*. Alors* h *n' a aucun zéro dans* $\mathcal{O}_K$ *si et seulement si* h^{-1} *est régulier sur* $\mathcal{O}_K$*.*

On peut maintenant prouver comme dans [2] un théorème des zéros pour le corps D-valué $\mathbf{k}((t))$:

Théorème 3.8. *Soient* K *et* R *comme dans la proposition précédente et soient* $f_1, \ldots, f_m$ *dans* $K\{\underline{X}\}$*. Si* $f_1, \ldots, f_m$ *n'ont aucun zéro commun dans* $\mathcal{O}_K$ *alors* $(f_1, \ldots, f_m)_{R\cdot K\{\underline{X}\}} = R\cdot K\{\underline{X}\}$ *où* $(f_1, \ldots, f_m)_{R\cdot K\{\underline{X}\}}$ *est l'idéal engendré par les* f_i *dans l'anneau* $R\cdot K\{\underline{X}\}$*.*

Preuve. Il suffit de remplacer p par t dans la preuve du Théorème 4.4 de [2] et d'utiliser nos résultats correspondants. □

Remerciements

Je tiens à remercier vivement L. Bélair pour m'avoir communiqué ses différents travaux sur les vecteurs de Witt ainsi que le referee anonyme pour ses remarques constructives.

Références

[1] L. Bélair, Fonctions rationnelles aux différences à valeurs entières dans les vecteurs de Witt, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. 339 (2004) 83–86.
[2] L. Bélair, Equations aux différences dans les vecteurs de Witt, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 99–102.
[3] L. Bélair, Approximation for Frobenius algebraic equations in Witt vectors, préprint disponible électroniquement à http://www.math.uqam.ca.
[4] J. Becker, J. Denef, L. Lipshitz, L. van den Dries, Ultraproducts and approximation in local rings, Invent. Math. 51 (1979) 189–203.
[5] L. Bélair, A. Macintyre, T. Scanlon, Model theory of Witt vectors with Frobenius, préprint.
[6] M.J. Greenberg, Rational points in henselian discrete valuation rings, Publ. Math. IHES 31 (1966) 59–64.
[7] D. Haskell, Y. Yaffe, Gangzstellensatz in theories of valued fields, préprint disponible électroniquement à http://www.math.mcmaster.ca.
[8] B. Jacob, A Nullstellensatz for $\mathbb{R}((t))$, Comm. Algebra 8 (1980) 1083–1094.
[9] S. Kochen, Integral valued rational functions over the p-adic numbers: a p-adic analogue of the theory of real fields, in: Proc. Symposia Pure Math., vol. XII, American Mathematical Society, 1969, pp. 57–73.
[10] T. Scanlon, A model complete theory of D-valued fields, J. Symb. Logic 65 (4) (2000) 1758–1784.
[11] T. Scanlon, Quantifier elimination for the relative Frobenius, in: Valuation Theory and its Applications, vol. II, Saskatoon, SK, 1999, in: Fields Inst. Commun., vol. 33, 1999, pp. 323–352.