Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006) 751–754
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Géométrie différentielle

Systèmes de contact intégrables à singularitées non dégénérées

Moussa Balde, Salomon Sambou, El Hadj Cheikh Mbacke Diop

Département de mathématiques et informatique, faculté des sciences et techniques, UCAD, Dakar-Fann, Senegal

Reçu le 19 octobre 2006 ; accepté après révision le 27 octobre 2006

Disponible sur Internet le 1er décembre 2006

Présenté par Étienne Ghys

Résumé

On définit une notion de « système de contact intégrable à singularités non dégénérées » pour les 3-variétés de contact. Dans le cas d'une variété compacte, on construit les invariants caractéristiques d'un tel système. C'est l'analogue en géométrie de contact de l'étude faite par A. Toulet (1996) pour les systèmes hamiltoniens à un degré de liberté ; dont on utilise les résultats. Les invariants obtenus indiquent qu'en général les systèmes obtenus ne sont pas les contactisés de modèles de Toulet. ***Pour citer cet article : M. Balde et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).***

Abstract

Nondegenerate integrable contact systems on 3-manifolds. We introduce a notion of 'nondegenerate integrable contact system' for 3-contact manifolds. In the case of compact manifolds, we construct characteristic invariants for such a system. This is the contact analogue of the work done by A. Toulet (1996) for Hamiltonian systems with one degree of freedom, and we use these results. The invariants pointed out indicate that, generally, we arrive at systems which are not contactisations of Toulet models. ***To cite this article: M. Balde et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006).***

1. Introduction

1.1. Position du problème

On s'intéresse au triple (M, H, g), où (M, H) est une 3-variété de contact compacte, g est une fonction de Bott–Morse dont les niveaux définissent un feuilletage singulier $\mathcal{F}$. On dira que $(M, \mathcal{F}, H)$, est un système de contact intégrable à singularités non dégénérées (SCI-nd) si les conditions suivantes sont satisfaites :

(H_1) L'algèbre de Lie $\mathcal{A}$ des automorphismes infinitésimaux du triple $(M, \mathcal{F}, H)$, est transitive sur les feuilles. Rappelons qu'un champ de vecteurs X est un automorphisme infinitésimal du feuilletage singulier si, et seulement si, $L_X\,\mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}g = 0$.

Adresses e-mail : mbalde@ucad.sn (M. Balde), ssambou@refer.sn (S. Sambou), cmdiop@ucad.sn (E.H.C.M. Diop).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2006.10.022

(H$_2$) Si m est un point d'une feuille singulière (i.e. une feuille de dimension < 2) S de $\mathcal{F}$ et si A_m^T désigne l'algèbre de Lie de champs de vecteurs linéaires sur l'espace transverse $E_m^T = T_m M / T_m S$ engendrée par l'isotropie de $\mathcal{A}$ en m.
Alors les orbites de A_m^T sont les feuilles du feuilletage singulier F_m^T défini par les niveaux de la partie principale de g en m.
Notons que la partie principale de g en un point singulier m peut être considérée comme une fonction quadratique g_m^T sur E_m^T.

Le cas où les singularités sont de type elliptique est connu [1].

Le but de cette Note est de définir les invariants caractéristiques d'un triple $(M, \mathcal{F}, H)$, vérifiant les hypothèses (H$_1$) et (H$_2$).

1.2. Exemple fondamental

Soit (W, ω_W, g_W) une surface compacte, munie d'une forme d'aire et d'une fonction de Morse définissant un flot $\mathcal{F}_W$. A. Toulet a construit dans sa thèse [3] un système complet d'invariants qui classifient le triple $(W, \omega_W, \mathcal{F}_W)$. Supposons que la forme ω_W peut être réalisée comme la courbure d'une connexion α sur un S^1-fibré principale $\pi : M \to W$ (condition d'intégralité de la classe de cohomologie de ω_W). Si H est le champ horizontal de la connexion, $\mathcal{F}$ le feuilletage singulier préimage par π de $\mathcal{F}_W$, le triple $(M, H, \mathcal{F})$ est un SCI-nd. Dans ce cas les invariants obtenus par Toulet déterminent à isomorphisme près la structure.

Plus généralement, s'il existe dans $\mathcal{A}$ un champ de vecteurs à orbites périodiques, on a une structure de contact invariante par une action localement libre de S^1. On dira dans ce cas que le SCI-nd $(M, H, \mathcal{F})$ admet un « pivot ». Les structures de contact S^1-invariantes ont été étudiées par Lutz dans [2], mais bien entendu, la classification faite ici fait intervenir une structure suplèmentaire.

2. Résultats

2.1. Propriétés élémentaires

(i) L'algèbre de Lie $\mathcal{A}$ est abélienne.
(ii) Les feuilles singulières de $\mathcal{F}$ sont de dimension 1 (des cercles). On dira qu'une telle feuille est de type elliptique ou hyperbolique suivant la partie principale de g en un point de cette feuille.
(iii) La structure de contact H est transverse aux orbites de $\mathcal{A}$.
(iv) Le feuilletage $\mathcal{F}$ comprend
  - Des feuilles compactes de dimension 2, qui sont des tores.
  - Des feuilles singulières isolées de type elliptique.
  - Des séparatrices hyperboliques compactes de dimension 2 dont les self-intersections sont des feuilles singulières de type hyperbolique.
(v) Les feuilles compactes de dimension 2 de $\mathcal{F}$ sont sans holonomie.

Ces propriétés se déduisent sans difficulté des hypothèses (H_1) (H_2). En particulier (i) résulte du fait suivant : si, sur un niveau régulier de g, le flot induit par H est dense, alors l'algèbre induite sur ce niveau par $[\mathcal{A}, \mathcal{A}]$ est tangente à H.

2.2. Étude semi-locale

(i) Au voisinage d'une feuille compacte de dimension 2, on peut définir des coordonnées locales (y, θ_1, θ_2), où
$$\mathcal{F} \text{ est défini par } \mathrm{d}y = 0, \text{ et } H \text{ par } \mathrm{d}\theta_1 + y\,\mathrm{d}\theta_2 = 0,$$
y est défini modulo une transformation projective entière
(ii) Au voisinage d'une feuille singulière elliptique, il existe des coordonnées locales canoniques $(\rho, \theta_1, \theta_2)$ où
$$\mathcal{F} \text{ est défini par } \mathrm{d}(\rho^2) = 0, \text{ et } H \text{ par } \mathrm{d}\theta_1 + \frac{1}{2}\rho^2\,\mathrm{d}\theta_2 = 0,$$
(ρ, θ_2) étant des coordonnées polaires.

(iii) Au voisinage d'une séparatrice hyperbolique Σ, il existe dans $\mathcal{A}$ un champ Z définissant une action de S^1 localement libre.
  (a) Si l'action de S^1 est libre, la structure étudiée est au voisinage de Σ obtenue par contactisation d'un modèle de Toulet, avec un invariant de contact cohomologique qui s'interprète comme l'holonomie de la connexion induite par H sur Σ.
  (b) Si l'action de S^1 n'est pas libre, son isotropie sur une feuille singulière de Σ est d'ordre 2 et la structure est, au voisinage de Σ, obtenue à partir d'un modèle semi-local de Toulet muni d'une involution.

Nous donnons ici les grandes lignes de la preuve de (iii) qui montre bien le rôle joué par les modèles de Toulet.
L'idée est la suivante : on peut trouver, pour une séparatrice hyperbolique Σ, un champ X dans $\mathcal{A}$ dont la restriction X_Σ sur Σ engendre une action localement libre de S^1.

– Si cette action est libre, on considère au voisinage de Σ une transversale T à X. Si α est la forme de contact dont X est le champ de Reeb, $d\alpha$ définit sur T une structure symplectique. Tout champ hamiltonien sur T tangent à $\mathcal{F} \cap T$ se relève en un champ de $\mathcal{A}$. On considère le champ dont le flot au temps 1 définit le premier retour de X sur T. En corrigeant X à l'aide d'un relevé dans $\mathcal{A}$ de ce champ, on construit un champ Z 1-périodique ; dans ce cas, notre système est au voisinage de Σ, le contactisé d'un modèle semi-local de Toulet. Il est classifié, à équivalence près, par les invariants semi-locaux de Toulet et par l'invariant de contact défini par l'holonomie de la connexion induite sur Σ.
– Si l'action n'est pas libre, elle a une isotropie d'ordre 2. On applique la méthode précédente au second retour de X, et on obtient un modèle semi-local correspondant à un modèle semi-local de Toulet muni d'une involution.

2.3. *Invariants caractéristiques*

Notons $\mathcal{G}$ le graphe de Reeb de la fonction g, c'est à dire l'ensemble des composantes connexes des niveaux de g. C'est une variété singulière de dimension 1, avec des points de bifurcation (correspondant aux séparatrices hyperboliques) et des bouts (correspondant aux feuilles singulières elliptiques). Notons qu'il peut y avoir des extrêmas locaux de g correspondant à des points réguliers du graphe. C'est le cas lorsque la fonction g est du type $g(y)$, avec $g'(y) = 0$ et $g''(y) \neq 0$, où y est le paramétrage projectif local.

Au voisinage de chaque point régulier de $\mathcal{G}$, on a une structure projective entière local (i.e. difféomorphisme local à valeurs dans $P(\mathbb{R}^2)$ modulo une transformation projective entière de $P(\mathbb{R}^2)$).

Au voisinage d'un bout, on a une paramétrisation canonique de $\mathcal{G}$ compatible avec cette structure de la partie régulière.

Au voisinage d'un point de branchement, on a des cartes locales (déduites de l'étude semi-locale près d'une séparatrice hyperbolique) qui induisent la structure projective locale sur la partie régulière.

On obtient ainsi sur le graphe $\mathcal{G}$ une structure projective entière singulière.

Remarque 2.1. On observe que cette structure n'est pas définie par la seule donnée de la structure induite sur la partie régulière.

On notera $\hat{\mathcal{G}}$ le graphe de Reeb, muni de cette structure, dont la définition implique les invariants semi-locaux obtenus auparavant.

Le résultat principal de cette Note est le suivant :

Théorème 2.1. *La structure SCI-nd $(M, H, \mathcal{F})$ est déterminée, à automorphisme près, par le graphe de Reeb muni de sa structure projective entière singulière.*

La réalisation du SCI-nd $(M, H, \mathcal{F})$ défini, à automorphisme près, par $\hat{\mathcal{G}}$, s'obtient en recollant les modèles semi-globaux que la structure projective de $\hat{\mathcal{G}}$ détermine, c.a.d. les modèles correspondants aux ouverts de $\hat{\mathcal{G}}$ obtenu en ajoutant à un point singulier toutes les parties régulières qui y aboutissent. Le recollement se fait à l'aide de matrices entières (une pour chaque branches régulières).

Remarques finales.

(i) La SCI-nd est obtenue par contactisation d'un modèle de Toulet si et seulement si la structure $\hat{\mathcal{G}}$ est définie à partir d'une paramétrisation globale correspondant à un modèle de Toulet. Pratiquement cela signifie que l'on peut choisir les cartes projectives locales introduites précédemment de manière qu'elles coincident dans leurs domaines de définition.

(ii) La SCI-nd admet un pivot si, et seulement si la structure $\hat{\mathcal{G}}$ peut être définie par des cartes projective locales du type introduit précédemment, de manière que les changements de cartes soient définis par des matrices entière du type

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & p \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

On peut finalement construire des exemples de SCI-nd qui n'admettent pas de pivot en recollolant des modèles locaux définis au voisinage des niveaux singuliers à l'aide de matrices entières qui ne sont pas de la forme précédente.

Remerciements

Les auteurs remercient vivement le Professeur P. Molino qui a suggéré et suivi pas à pas ce travail.

Références

[1] A. Banyaga, P. Molino, Géométrie des formes de contact complètement intégrables de type toriques, in : Séminaire Gaston Darboux de Géométrie et Topologie différentielle, Montpellier 1991–1992.
[2] R. Lutz, Structures de contact sur les fibrés principaux en cercle de dimension 3, Ann. Inst. Fourier 27 (3) (1977) 1–15.
[3] A. Toulet, Classification des systèmes intégrables en dimension 2, Thèse, Université de Montpellier II, 1996.