Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) 813–818
COMPTES RENDUS MATHEMATIQUE
http://france.elsevier.com/direct/CRASS1/

Théorie des groupes

Sur la 2-cohomologie galoisienne de la composante résiduellement neutre des groupes réductifs connexes définis sur les corps locaux

Jean-Claude Douai

Laboratoire Paul-Painlevé CNRS UMR 8524, université des sciences et technologies de Lille, 59665 Villeneuve d'Ascq cedex, France

Reçu le 13 juin 2005 ; accepté après révision le 14 mars 2006

Disponible sur Internet le 2 mai 2006

Présenté par Jacques Tits

Résumé

Soient K un corps complet pour une valuation discrète de corps résiduel parfait k, $\mathcal{O}$ son anneau d'entiers, G un K-groupe réductif connexe. Bruhat et Tits ont défini la composante résiduellement neutre G^{00} de G et calculé le $H^1(K, G^{00})$. Le but de cette Note est de calculer la 2-cohomologie galoisienne de G^{00}. Nous complétons ainsi nos résultats où l'étude était faite dans le cas particulier où $G = \widetilde{G}$ était supposé simplement connexe et k de dimension cohomologique $\leqslant 1$. Nous montrons comment toute classe de 2-cohomologie galoisienne à valeurs dans G^{00} se réduit à une classe à valeurs dans un k-tore maximal de la fibre spéciale d'un $\mathcal{O}$-modèle de G. On en déduit, en particulier, que si G est un K-groupe réductif connexe et si $cd \cdot (k) \leqslant 1$, alors toute classe de 2-cohomologie galoisienne à valeurs dans la composante résiduellement neutre de G est neutre. ***Pour citer cet article : J.-C. Douai, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abstract

Galois 2-cohomology of the residually neutral component of connected reductive groups defined over local fields. Let K be a complete discrete valuation field, k its residue field, $\mathcal{O}$ its ring of integers, and G a connected reductive K-group. Bruhat and Tits have defined the residually neutral component G^{00} of G and have calculated $H^1(K, G^{00})$. The aim of this Note is to calculate the Galois 2-cohomology of G^{00}. We extend our results where the case $G = \widetilde{G}$ simply connected and k of cohomological dimension $\leqslant 1$ is treated. We show that each class of Galois 2-cohomology in G^{00} reduces to a class into a maximal k-torus of the special fiber of an $\mathcal{O}$-model of G. We deduce, in particular, that, if G is a connected reductive K-group and if $cd \cdot (k) \leqslant 1$, then each class of Galois 2-cohomology into the residually neutral component is neutral. ***To cite this article: J.-C. Douai, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006).***

Abridged English version

Let K be a field, G a connected reductive K-group, we first show that any K-band $\mathcal{L}$ locally representable by G (for the etale topology) in the sense of [7] is representable by a connected, reductive and quasi-split K-group $G_{\mathcal{L}}$. The calculation of the Galois 2-cohomology $H^2(K, \mathcal{L})$ is equivalent to that of $H^2(K, G_{\mathcal{L}})$. From now on, we suppose

Adresse e-mail : douai@math.univ-lille1.fr (J.-C. Douai).

1631-073X/$ – see front matter © 2006 Académie des sciences. Publié par Elsevier SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.crma.2006.03.021

that K is complete for a discrete valuation with perfect residue k. Let $\widetilde{K}$ be the maximal unramified extension of K, we show that $H^2(K, G_{\mathcal{L}})$ is the same as $H^2(\widetilde{K}/K, G_{\mathcal{L}}(\widetilde{K}))$. Since $G_{\mathcal{L}}$ is quasi-split, it is residually quasi-split in the sense of [4] and therefore admits a Iwahori subgroup $B \subset G_{\mathcal{L}}(\widetilde{K})$. In fact, B is included in the residually neutral component $(G_{\mathcal{L}})^{00}$ of $G_{\mathcal{L}}(\widetilde{K})$ defined by Bruhat and Tits. Using the conjugation of Iwahori subgroups in $(G_{\mathcal{L}})^{00}$, we then show that each Galois 2-cohomology class of $H^2(K, G_{\mathcal{L}})$ which belongs to the image of $H^2(\widetilde{K}/K, (G_{\mathcal{L}})^{00} \multimap H^2(\widetilde{K}/K, G_{\mathcal{L}}(\widetilde{K})) = H^2(K, G_{\mathcal{L}})$ ($\multimap$ is the relation as in [7] induced by the inclusion $(G_{\mathcal{L}})^{00} \mapsto G_{\mathcal{L}}(\widetilde{K})$) reduces to a class in $H^2(\widetilde{K}/K, B)$ and consequently to a class in $H^2(k, \overline{R})$ where $\overline{R}$ is a maximal k-torus of the k-Borel $\overline{B}$ obtained from B by reduction. We deduce, in particular, that if G is a connected reductive K-group and k such that $cd \cdot (k) \leqslant 1$, then each Galois 2-cohomology class in the residually neutral component is neutral.

1. Liens représentables par un *k*-groupe résiduellement quasi-déployé

Proposition 1.1. *Soient K un corps quelconque, G un K-groupe réductif connexe. Alors, tout K-lien $\mathcal{L}$ localement représentable au sens de* [7] – *chapitre* IV – *Définition* 1.2.1 (*cf. aussi la proposition* 3.1.2 *de ce chapitre* IV) *par G est représentable par un K-groupe $G_{\mathcal{L}}$ réductif connexe quasi-déployé.*

Pour la démonstration, cf.
- la proposition 3.2, p. 75, chapitre V de [6],
- aussi le lemme 1.1 de [5] dans le cas où G est semi-simple,
- aussi la proposition 3.1 de [1].

Indiquons seulement que la Proposition 1.1 résulte du fait que les K-liens localement représentables par G sont classifiés par le $H^1(K, \operatorname{Out} G_0)$ (cf. [7] – chapitre IV – corollaire 1.1.7.3), où G_0 est le K-schéma de Chevalley de même type de G. La suite exacte

$$1 \to \operatorname{Int} G_0 \to \operatorname{Aut} G_0 \overset{s}{\rightleftarrows} \operatorname{Out} G \to 1$$

possède un scindage s dont l'image dans $\operatorname{Aut} G_0$ est précisément constituée des éléments qui laissent invariant le quasi-épinglage sous-jacent de G_0 (cf. aussi le point (c) du n° 1.3 de [4]). Toute classe $[\mathcal{L}]$ de $H^1(K, \operatorname{Out} G_0)$ définit donc par l'intermédiaire de s une classe $[G_{\mathcal{L}}]$ de $H^1(K, \operatorname{Aut} G_0)$. Le schéma en groupe $G_{\mathcal{L}}$ est réductif connexe et quasi-déployé, donc admet un couple de Killing (B, T) dont le K-tore maximal T est le centralisateur d'un K-tore déployé maximal S (cf. par ex. le n° 4.1.1, p. 77 de [3]).

Remarque 1.2. $H^2(K, \mathcal{L}) = H^2(K, G_{\mathcal{L}})$ est un espace principal homogène sous le groupe $H^2(K, Z(G_{\mathcal{L}}))$ où $Z(G_{\mathcal{L}})$ = centre de $G_{\mathcal{L}}$, mais ceci ne donne pas de renseignement sur l'existence des classes neutres (i.e. telles que les K-gerbes qui les représentent admettent des sections) autres que la classe triviale de $H^2(K, G_{\mathcal{L}})$ définie par la K-gerbe des torseurs sous $G_{\mathcal{L}}$.

A partir de maintenant, dans toute la suite, K désignera un corps local i.e. un corps complet pour une valuation discrète ω telle que $\omega(K^*) = \mathbb{Z}$. Nous désignerons par $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K, par k son corps résiduel, par $\widetilde{K} = K_{nr}$ l'extension maximale non ramifiée de K, par $\widetilde{\mathcal{O}} = \widetilde{\mathcal{O}}_K$ l'anneau des entiers de $\widetilde{K}$, par $\bar{k}$ le corps résiduel de $\widetilde{K}$ qui est une clôture algébrique k. Nous supposerons toujours k parfait.

Corollaire 1.3 *(à la Proposition 1.1). Soient K un corps local de corps résiduel k, G un K-groupe réductif connexe, $\mathcal{L}$ un K-lien localement représentable par G. Le K-groupe $G_{\mathcal{L}}$ donné par la Proposition* 1.1 *est résiduellement quasi-déployé au sens du n°* 2.2 *de* [4] *i.e. possède un sous-groupe d'Iwahori $B \subset G_{\mathcal{L}}(\widetilde{K})$ stable par Gal $(\widetilde{K}/K)$. De manière précise, il existe un $\mathcal{O}_K$-modèle $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$ de $G_{\mathcal{L}}$ de fibre spéciale $\overline{G}_{\mathcal{L}}/k$, un $\mathcal{O}_K$-sous-schéma $\mathcal{B}$ de $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$, un k-sous-groupe de Borel $\overline{B}$ de $\overline{G}_{\mathcal{L}}$ tels que*

(i) $\mathcal{B}(\widetilde{O}_K) = B$,
(ii) $\mathcal{B}(\widetilde{O}_K) = sp^{-1}(\overline{B}(\bar{k}))$ *où sp désigne la spécialisation* $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}(\widetilde{O}_K) \to \overline{G}_{\mathcal{L}}(\bar{k})$.

La première partie du corollaire résulte du n° 2.2 de [4], la deuxième partie de la construction même des sous-groupes parahoriques minimaux de $G_{\mathcal{L}}$ (cf. par ex. le n° 1.7 de [4]).

Proposition 1.4 *(cf. la démonstration du théorème 1.1 de [5] ; cf. aussi la démonstration du théorème 3.1 du chapitre VII, p. 100 de [6]). L'application*

$$H^2\big(\widetilde{K}/K, G_{\mathcal{L}}(\widetilde{K})\big) \to H^2\big(\overline{K}/K, G_{\mathcal{L}}(\overline{K})\big) = H^2(K, \mathcal{L})$$

est bijective.

Démonstration. Elle utilise essentiellement la proposition 3.1.11 – chapitre V – § 3 de [7].

L'injection $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ conduit à un morphisme de topos

$$\begin{tikzcd} f:\mathrm{Gal}(\overline{K}/K) - ens \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K) - ens \arrow[d, equal] \\ E' \arrow[r] & E \end{tikzcd}$$

(où E', E, f sont les notations de [7]), auquel est associée la suite spectrale de descente de $\widetilde{K}$ à K induite par $f: E' \to E$. Dans [7], l'analogue non abélien $H^p(\widetilde{K}/K, H^q(\widetilde{K}, ?)) \Rightarrow H^{p+q}(\overline{K}/K, ?)$ de cette suite spectrale est étudié. Nous l'appliquons au cas où $? = G_{\mathcal{L}}$. Comme $cd \cdot (\widetilde{K}) \leqslant 1$, $H^2(\overline{K}/\widetilde{K}, Z(G_{\mathcal{L}}(\overline{K})) = 0$, d'où il résulte que le premier cran de la filtration de $H^2(K, Z(G_{\mathcal{L}}))$, à savoir le sous-groupe

$$H^2\big(K, Z(G_{\mathcal{L}})\big)^{tr} := \ker\big\{H^2\big(\overline{K}/K, Z(G_{\mathcal{L}})(\overline{K})\big) \to H^0\big(\widetilde{K}/K, H^2\big(\overline{K}/\widetilde{K}, Z(G_{\mathcal{L}})(\overline{K})\big)\big)\big\}$$

coïncide avec $H^2(K, Z(G_{\mathcal{L}}))$.

Considérons alors le diagramme suivant :

$$(\mathrm{D}) \quad \left\{ \begin{tikzcd} & H^2\big(K, Z(G_{\mathcal{L}})\big) \arrow[d, phantom, "\wr"] & \\ H^2\big(\widetilde{K}/K, Z(G_{\mathcal{L}})(\widetilde{K})\big) \arrow[r, "(1)"] \arrow[d, phantom, "\wr"] & H^2\big(K, Z(G_{\mathcal{L}})\big)^{tr} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & H^1\big(\widetilde{K}/K, H^1\big(\widetilde{K}, Z(G_{\mathcal{L}})\big)\big) \arrow[d] \\ H^2\big(\widetilde{K}/K, G_{\mathcal{L}}(\widetilde{K})\big) \arrow[r, "(2)"] & H^2(K, G_{\mathcal{L}})^{tr} \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr"] & ? \\ & H^2(K, G_{\mathcal{L}}) & \end{tikzcd} \right.$$

(pour les isomorphismes verticaux medians, cf. la remarque 1.2).

Puisque $cd \cdot (\widetilde{K}) \leqslant 1$ et $G_{\mathcal{L}}$ est connexe, $H^1(\widetilde{K}, G_{\mathcal{L}}) = 0$ ([8], chapitre III, n° 2.3, théoreme 1′). Les deux hypothèses :

1. $H^2(E', Z(G_{\mathcal{L}}))^{tr} = H^2(E', Z(G_{\mathcal{L}}))$;
2. trivialité de l'application $H^1(\widetilde{K}, Z(G_{\mathcal{L}})) \to H^1(\widetilde{K}, G_{\mathcal{L}})$ (ou de manière équivalente celle de $R^1 f_* Z(G_{\mathcal{L}}) \to R^1 f_*(G_{\mathcal{L}})$)

de la proposition 3.1.11 – chapitre IV – § 3 de [7] sont alors satisfaites.

Il en résulte que toute $\mathcal{L}$-gerbe ($\mathcal{L} = $ lien $(G_{\mathcal{L}})$) sur E' provient d'une gerbe sur E d'où la surjectivité de l'application (2) dans le diagramme (D) (donc aussi celle de (1)). L'injectivité de (2) résulte alors de la trivialité du terme $H^0(\widetilde{K}/K, H^1(\widetilde{K}, G_{\mathcal{L}}))$ dans la suite exacte en basses dimensions déduite de la suite spectrale. □

Remarque 1.5. La bijection de la Proposition 1.4 est compatible avec les actions des centres $H^2(\widetilde{K}/K, Z(G_{\mathcal{L}}(\widetilde{K})))$ et $H^2(K, Z(G_{\mathcal{L}}))$.

2. Introduction de la composante résiduellement neutre d'un K-groupe réductif connexe G

Dans le n° 5.2.11 de [3] p. 166 ou encore dans le n° 1.8 de [4] p. 677, Bruhat et Tits introduisent la notion de composante résiduellement neutre, notée G^{00}, de G. Ils désignent ainsi le sous-groupe de $G(\widetilde{K})$ engendré par les groupes des $\widetilde{K}$-points rationnels des K-sous-groupes parahoriques de G. Nous pouvons, en particulier, appliquer cette notion aux K-groupes $G_{\mathcal{L}}$ du § 1 qui sont quasi-déployés, donc admettent des couples de Killing (B, T). Désignons par $\mathcal{T}$ le $\mathcal{O}$-schéma en groupes lisse canonique de fibre générique T défini en [3], § 4.4. Alors (cf. n° 1.8 de [4]) $(G_{\mathcal{L}})^{00} = \mathcal{T}^0(\widetilde{\mathcal{O}}) \cdot \varphi(\widetilde{G}_{\mathcal{L}}(\widetilde{K}))$ où $\mathcal{T}^0$ désigne la composante neutre de $\mathcal{T}$, $\widetilde{G}_{\mathcal{L}}$ un K-revêtement universel du groupe dérivé $(G_{\mathcal{L}})_{\mathrm{der}}$ de $G_{\mathcal{L}}$, $\varphi : \widetilde{G}_{\mathcal{L}} \to (G_{\mathcal{L}})_{\mathrm{der}}$ l'application canonique. En particulier, $(G_{\mathcal{L}})^{00} = G_{\mathcal{L}}(\widetilde{K})$ si G est semi-simple simplement connexe.

Définition 2.1. Soient G un K-groupe réductif connexe, $\mathcal{L}$ un K-lien localement représentable par G. Nous appellerons « classe à valeurs dans la composante résiduellement neutre de G » toute classe de $H^2(K, G_{\mathcal{L}}) = H^2(K, \mathcal{L})$ qui appartient à l'image de la relation $H^2(\widetilde{K}/K, (G_{\mathcal{L}})^{00}) \multimap H^2(\widetilde{K}/K, G_{\mathcal{L}}(\widetilde{K})) \xrightarrow{\sim} H^2(K, \mathcal{L})$ où $\multimap$ est induite par l'inclusion $(G_{\mathcal{L}})^{00} \hookrightarrow G_{\mathcal{L}}(\widetilde{K})$ (cf. [7] – chapitre IV – § 3 – définition 3.1.4) et la bijection est donnée par la Proposition 1.4.

Puisque $G_{\mathcal{L}}$ est résiduellement quasi-déployé (cf. corollaire 1.3), $G_{\mathcal{L}}$ admet un K-sous-groupe d'Iwahori $B = B_{\mathcal{L}}$ qui est évidemment contenu dans $(G_{\mathcal{L}})^{00}$ et est égal à son propre normalisateur dans $(G_{\mathcal{L}})^{00}$:

$$\mathrm{Norm}_{(G_{\mathcal{L}})^{00}}(B) = B.$$

Considérons maintenant un 2-cocycle $(f_s, g_{s,t})$ de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$ à valeurs dans $(G_{\mathcal{L}})^{00}$ i.e. un couple de fonctions continues

$$f : \Gamma \to \mathrm{Aut}\big((G_{\mathcal{L}})^{00}\big),$$
$$g : \Gamma \times \Gamma \to (G_{\mathcal{L}})^{00}$$

satisfaisant aux deux conditions suivantes :

(i) $f_s(f_t(a)) = g_{s,t} \cdot f_{st}(a) \cdot g_{s,t}^{-1}$, $a \in (G_{\mathcal{L}})^{00}, s, t \in \Gamma$,

(ii) $f_r(g_s, t) \cdot g_{r,st} = g_{r,s} \cdot g_{rs,t}$, $r, s, t \in \Gamma$.

Pour tout $s \in \Gamma$, $f_s(B)$ et B sont conjugués dans $(G_{\mathcal{L}})^{00}$, d'où l'existence de $h_s \in (G_{\mathcal{L}})^{00}$ tel que $f_s(B) = h_s^{-1} \cdot B \cdot h_s$. Substituant $f_s' = h_s \cdot f_s \cdot h_s^{-1}$ à f_s, on remplace le 2-cocycle $(f_s, g_{s,t})$ par un 2-cocycle $(f_s', g_{s,t}')$ qui lui est équivalent ; mais alors (i) implique que $g_{s,t}'$ normalise B, donc appartient à $B = \mathrm{Norm}_{(G_{\mathcal{L}})^{00}}(B)$. Le 2-cocycle $(f_s', g_{s,t}')$ est donc à valeurs dans B.

Proposition 2.2. *Soient B le sous-groupe d'Iwahori contenu dans $(G_{\mathcal{L}})^{00}$ considéré précédemment, $\mathcal{B}$ le $\mathcal{O}_K$-sous-schéma de $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$ tel que $\mathcal{B}(\widetilde{\mathcal{O}}_K) = B$ et admettant le k-sous-groupe de Borel $\overline{B}$ de $\overline{G}_{\mathcal{L}}$ pour fibre spéciale* (*cf. le corollaire* 1.3). *Il existe alors des isomorphismes*

$$H^2(\widetilde{K}/K, B) \simeq H^2(\mathcal{O}_K, \mathcal{B}) \overset{\rho_*}{\simeq} H^2(k, \overline{B}) \simeq H^2\big(k, Z(\overline{B})\big)$$

où $Z(\overline{B})$ désigne le centre de $\overline{B}$ et dans le cas où $G_{\mathcal{L}}$ est déployé, $H^2(k, Z(\overline{B}))$ s'identifie à un sous-groupe de $H^2(k, \overline{R})$ où $\overline{R}$ est un k-tore maximal de $\overline{B}$.

Comme $G_{\mathcal{L}}$ (resp. $\overline{G}_{\mathcal{L}}$) est quasi-déployé sur K (resp. k), on peut en fait le supposer déployé pour simplifier.

Nous commençons par montrer qu'il y a une seule classe neutre dans l'ensemble $H^2(\mathcal{O}_K, \mathcal{B})$ ce qui permettra de l'identifier à $H^2(\mathcal{O}_K, Z(\mathcal{B}))$. Par la proposition 3.2.6 (iii) – chapitre IV de [7], nous avons les deux suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & H^2\big(\mathcal{O}_K, Z(\mathcal{B})\big)' & & \\
 & & & & \wr\| & & \\
H^1(\mathcal{O}_K, \mathcal{B}) & \longrightarrow & H^1\big(\mathcal{O}_K, \mathrm{Int}(\mathcal{B})\big) & \longrightarrow & H^2(\mathcal{O}_K, \mathcal{B})' & \longrightarrow & 1 \\
\wr\| & & \wr\| & & \wr\| & & \\
H^1(k, \overline{R}) & \longrightarrow & H^1\big(k, \frac{\overline{R}}{Z(\overline{B})}\big) & \longrightarrow & H^2\big(k, Z(\overline{B})\big)' & \longrightarrow & 1 \\
 & & & & \wr\| & & \\
 & & & & H^2(k, \overline{B})' & &
\end{array}$$

où les primes désignent les sous-ensembles de classes neutres, les deux premiers isomorphismes verticaux à gauche étant ceux du lemme 2 (ii) n° 3.4 de [4]. Puisque $\overline{R}$ est déployé sur k,

$$H^1(k,\overline{R})=H^1\left(k,\frac{\overline{R}}{Z(\overline{B})}\right)=0$$

d'où $H^2(\mathcal{O}_K,\mathcal{B})'\simeq H^2(k,\overline{B})'$ est réduit à une seule classe neutre.

$\mathcal{B}\,(\widetilde{\mathcal{O}})=B$ est, par la démonstration du lemme 2 de [4], la limite projective des $\mathcal{B}(\widetilde{O}_n)$ où $\widetilde{O}_n=\frac{\widetilde{O}}{P^{n+1}}$ ($P=$ idéal maximal de $\widetilde{O}$, n entier $\geqslant 0$) et il existe une suite de groupes algébriques (notés Q_n dans [4]) définis sur k tels que $Q_n(\bar{k})$ s'identifie en tant que $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$-groupe à $\mathcal{B}(\widetilde{\mathcal{O}}_n)$ et l'application canonique $\mathcal{B}(\widetilde{\mathcal{O}}_{n+1})$ sur $\mathcal{B}(\widetilde{\mathcal{O}}_n)$ à un « morphisme de transition » $\lambda_n:Q_{n+1}\to Q_n$ défini sur k, surjectif, séparable et à noyau unipotent connexe, Q_0 étant le k-Borel $\overline{B}$ (cf. aussi la proposition 3 de [2]).

Il résulte de la proposition 4.1 de [1] qu'une classe de $H^2(k,Q_n)$ est neutre (donc nulle ici) ssi son image dans $H^2(k,Q_n^{\mathrm{red}})=H^2(k,\overline{R})$ est nulle, d'où la chaîne d'égalités (où l'indice s désigne la partie semi-simple)).

$$\begin{aligned}H^2(\mathcal{O}_K,\mathcal{B})&\simeq H^2\big(\mathcal{O}_K,Z(\mathcal{B})\big)=\cdots=H^2\big(k,Z(Q_{n+1})_s\big)=H^2\big(k,Z(Q_n)_s\big)=\cdots\\&=H^2\big(k,Z(Q_0)\big)=H^2\big(k,Z(\overline{B})\big)=H^2\big(k,Z(\overline{G}_{\mathcal{L}})\big)\hookrightarrow H^2(k,\overline{R}).\end{aligned}$$

On en déduit l'existence de l'isomorphisme ρ_*.

Reste à montrer le 1[er] isomorphisme $H^2(\widetilde{K}/K,B)\simeq H^2(\mathcal{O}_K,\mathcal{B})$. Pour cela, on considère la suite spectrale de descente $H^p(\widetilde{K}/K,H^q(\widetilde{\mathcal{O}},?))\Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{O}_K,?)$ analogue à celle qui a été considérée dans la proposition 1.4. Evidemment, $H^1(\widetilde{\mathcal{O}},\mathcal{B})=0$ et, puisque $cd\cdot(\widetilde{K})\leqslant 1$, $H^2(\widetilde{K},Z(B))=0$ qui implique $H^2(\widetilde{\mathcal{O}},Z(\mathcal{B}))=0$ d'où les isomorphismes $H^2(\widetilde{K}/K,B)\simeq H^2(\mathcal{O},\mathcal{B})^{tr}\simeq H^2(\mathcal{O}_K,\mathcal{B})$ (par définition de B, $H^0(\widetilde{\mathcal{O}},\mathcal{B})=B$).

Compte tenu de la proposition 2.2, le fait que tout 2-cocycle de $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$ à valeurs dans $(G_{\mathcal{L}})^{00}$ est équivalent à un 2-cocycle de $\mathrm{Gal}(\widetilde{K}/K)$ à valeurs dans B conduit au théorème suivant :

Théorème 2.3. *Soient G un K-groupe réductif connexe, $\mathcal{L}$ un K-lien localement représentable par G. Alors, pour toute classe α de $H^2(K,\mathcal{L})=H^2(K,G_{\mathcal{L}})$ à valeurs dans la composante résiduellement neutre de G, il existe une classe β dans*

$$H^2(\widetilde{K}/K,B)\simeq H^2(\mathcal{O}_K,\mathcal{B})\overset{\rho_*}{\simeq}H^2(k,\overline{B})\simeq H^2\big(k,Z(\overline{B})\big)$$

tels que α est l'image de β par la relation

$$\begin{tikzcd}
\beta \arrow[r, "\circ" marking] & \alpha \\
\pitchfork & \pitchfork \\
H^2(\widetilde{K}/K,B) \arrow[r, "\circ" marking] \arrow[ddr, bend right, "\circ" marking] & H^2(K,\mathcal{L}) \\
 & H^2\big(\widetilde{K}/K,G_{\mathcal{L}}(\widetilde{K})\big) \arrow[u, "\approx"'] \\
 & H^2\big(\widetilde{K}/K,(G_{\mathcal{L}})^{00}\big). \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

β est neutre (donc aussi α) si son image par l'application composée

$$H^2(\widetilde{K}/K,B)\simeq H^2\big(k,Z(\overline{B})\big)\simeq H^2\big(k,Z(\overline{G}_{\mathcal{L}})\big)\to H^2(k,\overline{R})$$

est nulle auquel cas β appartient à $H^2(\widetilde{K}/K,B)'\simeq H^2(k,Z(\overline{B}))'$ donc à l'image de

$$\begin{tikzcd}
\delta^1: H^1\big(k,\mathrm{Int}(\overline{B})\big) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^2\big(k,Z(\overline{B})\big) \\
H^1\big(k,\frac{\overline{R}}{Z(\overline{B})}\big). &
\end{tikzcd}$$

En particulier, $H^2(k, Z(\overline{B})) \hookrightarrow H^2(k, \overline{R})$ *dans le cas déployé.*

Remarque 2.4. On peut exprimer le théorème précédent en disant que toute classe de 2-cohomologie galoisienne à valeurs dans la composante résiduellement neutre de G provient d'une classe de 2-cohomologie galoisienne du corps résiduel k à valeurs dans un k-tore.

Corollaire 2.5. *Si, dans le Théorème* 2.3, *on suppose en plus que* $cd \cdot (k) \leqslant 1$, *G étant toujours un* K*-groupe réductif connexe, alors toute classe de* $H^2(K, \mathcal{L})$ *à valeurs dans la composante résiduellement neutre de G est neutre.*

Démonstration. Immédiate à partir du Théorème 2.3. □

Corollaire 2.6. *Si, dans le Théorème* 2.3, *on suppose en plus G semi-simple simplement connexe, alors toute classe de* $H^2(K, \mathcal{L})$ *se réduit* (*dans le sens de la Remarque* 2.4) *en une classe abélienne à valeurs dans un* k*-tore.*

Démonstration. Si $G = \widetilde{G}$ est semi-simple simplement connexe, alors, nous avons vu au début du § 2 que, pour tout k-lien localement représentable par G, $(G_{\mathcal{L}})^{00}$ coïncidait avec $(G_{\mathcal{L}})(\widetilde{K})$. Toute classe de $H^2(K, \mathcal{L})$ est donc à valeurs dans la composante résiduellement neutre et on applique le Théorème 2.3. □

Remarque 2.7. (a) En utilisant le fait que $G_{\mathcal{L}}$ était résiduellement quasi-déployé, nous avons pu améliorer le résultat de la remarque 3.3, p. 101 de [6] où nous obtenions seulement une réduction à un K-sous-groupe parahorique alors que, dans le corollaire 2.6 précédent, nous obtenons une réduction à un K-sous-groupe d'Iwahori. (b) Si, dans le corollaire 2.6, k est, en plus, supposé de dimension cohomologique $\leqslant 1$, alors on retrouve le théorème 1.1 de [5] selon lequel toutes les classes de $H^2(K, \mathcal{L})$ sont neutres (dites triviales dans [5]).

Corollaire 2.8. *Si, dans le Théorème* 2.3, *on suppose G semi-simple* (*et non plus seulement réductif connexe*), *k étant supposé de dimension cohomologique* $\leqslant 1$, *alors, pour tout* K*-lien* $\mathcal{L}$ *localement représentable par G, toutes les classes de* $H^2(K, \mathcal{L})$ *sont neutres.*

Le résultat du Corollaire 2.8 était déjà établi dans le théorème 3.1′, p. 102 – chapitre VII de [6].

Démonstration du Corollaire 2.8. On considère un revêtement universel $\widetilde{G}$ de G ; on applique alors la Remarque 2.7(b) à $\widetilde{G}$ et le fait que $cd \cdot (K) \leqslant 2$. □

Corollaire 2.9. *Si, dans le Théorème* 2.3, $G = T$ *est réduit à un* K*-tore, alors toute classe à valeurs dans la composante résiduellement neutre de G se réduit à une classe dans*

$$H^2\big(\widetilde{\mathcal{O}}/\mathcal{O}, \mathcal{T}^0(\widetilde{\mathcal{O}})\big) \simeq H^2(k, \overline{T})$$

où $\mathcal{T}^0$ *désigne la composante neutre du* $\mathcal{O}$*-schéma* $\mathcal{T}$ *en groupes lisses canonique de fibre générique* T *et de fibre spéciale* $\overline{T}$ (*cf. les notation du début du* § 2).

Références

[1] M. Borovoi, Abelianization of the second non abelian Galois cohomology, Duke Math. J. 72 (1993) 217–239, MR 1242885.
[2] F. Bruhat, J. Tits, Groupes algébriques simples sur un corps local, in: Proc. Conference on Local Fields (Driebergen, 1966), Springer, 1967, pp. 23–36.
[3] F. Bruhat, J. Tits, Groupes algébriques sur un corps local, Publ. Math. IHES 60 (1984) 1–184.
[4] F. Bruhat, J. Tits, Groupes algébriques sur un corps local, Chapitre III. Compléments et applications à la cohomologie galoisienne, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect IA Math. 34 (1987) 671–698.
[5] J.-C. Douai, 2-cohomologie galoisienne des groupes semi-simples définis sur les corps locaux, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A 280 (1975) 321–323.
[6] J.-C. Douai, 2-cohomologie galoisienne des groupes semi-simples, thèse d'Etat, Université de Lille I, Lille France, 1976.
[7] J. Giraud, Cohomologie non abélienne, Grundlheren Math. Wiss., vol. 179, Springer-Verlag, 1971.
[8] J.-P. Serre, Cohomologie galoisienne, 5^{e} édition, Lecture Notes in Math., vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1994.