Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 803–806
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des nombres

La somme des diviseurs unitaires d'un entier dans les progressions arithmétiques $(\sigma_{k,l}^*(n))$

Abdallah Derbal

Département de mathématiques, École normale supérieure vieux Kouba, B.P. 92, Alger, Algérie

Reçu le 16 novembre 2005 ; accepté après révision le 14 mars 2006

Disponible sur Internet le 2 mai 2006

Présenté par Christophe Soulé

Résumé

Soit $\sigma_{k,l}^*(n)$ la fonction somme des diviseurs unitaires du nombre entier n dans la progression arithmétique $\{l+mk\}$ définie, pour $n=\prod_{p^\alpha\|n}p^\alpha$, par : $\sigma_{k,l}^*(n)=\prod_{p^\alpha\|n,\ p\equiv l(k)}(1+p^\alpha)$, $\sigma_{1,1}^*(n)=\sigma^*(n)=\sum_{d|n,\ (d,n/d)=1}d$. Dans cette Note nous établissons un théorème sur le comportement relatif de cette fonction et de son ordre maximal qui sera explicitement déterminé et nous donnons des majorations effectives de $\sigma_{3,l}^*(n)$. ***Pour citer cet article : A. Derbal, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abstract

The sum of unitary divisors of an integer in arithmetic progressions. Let $\sigma_{k,l}^*(n)$ be the function sum of unitary divisors in arithmetic progression $\{l+mk\}$ given, for $n=\prod_{p^\alpha\|n}p^\alpha$, by: $\sigma_{k,l}^*(n)=\prod_{p^\alpha\|n,\ p\equiv l(k)}(1+p^\alpha)$, $\sigma_{1,1}^*(n)=\sigma^*(n)=\sum_{d|n,\ (d,n/d)=1}d$. In this Note we present a theorem on the relative behaviour of $\sigma_{k,l}^*(n)$ and its maximum order which will be given explicitly and we give an effective upper bound of $\sigma_{3,l}^*(n)$. ***To cite this article: A. Derbal, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

1. Introduction

Pour k et l deux nombres entiers tels que $1\leqslant l\leqslant k$ et $(k,l)=1$ on pose : $p_1=p_1(k,l)$ le premier le nombre premier dans la progression arithmétique $\{l+mk\}$, $\varphi(k)=$ la fonction d'Euler, $\widehat{G}(k)$ l'ensemble des $\varphi(k)$ caractères de Dirichlet modulo k, $L(s,\chi)$, où $\chi\in\widehat{G}(k)$, la fonction de Dirichlet associée au caractère χ définie dans le demi plan complexe $\Re(s)>1$ par $L(s,\chi)=\sum_{n\geqslant 1}\chi(n)/n^s$. $L(s,\chi)$ se prolonge analytiquement dans tout le plan complexe $\mathbb{C}$ en une fonction entière sauf si le caractère χ est principal. Dans ce cas elle admet un pôle simple en $s=1$ et le résidu y est $\varphi(k)/k$, $\widehat{Z}(\chi)$, où $\chi\in\widehat{G}(k)$, l'ensemble des zéros complexes de la fonction $L(s,\chi)$, $\widehat{Z}(k)$ la réunion des $\varphi(k)$ ensembles $\widehat{Z}(\chi)$ et enfin $\gamma=0{,}57721566\ldots$ la constante d'Euler.

Adresse e-mail : abderbal@yahoo.fr (A. Derbal).

1631-073X/$ – see front matter © 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2006.03.022

Définition. Soit $\rho \in \widehat{Z}(k)$ et $\chi_{i_1}, \dots, \chi_{i_r}$ les r caractères ($1 \leqslant r \leqslant \varphi(k)$) tels que ρ est un zéro de $L(s, \chi_{i_j})$ avec un ordre de multiplicité égal à m_j ($1 \leqslant j \leqslant r$). Pour tout l tel que $1 \leqslant l \leqslant k$ et $(k, l) = 1$, on pose :

$$m_{\rho,l} = \sum_{j=1}^{r} m_j \times \overline{\chi_{i_j}}(l) \quad \text{où } \overline{\chi_{i_j}} \text{ désigne le caractère conjugué de } \chi_{i_j}.$$

Le nombre $m_{\rho,l}$ est appelé l'ordre de multiplicité composé du zéro ρ relatif à l.

Outre ces notations et définitions, nous utiliserons les fonctions de la théorie analytique des nombres suivantes :

$$\theta(x;k,l) = \sum_{p \leqslant x,\, p \equiv l(k)} \ln p, \quad S(x;k,l) = \theta(x;k,l) - \frac{x}{\varphi(k)}, \quad \psi(x;k,l) = \sum_{p^m \leqslant x,\, p^m \equiv l(k)} \ln p,$$

$$R(x;k,l) = \psi(x;k,l) - \frac{x}{\varphi(k)}, \quad g(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2 \ln^2 x}, \quad J(x;k,l) = \int_x^{+\infty} R(t;k,l) g(t)\, \mathrm{d}t,$$

$$K(x;k,l) = \int_x^{+\infty} S(t;k,l) g(t)\, \mathrm{d}t, \qquad D(x;k,l) = \int_x^{+\infty} \big(\psi(x;k,l) - \theta(x;k,l)\big) g(t)\, \mathrm{d}t.$$

Nous avons étudié la fonction $\sigma^*_{k,l}(n)$ et obtenu les résultats suivants :

Théorème. *Soient k et l deux nombres entiers premiers entre eux tels que $1 \leqslant l \leqslant k$.*

1. *Il existe un nombre $a_{k,l} \in \mathbb{R}^*_+$ effectivement calculable tel que*

$$\limsup_{n \to +\infty} \left\{ g^*_{k,l}(n) = \frac{\sigma^*_{k,l}(n)}{n \times (\ln(\varphi(k) \ln n))^{1/\varphi(k)}} \right\} = P_{k,l} \times a_{k,l} \quad \text{où } P_{k,l} = \prod_{p \equiv l(k)} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

2. *Si aucune des fonctions $L(s, \chi)$, où $\chi \in \widehat{G}(k)$, ne s'annulle dans l'intervalle $]0, 1]$ et il existe $\rho \in \widehat{Z}(k)$ d'ordre de multiplicité composé $m_{\rho,l}$ relatif à l non nul, alors*

$$\sigma^*_{k,l}(n) > P_{k,l} \times a_{k,l} \times n \times \big(\ln(\varphi(k) \ln n)\big)^{1/\varphi(k)} \quad \text{pour une infinité de nombres } n. \tag{P}$$

3. *La proposition* (P) *est vraie pour $k \in \{1, \dots, 13, 14, 18, 22, 26\}$ et l premier avec k tel que $1 \leqslant l \leqslant k$.*
4. *Pour $k = 3$ et $n \geqslant 2$, on a*

$$\sigma^*_{3,1}(n) < 0{,}9804 \times n \times \big(\ln(2 \ln n)\big)^{1/2} \quad \text{et} \quad \sigma^*_{3,2}(n) < 2{,}624 \times n \times \big(\ln(2 \ln n)\big)^{1/2}.$$

2. Lemmes préparatifs

Lemme 1. *Soient k et l deux entiers premiers entre eux tels que $1 \leqslant l \leqslant k$. On considère la suite ordonée $(p_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ des nombres premiers congrus à l modulo k et on pose $N_m = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_m$pour $m = 1, 2, \dots$.*

1. *Pour tout nombre entier $n \geqslant N_1 = p_1$ et $m \geqslant 1$, on a :*

$$N_m \leqslant n < N_{m+1} \Rightarrow g^*_{k,l}(n) \leqslant g^*_{k,l}(N_m).$$

2. *Pour tout nombre entier $m \geqslant 1$ et tout nombre réel $x \in [p_m, \ p_{m+1}[$, on a*

$$N_m = N_{k,l}(x) = \prod_{p \leqslant x,\ p \equiv l(k)} p \quad (p \text{ désigne un nombre premier}).$$

3. *Pour $N = N_{k,l}(x)$ avec $x \geqslant p_1$, il existe un nombre réel $a_{k,l} > 0$ effectivement calculable tel que*

$$g^*(N;k,l) = P_{k,l} \times a_{k,l} \times \exp\big\{\beta(x;k,l) + u(x)\big\}$$

où

$$P_{k,l} = \prod_{p \equiv l(k)} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right),$$

$$\beta(x;k,l) = -K(x;k,l) + \frac{(S(x;k,l))^2 g(\xi)}{2} = -J(x;k,l) + D(x;k,l) + \frac{(S(x;k,l))^2 g(\xi)}{2},$$

$\xi = \xi(x)$ est une fonction comprise entre x et $\varphi(k)\theta(x;k,l)$,

$$u(x;k,l) = \sum_{p>x,\ p \equiv l(k)} \left(\frac{1}{p} - \ln\left(1 + \frac{1}{p}\right)\right) > 0 \quad \textit{avec } u(x) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{x \ln x}\right).$$

Lemme 2 *(critère d'oscillation des fonctions $R(x;k,l)$ et $J(x;k,l)$).*

1. *Soient k et l deux nombres entiers premiers entre eux tels que $1 \leqslant l \leqslant k$. On suppose que :*
   (a) *Aucune des $\varphi(k)$ fonctions de Dirichlet $L(s,\chi)$ ne s'annulle dans l'intervalle* $]0, 1]$.
   (b) *Il existe $\rho \in \widehat{Z}(k)$ d'ordre de multiplicité composé $m_{\rho,l}$ non nul.*
   Alors les fonctions réelles $R(x,k,l)$ et $J(x,k,l)$ changent de signe une infinité de fois.
2. *Pour $k \in \{1, 2, \ldots, 13, 14, 18, 22, 26\}$ et $1 \leqslant l \leqslant k$ avec $(l,k) = 1$ les fonctions $R(x,k,l)$ et $J(x;k,l)$ changent de signe une infinité de fois.*

Démonstration.
1. Inspirée de ([4] pages 384–385) et en utilisant le théorème de Landau ([3] page 191). On considère, pour $\Re(s) > 1$, les fonctions à variables complexe suivantes :

$$G(s) = \int_2^{+\infty} \frac{R(x;k,l)}{x^{s+1}}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad H(s) = \int_2^{+\infty} \frac{J(x;k,l)}{x^s}\,\mathrm{d}x.$$

D'après [1] page 83, la fonction $G(s)$ se prolonge dans tout le plan complexe en une fonction méromorphe :

$$G(s) = -\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\rho \in \widehat{Z}(k)} \frac{m_{\rho,l}}{\rho(s-\rho)} + \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \in \widehat{G}(k)} \overline{\chi}(l) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+a)(s+2n+a)} - \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \left\{\frac{\overline{\chi}(l)}{s(s+a)}\right\} + \frac{E(s)}{s} \tag{1}$$

où $a = (\chi(1) - \chi(-1))/2$ et $E(s)$ est une fonction entière.

Soient $\delta = \min_{\rho \in Z(k)}(|\Im(\rho)|) > 0$ et W_δ l'ouvert simplement connexe :

$$W_\delta = \{s \in \mathbb{C} \text{ tel que } \Re(s) > 1\} \cup \{s \in \mathbb{C} \text{ tel que } 0 < \Re(s) \leqslant 1 \text{ et } |\Im(s)| < \delta\}.$$

La formule (1) et les hypothèses (a) et (b) impliquent que la fonction $G(s)$ est analytique dans W_δ et possède au moins un pôle simple dans le demi plan $\Re(s) > 0$. Alors, d'après le théorème de Landau, la fonction $R(x;k,l)$ oscille indéfiniment autour de 0. En évaluant $H(s)$ par parties, on obtient

$$H(s) = \frac{h(s)}{s-1} \quad \text{avec } h(s) = G_1(s) - G_2(s) + h_1(s) \tag{2}$$

où $G_1(s)$ et $G_2(s)$ sont respectivement la première et la deuxième primitive de $G(s)$ dans W_δ, $h_1(s)$ une fonction entière et $h(1) = 0$. Cela prouve que $H(s)$ se prolonge en une fonction sans singularité sur le segment $0 < \sigma \leqslant 1$. Supposons que $J(x;k,l)$ garde un signe constant pour x assez grand. Alors d'après le théorème de Landau la fonction $H(s)$ serait analytique dans le demi plan $\Re(s) > 0$ ce qui impliquerait, d'après la formule (2), que les fonctions $G_1(s) - G_2(s)$ et $G_1''(s) - G_2''(s)$ sont aussi analytiques dans le demi plan $\Re(s) > 0$. Or, ceci est impossible, car d'après l'hypothèse (b) et la formule (1), la fonction $G(s)$ possède un pôle simple ρ dans le demi plan $\Re(s) > 0$ et au voisinage de ρ on a

$$G_1''(s) - G_2''(s) = G'(s) - G(s) \sim \frac{m_{\rho,l}}{\varphi(k)} \times \frac{(1+s-\rho)}{\rho(s-\rho)^2} \quad (m_{\rho,l} \neq 0).$$

2. D'après [5] (les tables des zéros des fonctions de Dirichlet), pour chaque valeur de k citée, il existe $\rho_k \in \widehat{Z}(k)$ tel que $m_{\rho_k,l} \neq 0$. ρ_k est celui de partie imaginaire positive minimale.

$\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{2} + \mathrm{i}14{,}134725$, $\rho_3 = \rho_6 = \frac{1}{2} + \mathrm{i}8{,}039737$, $\rho_4 = \frac{1}{2} + \mathrm{i}6{,}020948$, $\rho_5 = \rho_{10} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}4{,}132903$, $\rho_7 = \rho_{14} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}2{,}509374$, $\rho_8 = \frac{1}{2} + \mathrm{i}3{,}576154$, $\rho_9 = \rho_{18} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}2{,}901994$, $\rho_{11} = \rho_{22} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}1{,}231188$, $\rho_{12} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}3{,}804627$, $\rho_{13} = \rho_{26} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}0{,}883960$. Les conditions (a) et (b) sont alors satisfaites d'où l'assertion annoncée. □

3. Démonstration du théorème

1. Le Lemme 1 implique $\limsup_{n\to+\infty}\{g^*_{k,l}(n)\} = P_{k,l} \times a_{k,l} \times \exp\{\lim_{x\to+\infty}\{\beta(x;k,l) + u(x)\}\}$. D'après le théorème des nombres premiers dans les progressions arithmétiques, on a $\lim_{x\to+\infty}\{\beta(x;k,l) + u(x)\} = 0$ d'où la première assertion du théorème.

2. On a $\beta(x;k,l) + u(x) = -J(x;k,l) + D(x;k,l) + u(x)$ avec $D(x;k,l) + u(x) > 0$. Alors pour tout $n = N_{k,l}(x)$, on a $g^*_{k,l}(n) > P_{k,l} \times a_{k,l} \times \exp\{-J(x;k,l)\}$ et d'après le Lemme 2, $-J(x;k,l) > 0$ une infinité de fois, d'où l'existence d'une infinité de nombres n tels que $\sigma^*_{k,l}(n) > P_{k,l} \times a_{k,l} \times (\ln(\varphi(k)\ln n))^{1/\varphi(k)}$.

3. Pour les valeurs de k citées et les nombres l correspondants les conditions (a) et (b) sont satisfaites donc la proposition (P) est vraie pour ces valeurs de k.

4. Par calcul direct sur ordinateur nous obtenons les valeurs :

$$P_{3,1} = 0{,}96710408\ldots, \qquad P_{3,2} = 0{,}70718137\ldots.$$

Les nombres $a_{k,l}$ sont explicités dans [6] Théorème 1 page 356. Pour $k = 3$ on a les valeurs :

$$a_{3,1} = \left(\left(2\sqrt{3}\pi \times P_{3,2} \times \mathrm{e}^{\gamma}\right)/27\right)^{1/2} = 0{,}712515\ldots, \qquad a_{3,2} = \left(\left(8\sqrt{3}\pi P_{3,1} \times \mathrm{e}^{\gamma}\right)/27\right)^{1/2} = 1{,}666463\ldots.$$

D'après [2] page 114, on a pour $x \geqslant 25000$

$$\left|S(x;3,l)\right| < 0{,}524 \times \frac{x}{2\ln x} \quad \text{uniforme pour } l = 1, 2$$

cela nous permet d'obtenir les majorations suivantes :

$$-K(x;3,l) < \frac{0{,}524}{2} \times \frac{1+\ln x}{\ln^2 x}, \qquad \frac{(S(x;3,l))^2 g(\xi)}{2} < \frac{(0{,}524)^2 \times (2{,}422 + \ln x)}{4\ln^4 x},$$
$$u(x;3,l) < \frac{1}{2}\sum_{p>x,\ p\equiv l(3)} \frac{1}{p^2} \leqslant \frac{(1 + 3\times 0{,}524)}{2x\ln x}.$$

Alors, d'après l'assertion 1 du Lemme 1, pour tout nombre $n \geqslant N_{3,l}(x)$ $(x \geqslant 25\,000)$, on a :

$$g^*_{3,l}(n) \leqslant P_{3,l} \times a_{3,l} \times \exp\left(\frac{0{,}524(1+\ln x)}{2\ln^2 x} + \frac{(0{,}524)^2 \times (2{,}422 + \ln x)}{4\ln^4 x} + \frac{(1 + 3\times 0{,}524)}{2x\ln x}\right).$$

Il en vient :

$$g^*_{3,1}(n) < 0{,}7091 \quad \text{pour } n \geqslant N_{3,1}(25\,000), \quad N_{3,1}(25\,000) = 7 \times 13 \times 19 \times \cdots \times 24\,979 \quad (p \equiv 1(3)),$$
$$g^*_{3,2}(n) < 1{,}2126 \quad \text{pour } n \geqslant N_{3,2}(25\,000), \quad N_{3,2}(25\,000) = 2 \times 5 \times 11 \times \cdots \times 24\,989 \quad (p \equiv 2(3)).$$

Pour les nombres n tels que $n \leqslant N_{3,l}(25\,000)$ on a vérifié les inégalités de l'assertion par calcul direct sur ordinateur pour les nombres $N_m \leqslant N_{3,l}(25\,000)$ tout en tenant compte de la première assertion du Lemme 1.

Références

[1] H. Davenport, Multiplicative Number Theory, second ed., revised by Hugh L. Montgomery, Springer-Verlag, New York, 1980.
[2] P. Dusart, Autour de la Fonction π, thèse de doctorat de l'université de Limoges en Mathématiques appliquées et théorie des nombres, juin 1998.
[3] W.J. Ellison, M. Mendes-France, Les Nombres Premiers, Actualités scientifiques et industrielles, vol. 1366, Hermann, Paris, 1975.
[4] J.-L. Nicolas, Petites valeurs de la fonction d'Euler, Journal of Number Theory 17 (1983) 375–388.
[5] R. Rumely, Numerical computations concerning the ERH, Mathematics of Computation 62 (1993) 415–440.
[6] K.S. Williams, Mertens' theorem for arithmetic progressions, Journal of Number Theory 6 (1974) 353–359.