Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 955–958
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Systèmes dynamiques

Invariants topologiques des singularités de champs réels

Clementa Alonso-González [a], Izabel Camacho [b], Felipe Cano [c]

[a] *Departamento estadística e investigación operativa, Universidad de Alicante, 03690 Alicante, Espagne*
[b] *Fundação Getulio Vargas, Rio de Janeiro, Brésil*
[c] *Departamento álgebra, geometría y topología, Universidad de Valladolid, 47011 Valladolid, Espagne*

Reçu le 6 mars 2006 ; accepté le 9 avril 2006

Disponible sur Internet le 15 mai 2006

Présenté par Étienne Ghys

Résumé

Nous donnons des invariants topologiques pour une large classe $\mathcal{H}_\pi$ de singularités absolument isolées de champs de vecteurs en dimension trois. Les invariants sont complets lorsque l'on fixe le morphisme de désingularisation π et ils s'obtiennent en termes d'un nombre fini de configurations qui dépendent seulement des valeurs propres des singularités. En particulier, si nous bornons le nombre de Milnor, il n'y aura qu'un nombre fini de types topologiques dans la classe $\mathcal{H}_\pi$. ***Pour citer cet article : C. Alonso-González et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abstract

Topological invariants of singularities of real vector fields. We give topological invariants for a wide class $\mathcal{H}_\pi$ of absolutely isolated singularities of three-dimensional vector fields. Our invariants are complete once we fix the desingularization morphism π. They are obtained in terms of a finite set of configurations depending only on the eigenvalues of the singularities. In particular if the Milnor number is bounded, we get at most finitely many possible classes of topological equivalence in $\mathcal{H}_\pi$. ***To cite this article: C. Alonso-González et al., C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Soit ξ_0 un germe de champ de vecteurs analytique sur $(\mathbb{R}^3, 0)$. Le feuilletage $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_{\xi_0}$ est à singularité *absolument isolée* lorsqu'il n'a que des singularités isolées au bout de toute suite d'éclatements de points. On sait [4] que dans ce cas il y a une désingularisation canonique de $\mathcal{L}_0$. Soit

$$\pi : M \to (\mathbb{R}^3, 0)$$

une telle désingularisation (par des éclatements orientés [5]). Notons $D \subset M$ le diviseur exceptionnel et $\mathcal{L}$ le transformé de $\mathcal{L}_0$. Soit ξ'_0 un champ de vecteurs qui admet le même morphisme de désingularisation π que ξ_0 ; nous dirons que ξ_0 et ξ'_0 sont π*-topologiquement équivalents* s'il existe un homéomorphisme $h : M \to M$ qui envoie feuilles orientées de $\mathcal{L}$ sur feuilles orientées de $\mathcal{L}'$ et de plus $h(D_i) = D_i$ pour chaque composante irréductible D_i de D. Un tel h se projette sur une équivalence topologique entre ξ_0 et ξ'_0.

Adresses e-mail : clementa.alonso@ua.es (C. Alonso-González), izabel@fgv.br (I. Camacho), fcano@agt.uva.es (F. Cano).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2006.04.019

Nous présentons ici une caractérisation de la π-équivalence topologique en termes d'invariants discrets, pour une classe $\mathcal{H}_\pi$ de champs de vecteurs admettant π comme morphisme de désingularisation. En particulier, si le nombre de Milnor $\mu = \mu(\xi_0; 0)$ est fixé, nous en déduirons qu'il n'y a qu'un nombre fini de types topologiques pour ξ_0 dans $\mathcal{H}_\pi$.

Nous utilisons des techniques de base développées en [2] pour les connexions multiples de selles tridimensionnelles. Néanmoins, il y a difficultés ajoutées dûes à la nature globale du problème.

La classe $\mathcal{H}_\pi$. Elle est définie par trois conditions de généricité : (A) Hyperbolicité ; (B) Non retour ; (C) Absence de connexions non-rigides de selles. L'hyperbolicité veut dire que chaque composante irréductible du diviseur D est invariante et que tous les points singuliers de $\mathcal{L}$ sont hyperboliques ; on les appelle *attracteurs-repulseurs* ou *selles*, selon que les parties réelles des trois valeurs propres aient le même signe ou pas. Cette condition est une variante en dimension trois des courbes généralisées introduites en [3]. La condition de non-retour signifie qu'il n'y a pas de cycles invariants sur les diviseurs, ni de cycles orientés formés par des trajectoires et des points limites. Les connexions non-rigides de selles sont, d'abord, les connexions de selles bi-dimensionnelles pour $\mathcal{L}|_{D_i}$ dans une composante D_i de D qui ne sont pas guidées par le squelette $\mathcal{K} = \bigcup_{i \neq j} D_i \cap D_j$. Les *connexions infinitésimales de selles*, qui seront introduites ensuite, sont aussi considérées non-rigides.

Notons $\mathcal{H}_\pi^*$ la classe de champs ξ_0 satisfaisant à toutes ces conditions sauf peut être à la condition d'absence de connexions infinitésimales.

Le lieu critique. Soit $\xi_o \in \mathcal{H}_\pi^*$. Le lieu critique $\mathcal{C}(\xi_0)$ est formé des singularités $\operatorname{Sing}\mathcal{L}$ et des lignes critiques orientées. Ces dernières sont contenues dans D et peuvent être *pseudo-squelettiques* ou *internes*. On peut élargir D en rajoutant le germe en P de la variété propre (stable ou instable) de dimension deux, pour toute selle squelettique P telle que cette variété soit transverse à D. On obtient ainsi un autre diviseur D^* de squelette $\mathcal{K}^*$. Les composantes connexes de $\mathcal{K}^* \setminus \operatorname{Sing}\mathcal{L}$ sont les lignes pseudo-squelettiques. Les coins de D^* sont les *pseudo-coins*. Les lignes internes sont données par des variétés propres de dimension un, ou par l'intersection transverse avec le diviseur d'une variété propre de dimension deux associée à une selle non squelettique.

Le type d'isomorphie du lieu critique (en préservant la nature de ses éléments) est invariant par π-équivalence. Dorénavant nous travaillerons *à lieu critique fixe*, c'est à dire, dans la classe $\mathcal{H}_\pi^*(\mathcal{C})$ des champs $\xi_o \in \mathcal{H}_\pi^*$ tels que $\mathcal{C}(\xi_0) = \mathcal{C}$.

Chemins et connexions infinitésimales. Notons Λ l'ensemble de selles qui sont des pseudo-coins et soit $\mathcal{S}$ la réunion de Λ et des lignes pseudo-squelettiques qui adhèrent à Λ. Considérons $P \in \Lambda$ et soit $U \supset \mathcal{S}$ un ouvert suffissamment petit. Prennons une courbe $\gamma : (-1, 0) \to U \setminus D^*$ aboutissant en un point $\gamma(0) \notin \mathcal{K}^*$ placé sur la variété propre de dimension deux de P. Soit Δ l'adhérence du saturé par le flot en U de l'image de γ. L'intersection de Δ avec $\mathcal{K}^*$ nous donne un chemin orienté $\operatorname{Chm}(P; \gamma)$ de deux types possibles

$$\operatorname{Chm}(P; \gamma) = \{P = P_0, \Gamma_1, P_1, \ldots, \Gamma_k\}; \quad \operatorname{Chm}(P; \gamma) = \{P = P_0, \Gamma_1, P_1, \ldots, \Gamma_k, P_k\}$$

où les Γ_i sont des lignes pseudo-squelettiques qui ont comme bouts P_{i-1} et P_i (lorsqu'ils existent) et $P_i \in \Lambda$. Dans le second cas, nous dirons que les selles P_0 et P_k sont *infinitésimalement connectées* (voir [1] pour un premier exemple de l'influence de ces connexions).

Proposition 1. *[2] Les chemins* $\operatorname{Chm}(P; \gamma)$ *ne dépendent que des valeurs propres présentes en les points singuliers et de l'octant de* D^* *en* P *qui contient* γ.

La dépendence ci-dessus des valeurs propres est algébrique et donc l'absence de connexions infinitésimales est une condition Zariski-ouverte. Ceci complète la définition de la classe $\mathcal{H}_\pi$ et aussi $\mathcal{H}_\pi(\mathcal{C}) = \mathcal{H}_\pi^*(\mathcal{C}) \cap \mathcal{H}_\pi$.

Soit $CH_{\xi_0}(P)$ l'ensemble des huit chemins de P. Le résultat principal de cette note est le suivant

Théorème 2. *Deux champs de vecteurs* $\xi_0, \xi_0' \in \mathcal{H}_\pi(\mathcal{C})$ *sont* π*-topologiquement équivalents si et seulement si les ensembles de chemins* $CH_{\xi_0}(P)$ *et* $CH_{\xi_0'}(P)$ *sont égaux pour chaque* $P \in \Lambda$.

Lorsque le nombre de points singuliers de $\mathcal{L}$ est fixé, il n'y a qu'un nombre fini de lieux critiques possibles non isomorphes et donc de configurations de chemins. D'où la finitude de l'ensemble de types d'équivalence topologique pour les champs $\xi_0 \in \mathcal{H}_\pi$, pourvu que l'on borne, par exemple, le nombre de Milnor.

Dans la suite nous donnons les lignes principales de la preuve de ce théorème.

Réductions du problème. La condition sur les chemins est évidemment nécessaire. Établissons la réciproque. Même si l'on n'a pas l'hypothèse sur les chemins, on peut donner un homéomorphisme $h_D : D \to D$ qui soit une équivalence topologique entre $\xi_0|_D$ et $\xi_0'|_D$. Notre objectif est celui d'étendre h_D a des voisinages bien choisis de D. Ceci n'est pas possible (pour tout h_D) s'il y a des connexions infinitésimales [2]. Maintenant nous travaillons par *zones basiques*, où une zone basique Z est l'adhérence d'une composante connexe de $M \setminus D$.

Voisinages normalisés. Le pas suivant est la réduction à un *voisinage normalisé* N_Z du support $|\mathcal{C}|_Z$ du lieu critique en Z. Un voisinage normalisé N de $|\mathcal{C}|$ est une réunion de *boules, cylindres et tubes* dont les intérieurs ne se coupent pas. Les boules sont des voisinages des atracteurs ou répulseurs, la fonction distance à l'origine étant transverse au feuilletage. Les cylindres sont centrés en des selles, la distance à l'axe étant transverse au feuilletage, ainsi que les disques de sa fibration naturelle, sauf le disque central : l'axe et le disque central sont les variétés stables ou instables de dimensions un et deux respectivement. Les tubes sont autour des lignes critiques Γ, leur fibration en disques est transverse au feuilletage et l'on fixe un disque central Ω_Γ. Les composantes connexes de l'extérieur de N ont une dynamique simple : celle d'une translation horizontale sur $[0,1]^3$. La partie transverse $\{0,1\} \times [0,1]^2$ de la frontière correspond à des *portes* dans la frontière des boules et cylindres. Un homéomorphisme h_{Δ_0} dans une porte Δ_0 détermine par le flot un autre h_{Δ_1} dans la porte opposée Δ_1. (L'argument n'est guère plus fin, on a à raffiner N, mais tout en suivant les mêmes idées générales). Maintenant, nous choisissons des homéomorphismes de départ en respectant ces conditions de compatibilité. Il s'agît donc de prouver le résultat suivant

Proposition 3. *Étant donnés des homéomorphismes h_Δ dans chaque porte Δ, compatibles avec h_D, il existe un homéomorphisme $h_Z : V \to V'$ qui étend h_D et les h_Δ et donne une équivalence topologique entre $\mathcal{L}|_V$ et $\mathcal{L}'|_{V'}$, où V et V' sont respectivement des voisinages de $|\mathcal{C}|_Z$ dans N_Z, N_Z'.*

Structure de l'induction. Nous travaillons par récurrence sur le nombre de points singuliers de $\mathcal{L}$ dans l'espace germifié $E = (N_Z, |\mathcal{C}|_Z)$. Vu qu'il n'y a pas de retour, l'ensemble des points singuliers admet un ordre partiel donné par l'orientation des lignes critiques. Prennons un point maximal P_1 pour cet ordre et « coupons » l'espace E en deux morceaux E' et E_1, le dernier avec seul point singulier P_1. Nous ne pouvons pourtant pas appliquer directement induction sur E', E_1, car le fait de recoller les deux parties implique le besoin de respecter certaines compatibilités non directement contemplées dans l'énoncé de la Proposition 3. C'est pour cela qu'il faut enrichir les données de départ sur E pour avoir un énoncé « stable par l'induction ».

Structure enrichie sur le pseudo-squelette. Les données de h_D et des homéomorphismes h_Δ induissent certaines structures sur les lignes pseudo-squelettiques. Dans le cas des portes Δ, nous considérons le saturé $\mathrm{Sat}(\Delta)$ par le flot. Si Γ est une ligne quasi-squelettique dans l'adhérence de $\mathrm{Sat}(\Delta)$, l'intersection $\Omega_\Gamma \cap \mathrm{Sat}(\Delta)$ a la forme d'une « larme » sur laquelle h_Δ induit l'homéomorphisme $h_{\Delta,\Gamma}$. Notons que Γ appartient au chemin du point P associé à la porte Δ. En fait $h_{\Delta,\Gamma}$ a une propriété additionnelle que nous détaillerons ensuite ; de même, la restriction de h_D à la variété propre de dimension deux donne une structure infinitesimale sur Ω_Γ. Pour expliquer cela il nous faut introduire des *poids* sur les lignes pseudo-squelettiques. Supposons que $\mathcal{L}$ est donné en P par un champ dont la partie linéaire s'écrit

$$L\xi = \lambda x \frac{\partial}{\partial x} + \mu y \frac{\partial}{\partial y} + \delta z \frac{\partial}{\partial z}$$

avec $\lambda\mu\delta < 0$ et $\mu\delta > 0$ dans l'octant $x, y, z \geqslant 0$. Le poids intrinsèque de P est δ/μ (quitte à tenir compte de l'ordre entre y, z, point sur lequel nous n'insisterons pas). Le saturé de la courbe $x = 1, z = y^{\delta/\mu}$ sort du pseudo-squelette sur la variété propre $x = 0$. Si nous considérons maintenant une courbe $x = 1, z = y^\rho$ avec $\rho > \delta/\mu$, son saturé passe par la ligne pseudo-squelettique $\Gamma' = \{x = z = 0\}$ et donne la courbe $y = 1, z = x^{\rho'}$, où $\rho' = (\delta - \mu\rho)/\lambda$. On a la même situation lorsque $\rho < \delta/\mu$. En faisant l'operation à l'envers nous avons une *transition de poids* entre les lignes pseudo-squelettiques, qui induit des *chemins à poids* sur le pseudo-squelette. Le chemin de P coïncide avec celui qui commence par la variété propre de dimension un avec son poids intrinsèque.

Soit $\pi_\rho : [0,1]^2 \to \mathbb{D}_{++}$ l'éclatement à poids du premier quadrant : $\pi_\rho(r,t) = (r \cos \pi t/2, r^\rho \sin \pi t/2)$. Si ρ est le poids de Γ dans le chemin de P, la propriété annoncée de $h_{\Delta,\Gamma}$ est qu'il se relève par π_ρ. De la même manière, la restriction de h_D à la variété propre de dimension deux de P donne, grâce à π_ρ, un relèvement sur $\{0\} \times [0,1]$; nous appelons *semence* cette structure infinitésimale. Les semences et les larmes transiten avec les poids et on peut imaginer un tel système cohérent qui enrichit celui induit par les homéomorphismes sur les portes et h_D. C'est ce qui arrive en E', E_1 lorsque l'on fait le pas de la récurrence.

L'amorce de la récurrence. Une fois établi ce système enrichi de larmes et semences attachées à des poids sur les lignes pseudo-squelettiques, la dificulté principale se concentre à l'étape initiale de l'induction, c'est à dire, lorsqu'il n'y a qu'un seul point singulier P. Dans ce cas nous pouvons lire tous les élements sur la transversale $\Omega = \mathbb{D}_{++}$ à la variété propre de dimension un. Nous y aurons une liste ordonnée de poids $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_k$, qui contient en particulier le poids intrinsèque de P. Attachées à chaque poids ρ_i il y aura une semence σ_i et une liste de ρ_i-homéos $h_{i,j}$ (se relèvant par π_{ρ_i}) entre larmes disjointes.

Théorème 4. *Il existe un homéomorphisme $h : \Omega \to \Omega$ qui se relève par chaque π_{ρ_i} et qui induit les semences σ_i et les homéos $h_{i,j}$.*

Ce résultat est une extension d'un énoncé similaire en [2]. Comme h respecte le poids intrinsèque de P, il s'étend en une équivalence topologique entre $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ définie en des voisinages de P, de plus toutes les structures sont respectées par construction.

Références

[1] C. Alonso-González, Topological classification for chains of saddle connections, J. Differential Equations 208 (2005) 275–291.

[2] C. Alonso-González, M.I. Camacho, F. Cano, Topological equivalence for multiple saddle connections, Discrete and Continuous Dynamical Systems, in press.

[3] C. Camacho, A. Lins Neto, P. Sad, Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields, J. Differential Geom. 20 (1) (1984) 143–174.

[4] C. Camacho, F. Cano, P. Sad, Desingularization of absolutely isolated singularities of vector fields, Invent. Math. 98 (1989) 351–369.

[5] H. Hironaka, Stratification and flatness, in: Nordic Summer School NAVF, Symposium in Mathematics, Oslo, August 5–25, 1976.