Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 825–830
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Analyse complexe

Convexité polynomiale, polyhèdres polynomiaux spéciaux et applications

Stéphanie Nivoche

Université Paul-Sabatier, U.F.R. MIG, Laboratoire de Mathématiques E. Picard, C.N.R.S. U.M.R. 5580, 31062 Toulouse Cedex 9, France

Reçu le 13 janvier 2006 ; accepté le 14 mars 2006

Disponible sur Internet le 3 mai 2006

Présenté par Jean-Pierre Demailly

Résumé

Nous généralisons dans $\mathbb{C}^n$ le théorème de Hilbert sur les Lemniscates. Plus précisemment, tout compact K polynomialement convexe dans $\mathbb{C}^n$ est approchable par des polyhèdres polynomiaux spéciaux $\mathcal{P}$ définis par des applications polynomiales propres de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ ayant « presque » tous leurs zéros dans $\mathcal{P}$. Dans le cas particulier où K est disqué, on peut trouver une application polynomiale « presque » homogène avec un zéro en l'origine de multiplicité « presque » égale au degré. Une première conséquence de cette généralisation est une version précise du théorème de Runge dans $\mathbb{C}^n$. Une seconde application est l'approximation uniforme dans $\mathbb{C}^n$, de la fonction de Green pluricomplexe avec pôle à l'infini associée à un compact K $\mathcal{L}$-régulier, par des fonctions maximales de $\mathcal{L}^+$ à pôles logarithmiques isolés. ***Pour citer cet article : S. Nivoche, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abstract

Polynomial convexity, special polynomial polyhedra and applications. We generalize in $\mathbb{C}^n$ Hilbert Lemniscate Theorem. More precisely, any polynomially convex compact subset K in $\mathbb{C}^n$ can be approximated externally by special polynomial polyhedra $\mathcal{P}$ defined by proper polynomial mappings from $\mathbb{C}^n$ to $\mathbb{C}^n$ with 'almost' all their zeros in $\mathcal{P}$. In the particular case where K is balanced, we can choose the polynomial mapping 'almost' homogeneous with a zero at the origin of multiplicity 'almost' equal to the degree. A first consequence of this generalization is a precise version of Runge's theorem in $\mathbb{C}^n$. A second application is an uniform approximation in $\mathbb{C}^n$, of the pluricomplex Green function with pole at infinity for a $\mathcal{L}$-regular compact set K, by maximal plurisubharmonic functions in $\mathcal{L}^+$ with isolated logarithmic poles. ***To cite this article: S. Nivoche, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abridged English version

A compact subset K of $\mathbb{C}^n$ is polynomially convex if, for each $z \in \mathbb{C}^n \setminus K$, there exists a polynomial q such that $|q(z)| > \|q\|_K$. A simple compactness argument then shows that, given an open neighborhood $\mathcal{U}$ of K, there is a finite set of polynomials $q_1, \ldots, q_l$ such that $\sup_{1 \leqslant j \leqslant l} |q_j(z)|/\|q_j\|_K > 1,\ z \in \mathbb{C}^n \setminus \mathcal{U}$.

D. Hilbert proved in 1897 that, in fact, one polynomial is sufficient in $\mathbb{C}$.

Adresse e-mail : nivoche@picard.ups-tlse.fr (S. Nivoche).

1631-073X/$ – see front matter
doi:10.1016/j.crma.2006.03.023

Hilbert Lemniscate Theorem in $\mathbb{C}$. [4] *Let K be a polynomially convex compact subset of $\mathbb{C}$ and let $\mathcal{U}$ be an open neighborhood of K. Then there exists a polynomial q such that*

$$\left|q(z)\right|/\|q\|_K > 1, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{U}.$$

The polynomial q which appears in this theorem has of course all its zeros in $\mathcal{U}$. A proof of this theorem by classical potential theory (see Montel [7], Hille [5] and Ransford [10]) permits in fact to choose q (Fekete polynomial) such that all its zeros are in K (or even in ∂K). This proof gives in addition the uniform approximation of g_K, the Green function with pole at infinity associated to the compact set K, by subharmonic functions of the type $(\log|q|)/d$ (where d is the degree of the polynomial q) on $\mathbb{C} \setminus \mathcal{U}$.

In this Note we are interested by the following problem in $\mathbb{C}^n$: approximate a polynomially convex compact subset K by polynomial polyhedra $\mathcal{P}$, defined by exactly n polynomials, such that the common zeros of these polynomials are all in $\mathcal{P}$. A similar problem is the uniform approximation of g_K, the pluricomplex Green function with pole at infinity associated to the compact set K, by plurisubharmonic functions of the type $\sup_{1 \leqslant j \leqslant n} \frac{1}{d_j} \log|p_j|$ (where d_j is the degree of the polynomial p_j) on $\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{U}$ (where $\mathcal{U}$ is any neighborhood of K).

First here are generalizations in $\mathbb{C}^n$ of Hilbert Lemniscate theorem. Since any compact subset K of $\mathbb{C}^n$ is approximated by $K_\epsilon = \{z \in \mathbb{C}^n\colon \operatorname{dist}(z, K) \leqslant \epsilon\}$ which is always $\mathcal{L}$-regular, we state the following result only in the $\mathcal{L}$-regular case, i.e. when the pluricomplex Green function g_K with pole at infinity for K is continuous in $\mathbb{C}^n$. We denote by $D(R)$ its bounded open sublevel set $\{z \in \mathbb{C}^n\colon g_K(z) < R\}$ for any $R > 0$.

Theorem 1. *Let K be a $\mathcal{L}$-regular polynomially convex compact subset of $\mathbb{C}^n$. For any $\epsilon > 0$ sufficiently small, there exist an integer $d \geqslant 1$ and n polynomials $p_1, \ldots, p_n$ of degree d such that $\|p_j\|_K \leqslant 1$ for $1 \leqslant j \leqslant n$ and*

$$K \subset \overline{D(\epsilon)} \subset \mathcal{P} \subset D\left(\epsilon + \epsilon^2\right), \qquad (*)$$

where $\mathcal{P}$ is the special polynomial polyhedron, equal to the finite union of the connected components of the open set $\{z \in \mathbb{C}^n\colon \sup_{1 \leqslant l \leqslant n} \frac{1}{d} \log|p_l(z)| < \epsilon + \beta(\epsilon)\}$, that meet the compact set $\overline{D(\epsilon)}$. $0 < \beta(\epsilon) \leqslant \epsilon^2/2$.

In addition, the polynomial mapping $F = (p_1, \ldots, p_n)$ can be chosen such that:

(i) *its homogeneous component $H = (p_{1,d}, \ldots, p_{n,d})$ of degree d ($p_{l,d}$ for $1 \leqslant l \leqslant n$ is the homogeneous component of degree d of the polynomial p_l) has a unique zero at the origin,*

(ii) *F has a finite set Z of zeros in $\mathbb{C}^n$ and each zero is of multiplicity one,*

(iii) *According to Bézout's Theorem, $d^n = \operatorname{card}(Z)$ and here we have*

$$\operatorname{card}(Z \cap \mathcal{P})/d^n \to 1 \quad \textit{when } \epsilon \to 0.$$

In the first part of Theorem 1, the existence of a such special polynomial polyhedron satisfying the inclusions $(*)$ is a direct consequence of Bishop's Theorem [1] (see also Narasimhan [8]). But to obtain precise estimates on the polynomial mapping F which defines this polyhedron and to obtain in particular the last estimate on its zeros, we need to quantify in details what appears in the construction of this polynomial mapping. We have already used a similar method in [9] to prove the Zahariuta's Conjecture.

Theorem 2 *(The balanced case). Let D be a bounded pseudoconvex balanced domain in $\mathbb{C}^n$ with continuous plurisubharmonic Minkowski function h. Let K be its closure. Then K is a balanced polynomially convex and $\mathcal{L}$-regular compact subset of $\mathbb{C}^n$. For any $\epsilon > 0$ and $\delta > 0$ sufficiently small, there exist two integers $d \geqslant d' \geqslant 1$ and n polynomials $p_1, \ldots, p_n$ of degree d which satisfy the conclusion of Theorem 1 and which also verify*

(i) *O is a zero of p_j of multiplicity greater or equal to d' for $1 \leqslant j \leqslant n$,*

(ii) $1 - \delta \leqslant d'/d \leqslant 1$.

A first consequence of Theorem 1, by using Weil's integral formula (see [2]), is a precise version of Runge theorem in $\mathbb{C}^n$ about uniform approximation of holomorphic functions in a neighborhood of K, by polynomials of a certain class.

Theorem 3. *Let K be a polynomially convex compact subset of $\mathbb{C}^n$ and let f be a holomorphic function in an open neighborhood $\mathcal{U}$ of K.*

Then there exists a proper polynomial mapping $F=(p_1,\dots,p_n)$ of degree d in $\mathbb{C}^n$ (as in Theorem 1) and an open neighborhood $\mathcal{V}$ of K contained in $\mathcal{U}$, where f can be developed with the following series

$$f(z)=\sum_{k_1,\dots,k_n\geqslant 0} P_{k_1\cdots k_n}(z)p_1(z)^{k_1}\cdots p_n(z)^{k_n}.$$

$P_{k_1\cdots k_n}$ are complex polynomials of degree $\leqslant n.d$. This series converges uniformly on K to f.

A second application of Theorem 1 is the uniform approximation in $\mathbb{C}^n$ of the pluricomplex Green function with pole at infinity for a $\mathcal{L}$-regular compact set K (see Siciak [11,12] and Zahariuta [13]), by maximal plurisubharmonic functions in $\mathcal{L}^+$ with isolated logarithmic poles.

Theorem 4. *Let K be a $\mathcal{L}$-regular polynomially convex compact subset of $\mathbb{C}^n$. For any $\epsilon>0$, there exist a special polynomial polyhedron $\mathcal{P}$, neighborhood of K (as in Theorem 1), and a function $w\in\mathcal{L}^+$ such that*

(i) *w has a finite number of logarithmic poles S in $\mathcal{P}$,*
(ii) *w is maximal in $\mathbb{C}^n\setminus(\partial\mathcal{P}\cup S)$,*
(iii) *$g_K(z)-\gamma(\epsilon)\leqslant w(z)\leqslant g_K(z)$ on $\mathbb{C}^n\setminus\mathcal{P}$, where $\gamma(\epsilon)>0$ tends to 0 when ϵ tends to 0,*
(iv) *$\max\{w-\gamma'(\epsilon),0\}=g_{\overline{\mathcal{P}}}$ in $\mathbb{C}^n$, where $\gamma'(\epsilon)>0$ tends to 0 when ϵ tends to 0,*
(v) *$\int_{\mathcal{P}}(dd^cw)^n=\int_S(dd^cw)^n\to(2\pi)^n=\int_{\mathbb{C}^n}(dd^cw)^n$ and $\int_{\partial\mathcal{P}}(dd^cw)^n\to 0$ when ϵ tends to 0.*

1. Introduction et résultats principaux

Un compact K de $\mathbb{C}^n$ est polynomialement convexe si pour tout $z\in\mathbb{C}^n\setminus K$, il existe un polynôme q vérifiant $|q(z)|>\|q\|_K$. Un simple argument de compacité montre qu'étant étant donné un voisinage $\mathcal{U}$ de K, il existe un nombre fini de polynômes $q_1,\dots,q_l$ tels que $\sup_{1\leqslant j\leqslant l}|q_j(z)|/\|q_j\|_K>1$, pour tout $z\in\mathbb{C}^n\setminus\mathcal{U}$.

Ce qui est nettement moins évident c'est qu'en fait un seul polynôme suffit en une variable.

Théorème de Hilbert sur les Lemniscates dans $\mathbb{C}$. [4] *Soit K un compact polynomialement convexe de $\mathbb{C}$ et soit $\mathcal{U}$ un voisinage ouvert de K. Alors il existe un polynôme q tel que*

$$\left|q(z)\right|/\|q\|_K>1,\quad z\in\mathbb{C}\setminus\mathcal{U}.$$

Le polynôme q qui apparaît dans ce théorème a évidemment tous ses zéros dans $\mathcal{U}$. Une preuve de ce théorème par la théorie du potentiel (voir Hille [5], Montel [7] et Ransford [10]) permet en fait de choisir q (polynôme de Fekete) de sorte que tous ses zéros soient dans K (et même dans ∂K). De plus avec cette preuve nous obtenons l'approximation uniforme de g_K, la fonction de Green avec pôle à l'infini associée au compact K, par des fonctions sousharmoniques du type $(\log|q|)/d$ (où d est le degré du polynôme q) sur $\mathbb{C}\setminus\mathcal{U}$.

Dans cette Note nous nous intéressons au problème suivant dans $\mathbb{C}^n$: approximer un compact K polynomialement convexe par des polyhèdres polynomiaux spéciaux $\mathcal{P}$, définis par exactement n polynômes, tels que leurs zéros communs soient tous dans $\mathcal{P}$. Un problème similaire est l'approximation uniforme de g_K, la fonction de Green pluricomplexe avec pôle à l'infini associée au compact K, par des fonctions plurisousharmoniques du type $\sup_{1\leqslant j\leqslant n}\frac{1}{d_j}\log|p_j|$ (où d_j est le degré du polynôme p_j) sur $\mathbb{C}^n\setminus\mathcal{U}$ (où $\mathcal{U}$ est un voisinage quelconque de K).

Voici deux généralisations dans $\mathbb{C}^n$ du théorème de Hilbert. Puisque tout compact K de $\mathbb{C}^n$ est approchable par $K_\epsilon=\{z\in\mathbb{C}^n\colon \operatorname{dist}(z,K)\leqslant\epsilon\}$, qui est toujours un compact $\mathcal{L}$-régulier, nous établissons le résultat suivant seulement dans le cas $\mathcal{L}$-régulier, i.e. lorsque la fonction de Green pluricomplexe g_K avec pôle a l'infini associée au compact K est continue dans $\mathbb{C}^n$. Notons $D(R)$ son ouvert de niveau $\{z\in\mathbb{C}^n\colon\ g_K(z)<R\}$ pour $R>0$.

Théorème 1. *Soit K un compact polynomialement convexe et $\mathcal{L}$-régulier dans $\mathbb{C}^n$. Pour tout $\epsilon>0$ suffisamment petit, il existe un entier $d\geqslant 1$ et n polynômes $p_1,\dots,p_n$ de degré d tels que $\|p_j\|_K\leqslant 1$ pour $1\leqslant j\leqslant n$ et*

$$K\subset\overline{D(\epsilon)}\subset\mathcal{P}\subset D\left(\epsilon+\epsilon^2\right),\tag{$*$}$$

où $\mathcal{P}$ est le polyhèdre polynomial spécial, constitué de l'union finie des composantes connexes de l'ouvert $\{z \in \mathbb{C}^n\colon \sup_{1\leqslant l\leqslant n} \frac{1}{d}\log|p_l(z)| < \epsilon + \beta(\epsilon)\}$, *qui rencontrent le compact* $\overline{D(\epsilon)}$. $0 < \beta(\epsilon) \leqslant \epsilon^2/2$.

L'application polynomiale $F = (p_1, \ldots, p_n)$ *vérifie aussi les propriétés suivantes* :

(i) *sa composante homogène* $H = (p_{1,d}, \ldots, p_{n,d})$ *de degré* d ($p_{l,d}$ *pour tout* $1 \leqslant l \leqslant n$ *est la composante homogène de degré* d *du polynôme* p_l) *a un unique zéro en l'origine,*
(ii) F *a un ensemble fini* Z *de zéros dans* $\mathbb{C}^n$ *et chaque zéro est de multiplicité un,*
(iii) *D'après le théorème de Bézout,* $d^n = \operatorname{card}(Z)$ *et ici nous obtenons*

$$\operatorname{card}(Z \cap \mathcal{P})/d^n \to 1 \quad \textit{quand } \epsilon \to 0.$$

Dans la première partie du Théorème 1, l'existence de tels polyhèdres polynomiaux spéciaux vérifiant les inclusions $(*)$ est une conséquence directe du Théorème de Bishop [1] (voir aussi Narasimhan [8]). Mais par contre pour obtenir des estimées précises sur l'application polynomiale F définissant ce polyhèdre et pour obtenir en particulier la dernière estimée sur ses zéros, nous avons besoin de quantifier en détail ce qui apparaît dans la construction de cette application. Nous avons déja utilisé une méthode similaire dans [9] pour montrer la Conjecture de Zahariuta.

Théorème 2 *(Le cas disqué). Soit* D *un domaine borné pseudoconvexe et disqué dans* $\mathbb{C}^n$ *avec une fonction de Minkowski* h *plurisousharmonique et continue. Soit* K *son adhérence. Alors* K *est un compact disqué polynomialement convexe et* $\mathcal{L}$*-régulier dans* $\mathbb{C}^n$. *Pour tout* $\epsilon > 0$ *et* $\delta > 0$ *suffisamment petits, il existe deux entiers* $d \geqslant d' \geqslant 1$ *et* n *polynômes* $p_1, \ldots, p_n$ *de degré* d *vérifiant les conclusions du Théorème* 1 *ainsi que*

(i) O *est un zéro de* p_j *de multiplicité supérieure ou égale à* d' *pour* $1 \leqslant j \leqslant n$,
(ii) $1 - \delta \leqslant d'/d \leqslant 1$.

Nous obtenons à partir du Théorème 1 et de la formule intégrale de Weil (voir [2]), une version précise du théorème de Runge dans $\mathbb{C}^n$, sur l'approximation uniforme des fonctions holomorphes dans un voisinage de K, par des polynômes d'un certain type.

Théorème 3. *Soit* K *un compact polynomialement convexe de* $\mathbb{C}^n$ *et soit* f *une fonction holomorphe dans un voisinage ouvert* $\mathcal{U}$ *de* K.

Alors il existe une application polynomiale propre $F = (p_1, \ldots, p_n)$ *de degré* d *dans* $\mathbb{C}^n$ (*comme dans le Théorème* 1) *et un voisinage ouvert* $\mathcal{V}$ *de* K *contenu dans* $\mathcal{U}$ *où* f *est développable en série de la forme suivante*

$$f(z) = \sum_{k_1,\ldots,k_n \geqslant 0} P_{k_1\cdots k_n}(z)\, p_1(z)^{k_1} \cdots p_n(z)^{k_n}.$$

$P_{k_1\cdots k_n}$ *sont des polynômes de degré* $\leqslant n.d$. *Cette série converge uniformement sur* K *vers* f.

Une seconde application du Théorème 1 est l'approximation uniforme dans $\mathbb{C}^n$ de la fonction de Green pluricomplexe avec pôle a l'infini pour un compact K $\mathcal{L}$-régulier, par des fonctions plurisousharmoniques maximales, dans $\mathcal{L}^+$, avec pôles logarithmiques isolés.

Théorème 4. *Soit* K *un compact polynomialement convexe* $\mathcal{L}$*-régulier dans* $\mathbb{C}^n$. *Pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe un polyhèdre polynomiale* $\mathcal{P}$, *voisinage ouvert de* K (*comme dans le Théorème* 1), *et une fonction* $w \in \mathcal{L}^+$ *tels que*

(i) w *a un nombre fini de pôles logarithmiques* S *dans* $\mathcal{P}$,
(ii) w *est maximale dans* $\mathbb{C}^n \setminus (\partial\mathcal{P} \cup S)$,
(iii) $g_K(z) - \gamma(\epsilon) \leqslant w(z) \leqslant g_K(z)$ *sur* $\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{P}$, *où* $\gamma(\epsilon) > 0$ *tend vers* 0 *lorsque* ϵ *tend vers* 0,
(iv) $\max\{w - \gamma'(\epsilon), 0\} = g_{\overline{\mathcal{P}}}$ *dans* $\mathbb{C}^n$, *où* $\gamma'(\epsilon) > 0$ *tend vers* 0 *lorsque* ϵ *tend vers* 0,
(v) $\int_{\mathcal{P}}(dd^c w)^n = \int_S (dd^c w)^n \to (2\pi)^n = \int_{\mathbb{C}^n}(dd^c w)^n$ *et* $\int_{\partial\mathcal{P}}(dd^c w)^n \to 0$ *quand* ϵ *tend vers* 0.

2. Idée de la preuve du Théorème 1

Fixons un réel $\epsilon > 0$ et un compact K polynomialement convexe et $\mathcal{L}$-régulier dans $\mathbb{C}^n$. Il existe alors deux entiers $d = d(\epsilon) \geqslant 1$ et $N = N(\epsilon) \geqslant 1$ et N polynômes $p_1, \ldots, p_N$ de degré d tels que $\|p_l\|_K \leqslant 1$ pour $1 \leqslant l \leqslant N$ et

$$g_K(z) - \frac{\epsilon^2}{2} \leqslant \sup_{1\leqslant l\leqslant N} \frac{1}{d}\log\bigl|p_l(z)\bigr| \leqslant g_K(z) \quad \text{sur } \mathbb{C}^n.$$

Si on note v_N la fonction continue et plurisousharmonique définie sur $\mathbb{C}^n$ par $v_N(z) = \sup_{1\leqslant l\leqslant N} \frac{1}{d}\log|p_l(z)|$, et pour tout $r \in \mathbb{R}$ $P_N(r)$ son ouvert de sous-niveau $\{z \in \mathbb{C}^n \colon v_N(z) < r\}$, alors on a

$$D\bigl(\epsilon + \epsilon^2/2\bigr) \subset P_N\bigl(\epsilon + \epsilon^2/2, 1\bigr) \subset D\bigl(\epsilon + \epsilon^2\bigr), \tag{1}$$

où $P_N(\epsilon + \epsilon^2/2, 1)$ est l'union finie des composantes connexes de l'ouvert $P_N(\epsilon + \epsilon^2/2)$, qui rencontrent $\overline{D(\epsilon)}$. Si $N = n$, alors le Théorème 1 est démontré avec $\beta(\epsilon) = \epsilon^2/2$.

A partir de maintenant, nous supposons que $N > n$. Nous allons abandonner l'approximation uniforme de g_K sur $\mathbb{C}^n$ ou sur le complémentaire d'un voisinage de K par des fonctions du type $\sup_{1\leqslant j\leqslant N} \frac{1}{d_j}\log|p_j|$ (où p_j est un polynôme de degré d_j et N est un entier certainement grand) pour obtenir une exhaustion du compact K du type $(*)$, vérifiant les propriétés listées dans le Théorème 1. Pour cela nous nous sommes inspirés de la preuve du Théorème de Bishop au sujet des polyhèdres analytiques spéciaux. Notre construction consiste tout d'abord à appliquer un processus $(\mathcal{P}_N)$ puis ensuite un processus $(\mathcal{R}_q)$, successivement pour $q = N, N-1, \ldots, n+1$.

Le processus $(\mathcal{P}_N)$ consiste à modifier l'application $p = (p_1, \ldots, p_N)$ de telle sorte que la nouvelle application polynomiale $\tilde p = (\tilde p_1, \ldots, \tilde p_N)$ vérifie : l'application rationnelle $(\tilde p_1/\tilde p_N, \ldots, \tilde p_{N-1}/\tilde p_N) : \mathbb{C}^n \setminus \{\tilde p_N = 0\} \to \mathbb{C}^{N-1}$ est localement finie, càd que ses surfaces de niveau $\{z \in \mathbb{C}^n \setminus \{\tilde p_N = 0\} \colon \tilde p_1(z)/\tilde p_N(z) = a_1, \ldots, \tilde p_{N-1}(z)/\tilde p_N(z) = a_{N-1}\}$ sont juste des points isolés de $\mathbb{C}^n \setminus \{\tilde p_N = 0\}$ (nous pouvons bien sûre supposer que le polynôme $\tilde p_N$ n'est pas identiquement nul, sinon nous ne commençons pas avec N mais avec $N-1$ polynômes). $X_N = \{z \in \mathbb{C}^n \colon p_N(z) = 0\}$ est sous-variété algébrique propre de $\mathbb{C}^n$.

Soit $F = (p_1, \ldots, p_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ l'application polynomiale définie par les n premiers polynômes p_l. F a une composante homogène $H = (p_{1,d}, \ldots, p_{n,d})$ de degré d. Par un argument de densité (voir Lemme 1 p. 431 de [6]), on peut supposer que $H^{-1}(\{0\})$ est réduit à $\{0\}$. Alors pour tout entier $\alpha \geqslant 1$, il suffit de prendre les polynômes $\tilde p_l$ suivants

$$\tilde p_l = p_l^{\alpha+1} \quad \text{pour } 1 \leqslant l \leqslant n \quad \text{et} \quad \tilde p_l = p_l^{\alpha} \quad \text{pour } n+1 \leqslant l \leqslant N.$$

Notons $\tilde v_N$ la fonction plurisousharmonique continue dans $\mathbb{C}^n$ définie par $\tilde v_N = \sup_{1\leqslant l\leqslant N} \frac{1}{d(\alpha+1)}\log|\tilde p_l|$, et pour tout $r \in \mathbb{R}$ $\widetilde{P}_N(r) = \{z \in \mathbb{C}^n \colon \tilde v_N(z) < r\}$. Puisque $\|\tilde p_l\|_K \leqslant 1$ pour tout $1 \leqslant l \leqslant N$, $\tilde v_N \leqslant g_K$ dans $\mathbb{C}^n$ et $\overline{D(\epsilon)} \subset \widetilde{P}_N(\epsilon + \epsilon^2/2^2)$. Alors d'après les inclusions (1), pour α suffisamment grand on obtient les inclusions suivantes

$$K \subset \overline{D(\epsilon)} \subset \widetilde{P}_N\bigl(\epsilon + \epsilon^2/2^2, 1\bigr) \subset D\bigl(\epsilon + \epsilon^2\bigr), \tag{2}$$

où $\widetilde{P}_N(\epsilon + \epsilon^2/2^2, 1)$ est la réunion finie des composantes connexes de l'ouvert $\widetilde{P}_N(\epsilon + \epsilon^2/2^2)$ qui rencontrent $\overline{D(\epsilon)}$. Notons $d_N = d(\alpha + 1)$.

Soit $n + 1 \leqslant q \leqslant N$. Pour appliquer le processus $(\mathcal{R}_q)$, il faut que les conditions suivantes soient remplies : nous avons une application polynomiale $\tilde p = (\tilde p_1, \ldots, \tilde p_q)$ (les polynômes $\tilde p_l$ sont de degré d_q) telle que l'application rationnelle

$$(\tilde p_1/\tilde p_q, \ldots, \tilde p_{q-1}/\tilde p_q) \colon \mathbb{C}^n \setminus \{\tilde p_q = 0\} \to \mathbb{C}^{q-1} \tag{3}$$

soit localement finie. Si on note $\tilde v_q$ la fonction plurisousharmonique dans $\mathbb{C}^n$ $\sup_{1\leqslant l\leqslant q} \frac{1}{d_q}\log|\tilde p_l|$, et pour tout $r \in \mathbb{R}$ $\widetilde{P}_q(r) = \{z \in \mathbb{C}^n \colon \tilde v_q(z) < r\}$, alors $\tilde v_q$ doit définir un polyhèdre polynomial de type q vérifiant

$$K \subset \overline{D(\epsilon)} \subset \widetilde{P}_q\bigl(\epsilon + \epsilon^2/2^{2+2(N-q)}, 1\bigr) \subset D\bigl(\epsilon + \epsilon^2\bigr), \tag{4}$$

où $\widetilde{P}_q(\epsilon + \epsilon^2/2^{2+2(N-q)}, 1)$ est la réunion finie des composantes connexes de l'ouvert $\tilde P_q(\epsilon + \epsilon^2/2^{2+2(N-q)})$ qui rencontrent $\overline{D(\epsilon)}$.

Alors le processus $(\mathcal{R}_q)$ consiste à choisir un entier ν suffisamment grand tel que l'application polynomiale $G_{q-1}^{\nu} = (g_{1,\nu}; \ldots; g_{q-1,\nu})$ avec $g_{l,\nu} = \tilde p_l^{\nu} - \tilde p_q^{\nu}$ pour $1 \leqslant l \leqslant q-1$, definisse un polyhèdre polynomial de type $q-1$ vérifiant

$$K \subset \overline{D(\epsilon)} \subset P^{\nu}_{q-1}\big(\epsilon + \epsilon^2/2^{3+2(N-q)}, 1\big) \subset D\big(\epsilon + \epsilon^2\big), \tag{5}$$

où $P^{\nu}_{q-1}(\epsilon + \epsilon^2/2^{3+2(N-q)}, 1)$ est la réunion finie des composantes connexes de l'ouvert de sous-niveau $P^{\nu}_{q-1}(\epsilon + \epsilon^2/2^{3+2(N-q)}) = \{z \in \mathbb{C}^n\colon \sup_{1\leqslant l\leqslant q-1} \frac{1}{\nu d_q} \log|g_{l,\nu}| < \epsilon + \epsilon^2/2^{3+2(N-q)}\}$ qui rencontrent $\overline{D(\epsilon)}$. Ceci se démontre par contradiction avec le fait que l'application rationnelle (3) est localement finie.

Ensuite on définit $q-1$ nouveaux polynômes $\tilde{p}_l = g_{l,\nu}/2$. On note aussi $\widetilde{P}_{q-1}(r) = \{z \in \mathbb{C}^n\colon \tilde{v}_{q-1}(z) < r\}$, où $\tilde{v}_{q-1}$ est la fonction plurisousharmonique dans $\mathbb{C}^n$ définie par $\tilde{v}_{q-1} = \sup_{1\leqslant l\leqslant q-1} \frac{1}{d_{q-1}} \log|\tilde{p}_l|$ $(d_{q-1} = d_q\nu)$. Puisque $\|\tilde{p}_l\|_K \leqslant 1$ pour tout $1 \leqslant l \leqslant q-1$, $\tilde{v}_{q-1} \leqslant g_K$ dans $\mathbb{C}^n$. Alors pour ν sufisamment grand et d'après les inclusions (5), on obtient de nouvelles inclusions (4) où q est remplacé par $q-1$ et la nouvelle application rationnelle (3) pour $q-1$ est localement finie. Ainsi les conditions pour appliquer le processus $(\mathcal{R}_{q-1})$ sont remplies.

En résumé, lorsque nous avons les inclusions (1) vérifiées pour $N > n$, il suffit tout d'abord d'appliquer le processus $(\mathcal{P}_N)$. Nous avons alors toutes les conditions remplies pour appliquer le processus $(\mathcal{R}_N)$. Et ensuite il suffit d'appliquer successivement les processus $(\mathcal{R}_{N-1}), \ldots, (\mathcal{R}_{n+1})$ et on obtient finalement l'existence de n polynômes $p_1, \ldots, p_n$ de degré d_n $(d_n \geqslant d_N)$ tels que

(i) $\|p_l\|_K \leqslant 1$ pour $1 \leqslant l \leqslant n$,
(ii) les inclusions $(*)$ dans le Théorème 1 sont vérifiées avec $\beta(\epsilon) = \epsilon^2/2^{2(N-n+1)}$,
(iii) l'application F vérifie les points (i) et (ii) du Théorème 1 grâce à la construction faite dans le processus $(\mathcal{P}_N)$.

Pour montrer que les zéros de l'applications F vérifient le troisième point du Théorème 1, nous utilisons les inclusions $(*)$ et un cas particulier d'un résultat de Demailly [3] à propos de la comparaison des masses de Monge–Ampère pour des fonctions plurisousharmoniques d'exhaustion dans des domaines hyperconvexes de $\mathbb{C}^n$.

Références

[1] E. Bishop, Mappings of partially analytic spaces, Amer. J. Math. 83 (1961) 209–242.
[2] B. Chabat, Introduction à l'analyse complexe, Tome 2, Fonctions de plusieurs variables, Editions Mir, Moscou, 1990.
[3] J.-P. Demailly, Mesures de Monge–Ampère et mesures pluriharmoniques, Math. Z. 194 (1987) 519–564.
[4] D. Hilbert, Über die Entwicklung einer beliebigen analytischen Funktion einer Variablen in einen unendliche nach ganzen rationalen Funktionen fortschreitende Reihe, Nachrichten Königl. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., 1897, 63–70.
[5] E. Hille, Analytic Function Theory, vol. II, Ginn and Company, 1962.
[6] S. Lojasiewicz, Introduction to Complex Analytic Geometry, Birkhäuser Verlag, Basel, 1991.
[7] P. Montel, Leçons sur les séries de polynômes à une variable complexe, Gauthier-Villars, 1910.
[8] R. Narasimhan, Imbedding of holomorphically complete complex spaces, Amer. J. Math. 82 (1960) 917–934.
[9] S. Nivoche, Proof of a Conjecture of Zahariuta concerning a problem of Kolmogorov on the ϵ-entropy, Invent. Math. 158 (2) (2004) 413–450.
[10] T. Ransford, Potential Theory in the Complex Plane, London Math. Society, Student Texts, vol. 28, Cambridge University Press, 1995.
[11] J. Siciak, On some extremal functions and their applications in the theory of analytic functions of several complex variables, Trans. Amer. Math. Soc. 105 (1962) 322–357.
[12] J. Siciak, An extremal problem in a class of plurisubharmonic functions, Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. Astr. Phys. XXIV (8) (1976) 563–568.
[13] V.P. Zahariuta, Extremal plurisubharmonic functions, orthogonal polynomials and the Bernstein–Walsh theorem for functions of several complex variables, Ann. Polon. Math. 33 (1–2) (1976) 137–148.