Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 831–836
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Équations aux dérivées partielles

Existence et unicité pour un fluide inhomogène

Hammadi Abidi

Laboratoire Jacques-Louis Lions, université Pierre et Marie Curie, boîte courrier 187, 75252 Paris cedex 05, France

Reçu le 28 février 2006 ; accepté le 30 mars 2006

Disponible sur Internet le 3 mai 2006

Présenté par Yves Meyer

Résumé

Récemment R. Danchin a montré l'existence et l'unicité de solutions pour un fluide inhomogène dans l'espace de Besov homogène $\dot{B}^{\frac{N}{2}}_{2\,1}(\mathbb{R}^N)\times\dot{B}^{-1+\frac{N}{2}}_{2\,1}(\mathbb{R}^N)$ sous une condition de petitesse de ρ_0-1 dans l'espace $\dot{B}^{\frac{N}{2}}_{2\,\infty}\cap L^\infty$ lorsque $2<N$ et $\dot{B}^{1}_{2\,1}$ si $N=2$. Dans cette Note, on prouve que la condition $\|\rho_0-1\|_{L^\infty}\ll 1$ est suffisante pour avoir l'existence et l'unicité. ***Pour citer cet article : H. Abidi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abstract

Existence and uniqueness for an inhomogenous fluid. Recently R. Danchin showed the existence and uniqueness for an inhomogenous fluid in the homogeneous Besov space $\dot{B}^{\frac{N}{2}}_{2\,1}(\mathbb{R}^N)\times\dot{B}^{-1+\frac{N}{2}}_{2\,1}(\mathbb{R}^N)$, under the condition that ρ_0-1 is small in $\dot{B}^{\frac{N}{2}}_{2\,\infty}\cap L^\infty$ if $2<N$, in $\dot{B}^{\frac{N}{2}}_{2\,1}$ if $N=2$. In this Note, one shows that the condition $\|\rho_0-1\|_{L^\infty}\ll 1$ is sufficient to have the existence and uniqueness. ***To cite this article: H. Abidi, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

© 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.

Abridged English version

In this Note, we are interested in the following system:

$$(\mathrm{INS})\begin{cases}\partial_t\rho+\operatorname{div}(\rho u)=0,\\ \partial_t(\rho u)+\operatorname{div}(\rho u\otimes u)-\mu\Delta u+\nabla\Pi=\rho f,\\ \operatorname{div}u=0,\\ (\rho,u)_{|t=0}=(\rho_0,u_0),\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad(\widetilde{\mathrm{INS}})\begin{cases}\partial_t a+u\cdot\nabla a=0,\\ \partial_t u+u\cdot\nabla u+(1+a)\{\nabla\Pi-\mu\Delta u\}=f,\\ \operatorname{div}u=0,\\ (a,u)_{|t=0}=(a_0,u_0).\end{cases}$$

The latter system is obtained from the former via the change of variable $a=\rho^{-1}-1$, which is valid when $\inf_x\rho(0,x)>0$.

Before we present our theorem, let us recall the work by R. Danchin concerning strong solutions in critical spaces [4]. He showed the existence and uniqueness in the homogeneous Besov space $\dot{B}^{\frac{N}{2}}_{2\,1}(\mathbb{R}^N)\times\dot{B}^{-1+\frac{N}{2}}_{2\,1}(\mathbb{R}^N)$

Adresse e-mail : abidi@ann.jussieu.fr (H. Abidi).

1631-073X/$ – see front matter © 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2006.04.004

when a_0 is small in $\dot{B}^{\frac{N}{2}}_{2\infty} \cap L^\infty$ for $N > 2$, and in $\dot{B}^1_{21}$ if $N = 2$. This result was extended in [1] to the case with variable viscosity with data in the space $\dot{B}^{\frac{N}{p}}_{p1}(\mathbb{R}^N) \times \dot{B}^{-1+\frac{N}{p}}_{p1}(\mathbb{R}^N)$. In particular, under the assumption $\|a_0\|_{\dot{B}^{\frac{N}{p}}_{p1}} \ll 1$, the existence was shown for $1 < p < 2N$ and uniqueness for $1 < p \leqslant N$.

The goal of this Note is to further improve these conditions. In particular, we want to show that if $\|a_0\|_{L^\infty} \ll 1$, then we get the existence for $1 < p < 2N$ and uniqueness for $1 < p \leqslant N$ in the inhomogeneous Besov space $B^{\frac{N}{p}}_{p1}(\mathbb{R}^N) \times B^{-1+\frac{N}{p}}_{p1}(\mathbb{R}^N)$. The proof of these assertions is strongly related to the following inequality based on Bony's decomposition:

$$\|vu\|_{B^s_{pr}} \lesssim \|v\|_{B^s_{pr}} \begin{cases} \|u\|_{L^\infty} + \|u\|_{L^\infty}^{1-\max(0,s)\frac{p}{N}} \|u\|_{B^{\frac{N}{p}}_{p\infty}}^{\max(0,s)\frac{p}{N}} + \|u\|_{L^\infty}^{\lambda(s,N,p)} \|u\|_{B^{\frac{N}{p}}_{p\infty}}^{1-\lambda(s,N,p)} & \text{if } s \neq 0, \\ \|u\|_{L^\infty} \ln\big(\mathrm{e} + \|u\|_{B^{\frac{N}{p}}_{p\infty}} \|u\|_{L^\infty}^{-1}\big) & \text{if } s = 0, \end{cases}$$

when $s + N\inf(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}) > 0$, with $\lambda(s, N, p) = \frac{s+N\inf(\frac{1}{p},\frac{1}{p'})}{|s|+s+N\inf(\frac{1}{p},\frac{1}{p'})}$ and $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Applying this inequality to $a\nabla\Pi$ and $a\Delta u$, the estimates can be manipulated so as to eliminate the perturbation terms. Indeed, the proof follows the idea developed in [4]. For the existence part, the proof is carried out in three stages: the first consists in solving an approximate problem; then, in showing that the solution to the approximate problem is uniformly bounded; and finally in demonstrating that the solutions to the approximate problems converge to the solution of the original one. Uniqueness follows from Osgood theorem. The condition $1 < p \leqslant N$ is strongly related to the transport equation, since the uniqueness for such an equation is obtained when one estimates the difference in a less regular space.

1. Introduction

Dans cette Note, on s'intéresse au système suivant :

$$(\text{INS}) \begin{cases} \partial_t\rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) - \mu\Delta u + \nabla\Pi = \rho f, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ (\rho, u)_{|t=0} = (\rho_0, u_0), \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad (\widetilde{\text{INS}}) \begin{cases} \partial_t a + u\cdot\nabla a = 0, \\ \partial_t u + u\cdot\nabla u + (1+a)\{\nabla\Pi - \mu\Delta u\} = f, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ (a, u)_{|t=0} = (a_0, u_0). \end{cases}$$

Le deuxième système est obtenu à partir du premier via le changement d'inconnue $a = \rho^{-1} - 1$, qui est valable dès que $\inf_x \rho(0, x) > 0$. Avant de présenter notre théorème rappelons que R. Danchin [4] a démontré l'existence et l'unicité dans l'espace de Besov homogène $\dot{B}^{\frac{N}{2}}_{21}(\mathbb{R}^N) \times \dot{B}^{-1+\frac{N}{2}}_{21}(\mathbb{R}^N)$ lorsque a_0 est petite dans $\dot{B}^{\frac{N}{2}}_{2\infty} \cap L^\infty$ si $2 < N$ et dans $\dot{B}^1_{21}$ si $N = 2$. Nous mentionnons à ce propos que nous avons étendu dans [1] ces résultats pour les espaces de Besov construits sur L^p : dans ce travail, nous avons généralisé les résultats de [4] pour un modèle à viscosité variable dans l'espace $\dot{B}^{\frac{N}{p}}_{p1}(\mathbb{R}^N) \times \dot{B}^{-1+\frac{N}{p}}_{p1}(\mathbb{R}^N)$. Plus exactement, sous l'hypothèse $\|a_0\|_{\dot{B}^{\frac{N}{p}}_{p1}} \ll 1$, l'existence est démontrée pour $1 < p < 2N$ alors que l'unicité est établie pour $1 < p \leqslant N$.

Le résultat principal de cette Note est le suivant :

Théorème 1.1. *Soient* $1 < p < 2N$, $a_0 \in B^{\frac{N}{p}}_{p1}(\mathbb{R}^N)$, $u_0 \in B^{\frac{N}{p}-1}_{p1}(\mathbb{R}^N)$ *avec* $\operatorname{div} u_0 = 0$ *et* f *appartenant à* $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; B^{\frac{N}{p}-1}_{p1}(\mathbb{R}^N))$ *tel que* $\mathcal{Q}f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; B^{\frac{N}{p}-2}_{p1}(\mathbb{R}^N))$. *Il existe une constante positive c dépendant de N et p telle que si*

$$\|a_0\|_{L^\infty} \leqslant c,$$

alors il existe un $T \in (0, +\infty]$ *tel que le système* $(\widetilde{INS})$ *admette une solution* $(a, u, \nabla\Pi)$ *vérifiant*

$$a \in C_b\big([0,T]; B^{\frac{N}{p}}_{p1}\big), \quad u \in C_b\big([0,T]; B^{\frac{N}{p}-1}_{p1}\big) \cap L^1\big(0,T; B^{\frac{N}{p}+1}_{p1}\big) \quad \text{et} \quad \nabla\Pi \in L^1\big(0,T; B^{\frac{N}{p}-1}_{p1}\big).$$

De plus cette solution est unique lorsque $1 < p < N$ *et* $N \geqslant 3$. *Dans le cas limite, c'est-à-dire,* $N = p$ *ou* $N = 2$, *on a unicité sur* $[0, T_0]$, *avec* $T_0 \leqslant T$ *lorsque* $\|a_0\|_{L^\infty} \leqslant c(a_0)$.

Ci-dessus, $\mathcal{Q}$ désigne le projection sur les champs de type gradient, et l'espace de Besov inhomogène $B^s_{p\,r}$ est défini comme suit :

Tout d'abord on présente les bases de la la théorie de Littlewood–Paley (voir par exemple [3]) pour caractériser les espaces de Besov. Pour cela on fixe $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $\operatorname{supp}\phi \subset C(0, 3/4, 8/3)$ avec

$$\sum_{q\in\mathbb{Z}} \phi\big(2^{-q}\xi\big) = 1 \quad \forall \xi \neq 0 \quad \text{et} \quad \varphi(\xi) = 1 - \sum_{q\in\mathbb{N}} \phi\big(2^{-q}\xi\big).$$

Définition 1.2. On note Δ_q et S_q les opérateurs suivants

$$\begin{aligned}
&\Delta_q u = 0, \quad q \leqslant -2, \qquad \Delta_{-1} u = \chi(D)u,\\
&\Delta_q u = \varphi\big(2^{-q}D\big)u \quad \forall q \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad S_q u = \chi\big(2^{-q}D\big)u = \sum_{-1\leqslant p\leqslant q-1} \Delta_p u.
\end{aligned}$$

Soient $(p, r, \rho) \in [1, \infty]^3$, $T > 0$ et $s \in \mathbb{R}$. On désigne par $B^s_{p\,r}(\mathbb{R}^N)$ (resp. $\tilde{L}^\rho_T(B^s_{p\,r}(\mathbb{R}^N))$) l'ensemble des fonctions $u \in \mathrm{S}'(\mathbb{R}^N)$ (resp. $u \in \mathrm{S}'((0, T) \times \mathbb{R}^N)$) telles que

$$\|u\|_{B^s_{pr}} \overset{\text{déf}}{=} \bigg(\sum_{q\geqslant -1} 2^{qrs} \|\Delta_q u\|^r_{L^p}\bigg)^{\frac{1}{r}} < \infty \quad \Big(\text{resp. } \|u\|_{\tilde{L}^\rho_T(B^s_{pr})} \overset{\text{déf}}{=} \bigg(\sum_{q\geqslant -1} 2^{qrs} \|\Delta_q u\|^r_{L^\rho_T(L^p)}\bigg)^{\frac{1}{r}} < \infty\Big).$$

2. Démonstration

La démonstration suit dans ses grands traits les idées développées dans [4]. L'amélioration sur la condition de petitesse est fortement liée au résultat ci-après que l'on applique aux termes $a\nabla\Pi$ et $a\Delta u$. Ainsi nous parvenons à absorber ces termes de perturbation et boucler les estimations.

Lemme 2.1. *Soient* $s < \frac{N}{p}$, $(p, r) \in [1, \infty]^2$ *tels que* $s + N\inf(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}) > 0$. *On se donne* $u \in B^{\frac{N}{p}}_{p\infty} \cap L^\infty$ *et* $v \in B^s_{p\,r}$, *on note* $\lambda(s, N, p) = \frac{s+N\inf(\frac{1}{p},\frac{1}{p'})}{|s|+s+N\inf(\frac{1}{p},\frac{1}{p'})}$, *alors*

$$\|vu\|_{B^s_{pr}} \lesssim \|v\|_{B^s_{pr}} \begin{cases} \|u\|_{L^\infty} + \|u\|_{L^\infty}^{1-\max(0,s)\frac{p}{N}} \|u\|_{B^{\frac{N}{p}}_{p\infty}}^{\max(0,s)\frac{p}{N}} + \|u\|_{L^\infty}^{\lambda(s,N,p)} \|u\|_{B^{\frac{N}{p}}_{p\infty}}^{1-\lambda(s,N,p)} & \text{si } s \neq 0,\\ \|u\|_{L^\infty} \ln\big(\mathrm{e} + \|u\|_{B^{\frac{N}{p}}_{p\infty}} \|u\|^{-1}_{L^\infty}\big) & \text{si } s = 0. \end{cases}$$

Preuve. La démonstration du lemme est basée sur la décomposition de J.-M. Bony (voir [2])

$$uv = T_u v + T_v u + R(u, v),$$

avec

$$T_u v \overset{\text{déf}}{=} \sum_{q\in\mathbb{Z}} S_{q-1}u\, \Delta_q v \quad \text{et} \quad R(u, v) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{q\in\mathbb{Z}} \Delta_q u \tilde{\Delta}_q v \quad \text{où } \tilde{\Delta}_q = \sum_{i=-1}^{1} \Delta_{q+i}.$$

Pour majorer le premier terme de la décomposition, on écrit $\|T_u v\|_{B^s_{pr}} \lesssim \|u\|_{L^\infty}\|v\|_{B^s_{pr}}$.

Par définition de l'opérateur $T_v u$ et grâce à la propriété de presque orthogonalité, on a

$$\big\|\Delta_k(T_v u)\big\|_{L^p} \leqslant \sum_{|k-q|\leqslant 4} \big\|\Delta_k(\Delta_q u S_{q-1} v)\big\|_{L^p}.$$

Si $s < 0$, on trouve par définition de l'opérateur S_{q-1}, $\|T_v u\|_{B^s_{pr}} \lesssim \|u\|_{L^\infty}\|v\|_{B^s_{pr}}$.

Maintenant si $s \geqslant 0$, on se donne un entier M qui sera judicieusement choisi à la fin par un argument d'optimisation. Un simple calcul donne

$$\big\|\Delta_k(\Delta_q u S_{q-1}v)\big\|_{L^p} \lesssim \|\Delta_q u\|_{L^p} \sum_{q'-q\leqslant -M} \|\Delta_{q'}v\|_{L^\infty} + \|\Delta_q u\|_{L^\infty} \sum_{-M+1\leqslant q'-q\leqslant -2} \|\Delta_{q'}v\|_{L^p}.$$

Pour la première partie l'inégalité de Bernstein implique que

$$\sum_{q'-q\leqslant -M} \|\Delta_{q'}v\|_{L^\infty} \lesssim 2^{q(\frac{N}{p}-s)} \sum_{q'-q\leqslant -M} 2^{(q'-q)(\frac{N}{p}-s)} 2^{q's}\|\Delta_{q'}v\|_{L^p}.$$

Ainsi pour $0 \leqslant s < \frac{N}{p}$, on trouve

$$\|T_v u\|_{B^s_{pr}} \lesssim \|v\|_{B^s_{pr}} \big(2^{-M(\frac{N}{p}-s)}\|u\|_{B^{\frac{N}{p}}_{p\infty}} + \max\big(2^{Ms}, M\big)\|u\|_{L^\infty}\big).$$

Donc pour $s < \frac{N}{p}$ et $M = \frac{p}{N}\log_2(\|u\|_{B^{\frac{N}{p}}_{p\infty}}\|u\|^{-1}_{L^\infty})$ si $s \neq 0$, (resp. $M = 1 + \frac{p}{N}\log_2(\|u\|_{B^{\frac{N}{p}}_{p\infty}}\|u\|^{-1}_{L^\infty})$ si $s = 0$)

$$\|T_v u\|_{B^s_{pr}} \lesssim \|v\|_{B^s_{pr}} \begin{cases} \|u\|_{L^\infty}^{1-\max(0,s)\frac{p}{N}} \|u\|_{B^{\frac{N}{p}}_{p\infty}}^{\max(0,s)\frac{p}{N}} & \text{si } s \neq 0,\\ \|u\|_{L^\infty} \ln\big(e + \|u\|_{B^{\frac{N}{p}}_{p\infty}}\|u\|^{-1}_{L^\infty}\big) & \text{si } s = 0. \end{cases}$$

Pour le reste $R(u, v)$, on écrit $\Delta_k R(v, u) = \sum_{k-q\leqslant 3} \Delta_k(\tilde{\Delta}_q u \Delta_q v)$. Soit M un entier, alors

$$2^{ks}\big\|\Delta_k R(u, v)\big\|_{L^p} \lesssim \sum_{-M\leqslant k-q\leqslant 3} 2^{s(k-q)}\|\tilde{\Delta}_q u\|_{L^\infty} 2^{qs}\|\Delta_q v\|_{L^p} + \sum_{k-q\leqslant -1-M} 2^{ks}\big\|\Delta_k(\tilde{\Delta}_q u\Delta_q v)\big\|_{L^p}.$$

Le premier terme du membre de droite est majoré par, $\max(2^{M|s|}, M)\|u\|_{L^\infty}\|v\|_{B^s_{pr}}\alpha_k$ avec $\alpha_k \in \ell^r(\mathbb{Z})$. Par contre pour le deuxième terme il y a deux cas à traiter $p \leqslant 2$ ou $p \geqslant 2$. Si $p \leqslant 2$, alors $p \leqslant 2 \leqslant p'$, et par suite les inégalités de Bernstein et Hölder impliquent

$$\begin{aligned} \sum_{k-q\leqslant -1-M} 2^{ks}\big\|\Delta_k(\tilde{\Delta}_q u\Delta_q v)\big\|_{L^p} &\lesssim \sum_{k-q\leqslant -1-M} 2^{k(s+N-\frac{N}{p})}\|\tilde{\Delta}_q u\Delta_q v\|_{L^1}\\ &\lesssim \sum_{k-q\leqslant -1-M} 2^{(k-q)(s+\frac{N}{p'})}2^{q\frac{N}{p}}\|\tilde{\Delta}_q u\|_{L^p}2^{qs}\|\Delta_q v\|_{L^p} \leqslant 2^{-M(s+\frac{N}{p'})}\beta_k\|u\|_{B^{\frac{N}{p}}_{p\infty}}\|v\|_{B^s_{pr}} \quad \text{avec } \beta_k \in \ell^r(\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Maintenant si $p > 2$, de nouveau les inégalités de Bernstein et de Hölder donnent

$$\begin{aligned} \sum_{k-q\leqslant -1-M} 2^{ks}\big\|\Delta_k(\tilde{\Delta}_q u\Delta_q v)\big\|_{L^p} &\lesssim \sum_{k-q\leqslant -1-M} 2^{(k-q)(s+\frac{N}{p})}2^{q\frac{N}{p}}\|\tilde{\Delta}_q u\|_{L^p}2^{qs}\|\Delta_q v\|_{L^p}\\ &\leqslant 2^{-M(s+\frac{N}{p})}\gamma_k\|u\|_{B^{\frac{N}{p}}_{p\infty}}\|v\|_{B^s_{pr}} \quad \text{avec } \gamma_k \in \ell^r(\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Donc pour $s + N\inf(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'}) > 0$, on trouve après un choix convenable de M

$$\big\|R(v, u)\big\|_{B^s_{pr}} \lesssim \|v\|_{B^s_{pr}} \begin{cases} \|u\|_{L^\infty}^{\frac{s+N\inf(\frac{1}{p},\frac{1}{p'})}{|s|+s+N\inf(\frac{1}{p},\frac{1}{p'})}} \|u\|_{B^{\frac{N}{p}}_{p\infty}}^{\frac{|s|}{|s|+s+N\inf(\frac{1}{p},\frac{1}{p'})}} & \text{si } s \neq 0,\\ \|u\|_{L^\infty}\ln\big(e + \|u\|_{B^{\frac{N}{p}}_{p\infty}}\|u\|^{-1}_{L^\infty}\big) & \text{si } s = 0. \end{cases}$$

D'où le lemme. □

Revenons à la démonstration du Théorème 1.1. La démonstration du théorème s'effectue en trois étapes. La première consiste à résoudre un problème approché. On régularise les données initiales $a_0^n \in H^{s_0+1}$, $u_0^n \in H^{s_0}$ et

$f^n \in \tilde{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H^{s_0})$ avec $s_0 > N$ grand. Par suite d'après le Théorème 1.2 [1] le système $(\widetilde{INS})$ avec données (a^n_0, u^n_0, f^n) admet une solution locale unique $(a^n, u^n, \nabla\Pi^n)$ telle que $a^n \in C([0,T^n); H^{s_0+1})$ $u^n \in C([0,T^n); H^{s_0})$ et $\nabla\Pi^n \in \tilde{L}^1_{T^n}(H^{s_0})$. La deuxième étape consiste à démontrer que la solution du problème approché est uniformément bornée, c'est-à-dire, que l'on va montrer que l'on peut choisir $T > 0$ tel que $(a^n, u^n, \nabla\Pi^n)$ appartienne à et soit uniformément bornée dans

$$E_T = \tilde{L}^\infty_T\big(B^{\frac{N}{p}}_{p1}\big) \times L^1_T\big(B^{\frac{N}{p}+1}_{p1}\big) \cap \tilde{L}^\infty_T\big(B^{\frac{N}{p}-1}_{p1}\big) \times L^1_T\big(B^{\frac{N}{p}-1}_{p1}\big).$$

L'appartenance est une conséquence de l'injection de Sobolev et l'inégalité de Bernstein (pour plus de détails voir [1]). Pour montrer que la suite est uniformément bornée, on décompose $(u^n, \nabla\Pi^n)$ sous la forme suivante $u^n = u^n_L + \bar{u}^n$ et $\nabla\Pi^n = \nabla\Pi^n_L + \nabla\overline{\Pi}^n$. On obtient les systèmes suivants

$$\text{(L)} \quad \begin{cases} \partial_t u^n_L - \mu\Delta u^n_L + \nabla\Pi^n_L = f^n, \\ \operatorname{div} u^n_L = 0, \\ u^n_{L|t=0} = u^n_0, \end{cases} \qquad \text{(NL)} \quad \begin{cases} \partial_t a^n + u^n\cdot\nabla a^n = 0, \\ \partial_t \bar{u}^n + u^n\cdot\nabla\bar{u}^n - \mu\Delta\bar{u}^n + \nabla\overline{\Pi}^n = H\big(a^n, u^n, \Pi^n\big), \\ \operatorname{div}\bar{u}^n = 0, \\ \bar{u}^n_{|t=0} = 0, \end{cases}$$

avec $H(a^n, u^n, \Pi^n) = -u^n\cdot\nabla u^n_L + a^n(\mu\Delta u^n - \nabla\Pi^n)$. D'après la Proposition 2.3 [5], on a $(u^n_L, \nabla\Pi^n_L) \in L^\infty_T(B^{\frac{N}{p}-1}_{p1} \cap H^{s_0}) \times \tilde{L}^1_T(B^{\frac{N}{p}-1}_{p1} \cap H^{s_0})$ uniformément en n et de plus $u^n_L \in \tilde{L}^1_T(B^{\frac{N}{p}+1}_{p1} \cap H^{s_0+1})$ pour tout $T > 0$. D'autre part $(a^n, \bar{u}^n, \nabla\overline{\Pi}^n) \in C([0,T^n);\ H^{s_0+1}) \times C([0,T^n);\ H^{s_0}) \times \tilde{L}^1_{T^n}(H^{s_0})$. Il est connu que le temps d'existence de (NL) est contrôlé par celui de la partie libre. On fixe ζ un réel strictement positif petit, puis $T_1 > 0$ tel que

$$\|u^n_L\|_{L^1_{T_1}(B^{\frac{N}{p}+1}_{p1})} + \|\nabla\Pi^n_L\|_{L^1_{T_1}(B^{\frac{N}{p}-1}_{p1})} \leqslant \zeta \quad \text{et} \quad \|u^n_L\|_{\tilde{L}^\infty_{T_1}(B^{\frac{N}{p}-1}_{p1})} \lesssim U_0 \overset{\text{déf}}{=} \|u_0\|_{B^{\frac{N}{p}-1}_{p1}} + \|f\|_{L^1_{T_1}(B^{\frac{N}{p}-1}_{p1})}.$$

Dans les Propositions 3.2 et 3.3 [1], on a des estimations de la solution de l'équation de transport et du système de Stokes non stationnaire dans les espaces de Besov homogènes, qui restent encore valables dans les espaces de Besov inhomogènes modulo un terme de multiplication par e^t pour le système de Stokes qui est lié aux basses fréquences. En notant

$$U^n(t) \overset{\text{déf}}{=} \|\bar{u}^n\|_{\tilde{L}^\infty_t(B^{\frac{N}{p}-1}_{p1})} + \mu\|\bar{u}^n\|_{L^1_t(B^{\frac{N}{p}+1}_{p1})} + \|\nabla\overline{\Pi}^n\|_{L^1_t(B^{\frac{N}{p}-1}_{p1})},$$

on a donc pour tout $t \leqslant T_1$

$$\|a^n\|_{\tilde{L}^\infty_t(B^{\frac{N}{p}}_{p1})} \leqslant C\,\mathrm{e}^{C\|u^n\|_{L^1_t(B^{\frac{N}{p}+1}_{p1})}}\|a_0\|_{B^{\frac{N}{p}}_{p1}} \quad \text{et} \quad U^n(t) \leqslant C\,\mathrm{e}^{Ct + C\|u^n\|_{L^1_t(B^{\frac{N}{p}+1}_{p1})}}\big\|H\big(a^n, u^n, \Pi^n\big)\big\|_{L^1_t(B^{\frac{N}{p}-1}_{p1})}.$$

On applique le Lemme 2.3 au terme $a^n(\Delta\bar{u}^n - \nabla\overline{\Pi}^n)$ avec $s = \frac{N}{p} - 1$ et on choisit T_2 tel que

$$\exp\big(CT_2 + C\|\bar{u}^n\|_{L^1_{T_2}(B^{\frac{N}{p}+1}_{p1})}\big) \leqslant 2.$$

Ainsi grâce aux lois de produits et le fait que $\|a\|_{L^\infty}$ est petite car $\|a\|_{L^\infty} = \|a_0\|_{L^\infty}$, on démontre que pour ζ suffisamment petite, la condition précédente est vérifiée. Et par suite on démontre par connexité que $T_2 = T_1 = T^n$. Étudier la convergence de la solution approchée et démontrer que sa limite est une solution de $(\widetilde{\mathrm{INS}})$ repose sur le théorème d'Ascoli pour plus de détails voir [4].

Pour prouver l'unicité, on utilise le fait que $(\delta a, \delta u, \nabla\delta\Pi) \overset{\text{déf}}{=} (a^2 - a^1, u^2 - u^1, \nabla\Pi^2 - \nabla\Pi^1)$, vérifie

$$\begin{cases} \partial_t\delta a + u^2\cdot\nabla\delta a = -\delta u\cdot\nabla a^1, \\ \partial_t\delta u + u^2\cdot\nabla\delta u - \mu\Delta\delta u + \nabla\delta\Pi = -\delta u\cdot\nabla u^1 + a^1(\mu\Delta\delta u - \nabla\delta\Pi) + \delta a\big(\mu\Delta u^2 - \nabla\Pi^2\big), \\ \operatorname{div}\delta u = 0. \end{cases}$$

Après, on suit la même démarche que [4] et on applique le Lemme 2.3 sur le terme $a^1(\Delta\delta u - \nabla\delta\Pi)$, avec $s = \frac{N}{p} - 2$ et $r = 1$ pour $N > p$ et $N > 2$. Pour le terme $\delta u\cdot\nabla a^1$, on utilise les lois de produits usuelles, puisque dans l'équation vérifiée par la différence de vitesse il y a $\delta a(\Delta u^2 - \nabla\Pi^2)$ qui est petite sur un intervalle de temps petit. Ainsi, on obtient l'unicité pour u pour $N > p$ et $N > 2$ sous la condition $\|a_0\|_{L^\infty} \ll 1$. Pour $p = N$ ou $N = 2$, il suffit d'étudier le cas $N = p$ car pour $N = 2$, on commence par $p = 2 = N$ et le cas $p < 2$ se déduit par injection. Donc, on a $s = -1$, $p = N$ et $r = \infty$. Dans se cas, on utilise le fait que

$$\sum_{q \geqslant N_0} 2^q \left\|\Delta_q a^1\right\|_{L_t^\infty(L^N)} \leqslant \sum_{q \geqslant N_0} 2^q \|\Delta_q a_0\|_{L^N} + c\left\|a^1\right\|_{L_t^\infty(B^1_{N\,1})} \|u\|_{L_t^1(B^2_{N\,1})} \quad \forall N_0 \geqslant -1.$$

Par suite pour N_0 assez grand et t assez petit, on a la norme de $a^{1,hf} := \sum_{q \geqslant N_0} \Delta_q a^1$ dans $L_t^\infty(B^1_{N\,1})$ est petite. Pour $a^{1,bf} := \sum_{-1 \leqslant q < N_0} \Delta_q a^1$ on utilise la propriété de presque orthogonalité et le fait que $\|a(t)\|_{L^\infty} = \|a_0\|_{L^\infty}$, on trouve

$$\left\|R\left(a^{1,bf}, \Delta\delta u - \nabla\delta\Pi\right)\right\|_{\tilde{L}_t^1(B^{-1}_{N\,\infty})} \leqslant C_{N_0} \|a_0\|_{L^\infty} \|\Delta\delta u - \nabla\delta\Pi\|_{\tilde{L}_t^1(B^{-1}_{N\,\infty})}.$$

D'où le théorème. □

Références

[1] H. Abidi, Équation de Navier–Stokes avec densité et viscosité variables dans l'espace critique, Revista Matemática Iberoamericana, à paraître.
[2] J.-M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, Ann. Sci. École Norm. Sup. 14 (1981) 209–246.
[3] J.-Y. Chemin, Fluides Parfaits Incompressibles, Astérisque, vol. 230, 1995.
[4] R. Danchin, Density-dependent incompressible viscous fluids in critical spaces, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 133 (2003) 1311–1334.
[5] R. Danchin, Local theory in critical spaces for compressible viscous and heat-conductive gases, Comm. Partial Differential Equations 26 (7–8) (2001) 1183–1233. Erratum, Comm. Partial Differential Equations 27 (11–12) (2002) 2531–2532.